

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLVIII

1951

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XI.

(2° semestre 1951)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1951

ATTI

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

1907

RENDICONTI

RENDICONTI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

RENDICONTI

RENDICONTI



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1951 - Luglio-agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Meccanica. — *La barriera della temperatura nei missili geodetici.* — II. *Dinamica del missile a getto attivo.* Nota (*) del Socio G. ARTURO CROCCO.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ su questo argomento ho esposto l'espedito di calcolo che consente di valutare la gittata di un missile in campo di forze centrali riportandosi ad una traiettoria ideale compiuta interamente nel vuoto.

L'espedito consiste (fig. 1) nel suddividere la traiettoria reale in due tronchi: uno dei quali, CD, è percorso dal missile durante l'attività del getto propulsivo,

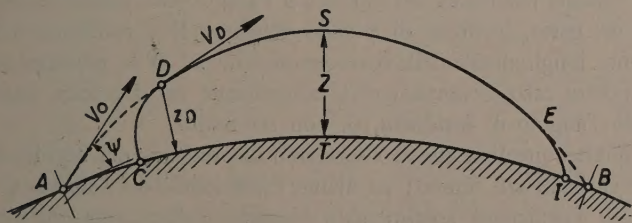


Fig. 1.

mentre l'altro, DB, si svolge a getto spento. Si sostituisce allora al tratto reale CD un tratto ideale *equivalente* AD e si valuta la gittata dalla traiettoria ellittica nel vuoto, AB.

Si presentano ora qui i risultati di tale valutazione allo scopo di ottenere le caratteristiche del punto D, necessarie a studiare il tratto reale di raccordo

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) Questi « Rend. », fasc. 2, ser. VIII, vol. X, 1951.

[Quadro I]. Il quadro procede per semiangoli al centro della Terra, η , di grado in grado; e fornisce le velocità iniziali minime, V_0 ; gli angoli di proiezione ottima, ψ ; le gittate X ; le altezze massime Z ; e le durate, t , dei percorsi. Fornisce anche i parametri λ ed α , quali definiti nella precedente Nota. Le tre ultime colonne danno le caratteristiche del punto D secondo una particolare convenzione sull'altezza corrispondente.

La presente Nota vuole ora intraprendere lo studio del tratto di raccordo CD, compiuto dal missile nel suo periodo di attività del getto, partendo da velocità iniziale nulla. Il problema consiste nell'ottenere il raccordo col minimo consumo di propellente, cosicchè anche la scelta del punto D dovrebbe a rigore ritenersi implicita; ma poichè nella traiettoria ideale ogni diminuzione di energia cinetica corrisponde ad un aumento di quota e quindi a identità di lavoro richiesto al propellente, si semplifica lo studio esplicitando preventivamente le caratteristiche da conseguire e prendendo D ad un sedicesimo della gittata.

Il problema viene così ridotto a quello di una traiettoria che, iniziata verticalmente con velocità nulla, raggiunga a fine di combustione caratteristiche reali V_F, β_F, z_F identiche a quelle preventivate V_D, β_D, z_D .

La soluzione di questo problema è pertanto fondamentale nella discussione dell'argomento di queste Note; poichè, se essa non risultasse concettualmente possibile per le grandi velocità che appaiono nel quadro delle caratteristiche, lo studio della barriera della temperatura resterebbe puramente accademico.

Ne segue la necessità di svolgere per esteso la meccanica del missile a getto attivo, la quale si distingue da quella a getto spento in quanto che si aggiungono alle forze gravitazionali tre altri fenomeni fisici: la spinta del getto, la resistenza dell'aria e l'alleggerimento di massa durante la combustione.

A questo scopo denominiamo con M la massa del missile all'istante t ; ed Mg il suo peso, diretto in quell'istante verso il centro della Terra (fig. 2). Sia inoltre v la velocità istantanea del mobile; β l'angolo che essa fa con l'orizzonte; F la spinta del getto, inclinato di φ sulla velocità; R la resistenza dell'aria, cioè la componente longitudinale della forza aerodinamica; D la portanza dell'aria, che diremo nel nostro caso *devianza*, cioè la componente aerodinamica trasversale che nasce quando l'angolo di *incidenza*, φ , non sia nullo.

Tutte queste quantità, che ci riserviamo di precisare nel seguito della trattazione, sono variabili col tempo; ed alcune dipendono dalla velocità e dalla quota per tramite di coefficienti sperimentali. Nessuna elaborazione analitica permette quindi di risolvere simbolicamente in caso generale le complesse equazioni del moto cui esse danno luogo.

È però subito da osservare che la traiettoria del missile a getto attivo è una modesta frazione della traiettoria totale; e che l'attraversamento dell'atmosfera si può ritenere esaurito entro 25 km dal suolo, giacchè ivi la densità atmosferica supera appena il tre per cento di quella a bassa quota. Ne consegue in ogni caso che la traiettoria di raccordo del missile potrà venir trattata con buona approssimazione come in Balistica ordinaria, cioè con gravità costante e parallela; e che al disopra dei 25 km si potranno con opportuni accorgimenti ritenere quasi sempre trascurabili le forze aerodinamiche.

QUADRO I.

Parametri cinetici della traiettoria ellittica.

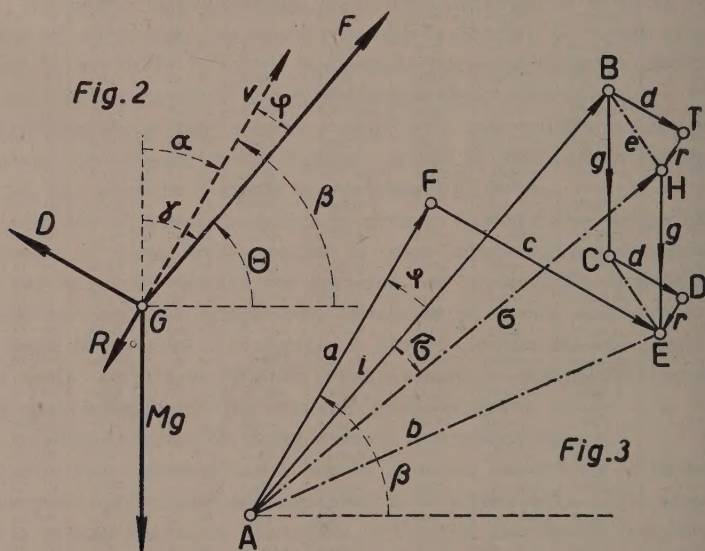
η gradi	ψ gradi	λ	$\frac{a}{R}$	V_0 m/sec	X km	Z km	t min./sec.	x_D km	β_D	V_D m/sec
1	44° 30'	0.01715	0.50872	1464	222,2	55,1	3m 35s 4	13,6	43° 32'	1440
2	44	0.03372	0.51745	2052	444,4	109,1	5 8 1	26,8	43	2018
3	43 30	0.04974	0.52617	2493	666,7	162,2	6 23 7	39,4	42 30	2453
4	43	0.06521	0.53488	2854	888,9	214,3	7 25 2	51,7	42	2809
5	42 30	0.08017	0.54358	3164	1.111,1	265,3	8 23 1	63,5	41 31	3115
6	42	0.09404	0.55226	3438	1.333,3	315,3	9 16 8	74,9	41 2	3387
7	41 30	0.10863	0.56093	3685	1.555,6	364,2	9 55 7	85,8	40 32	3631
8	41	0.12217	0.56958	3906	1.777,8	412,0	10 55 9	96,4	40 2	3850
9	40 30	0.13527	0.57821	4110	2.000,0	458,7	11 42 4	106,6	39 32	4052
10	40	0.14796	0.58682	4299	2.222,2	504,4	12 27 3	116,4	39 6	4244
11	39 30	0.16024	0.59540	4474	2.444,4	548,9	13 11 1	125,7	38 33	4414
12	39	0.17212	0.60395	4637	2.666,7	592,2	13 53 7	134,6	38 5	4578
13	38 30	0.18364	0.61247	4789	2.888,9	634,5	14 35 3	143,3	37 35	4729
14	38	0.19480	0.62096	4933	3.111,1	675,5	15 16 1	151,6	37 5	4873
15	37 30	0.20561	0.62941	5068	3.333,3	715,4	15 56 2	159,6	36 35	5007
16	37	0.21608	0.63782	5195	3.555,6	754,1	16 35 6	167,1	36 6	5135
17	36 30	0.22623	0.64618	5316	3.777,8	791,5	17 14 3	174,2	35 37	5257
18	36	0.23606	0.65451	5430	4.000,0	827,9	17 52 5	181,2	35	5363
19	35 30	0.24561	0.66278	5539	4.222,2	862,9	18 30 1	187,9	34 37	5479
20	35	0.25485	0.67101	5642	4.444,4	896,7	19 7 2	194,1	34 7	5582
21	34 30	0.26382	0.67918	5740	4.666,7	929,3	19 43 8	201,2	33 39	5683
22	34	0.27252	0.68730	5834	4.888,9	960,6	20 19 9	205,1	33 5	5772
23	33 30	0.28095	0.69536	5924	5.111,1	990,7	20 55 7	210,8	32 40	5868
24	33	0.28914	0.70337	6010	5.333,3	1.019,5	21 30 9	216,0	32 11	5955
25	32 30	0.29707	0.71131	6091	5.555,6	1.047,0	22 5 7	220,8	31 12	6038
26	32	0.30477	0.71918	6170	5.777,8	1.073,2	22 42 7	225,3	31 12	6117
27	31 30	0.31224	0.72699	6245	6.000,0	1.098,2	23 14 0	229,5	30 43	6260
28	31	0.31962	0.73473	6318	6.222,2	1.121,8	23 47 7	233,3	30 14	6268
29	30 30	0.32651	0.74240	6386	6.444,4	1.144,1	24 19 3	236,8	29 45	6338
30	30	0.33333	0.75000	6452	6.666,7	1.165,1	24 53 5	240,0	29 16	6405
31	29 30	0.33995	0.75752	6516	6.888,9	1.184,8	25 25 8	243,2	28 47	6471
32	29	0.34637	0.76496	6577	7.111,1	1.203,1	25 57 7	245,7	28 16	6531
33	28 30	0.35266	0.77232	6636	7.333,3	1.220,1	26 29 1	248,4	27 51	6596
34	28	0.35864	0.77959	6693	7.555,6	1.235,8	27 0 1	250,7	27 19	6651
35	27 30	0.36451	0.78679	6748	7.777,8	1.250,1	27 30 8	252,7	26 50	6708
36	27	0.37019	0.79389	6800	8.000,0	1.263,1	28 1 1	254,5	26 21	6761
37	26 30	0.37571	0.80091	6850	8.222,2	1.274,4	28 30 7	255,9	25 51	6810
38	26	0.38106	0.80783	6899	8.444,4	1.284,9	29 0 0	256,5	25 23	6863
39	25 30	0.38628	0.81466	6946	8.666,7	1.293,8	29 28 9	257,8	24 54	6912
40	25	0.39128	0.82139	6991	8.888,9	1.301,3	29 57 6	258,3	24 24	6957
41	24 30	0.39616	0.82803	7034	9.111,1	1.307,5	30 25 5	259,1	23 55	7002
42	24	0.40089	0.83456	7076	9.333,3	1.312,3	30 52 9	258,9	23 26	7045
43	23 30	0.40547	0.84100	7117	9.555,6	1.316,0	31 19 9	258,7	22 57	7088
44	23	0.40991	0.84733	7155	9.777,8	1.317,8	31 46 6	258,5	22 29	7128
45	22 30	0.41421	0.85355	7193	10.000	1.318,5	32 12 7	258,1	22	7167
46	22	0.41838	0.85967	7229	10.222,2	1.317,8	32 38 3	258,1	21 32	7205
47	21 30	0.42241	0.86567	7264	10.444,4	1.315,7	33 3 5	256,5	21 2	7241
48	21	0.42632	0.87157	7297	10.666,7	1.312,3	33 28 0	255,3	20 33	7275
49	20 30	0.43010	0.87735	7330	10.888,9	1.307,5	33 52 1	253,8	20 4	7309
50	20	0.43376	0.88302	7361	11.111,1	1.301,3	34 15 8	252,0	19 35	7342
51	19 30	0.43730	0.88857	7390	11.333,3	1.293,8	34 38 4	250,7	19 6	7372
52	19	0.44072	0.89400	7419	11.555,6	1.284,9	35 1 3	248,5	18 37	7402
53	18 30	0.44402	0.89932	7447	11.777,8	1.274,7	35 23 4	245,9	18 8	7432
54	18	0.44721	0.90451	7474	12.000,0	1.263,1	35 45 1	243,6	17 39	7460
55	17 30	0.45029	0.90957	7500	12.222,2	1.250,1	36 6 0	240,8	17 10	7486
56	17	0.45326	0.91452	7524	12.444,4	1.235,8	36 26 3	237,8	16 43	7513
57	16 30	0.45613	0.91933	7548	12.666,7	1.220,1	36 46 3	234,5	16 13	7538
58	16	0.45889	0.92402	7571	12.888,9	1.203,1	37 5 5	231,0	15 44	7561
59	15 30	0.46154	0.92858	7593	13.111,1	1.184,8	37 24 4	227,2	15 15	7584
60	15	0.46410	0.93301	7614	13.333,3	1.165,1	37 42 4	223,3	14 46	7606
61	14 30	0.46655	0.93731	7634	13.555,3	1.144,0	38 4 5	219,1	14 17	7627
62	14	0.46891	0.94147	7653	13.777,7	1.121,6	38 18 0	214,7	13 49	7647
63	13 30	0.47118	0.94550	7671	13.999,9	1.098,1	38 33 4	210,3	13 20	7666
64	13	0.47334	0.94939	7689	14.222,2	1.073,2	38 49 2	205,1	12 51	7684
65	12 30	0.47542	0.95315	7706	14.444,4	1.047,0	39 0 7	201,1	12 22	7702
66	12	0.47741	0.95677	7722	14.666,6	1.019,5	39 18 1	194,8	11 53	7719
67	11 30	0.47930	0.96025	7737	14.888,9	990,7	39 33 4	189,3	11 25	7734
68	11	0.48111	0.96359	7752	15.111,1	960,6	39 46 6	183,6	10 56	7750
69	10 30	0.48282	0.96679	7766	15.333,3	929,3	39 59 9	177,6	10 27	7765
70	10	0.48445	0.96984	7791	15.555,5	896,7	40 2 1	171,4	9 58	7790
71	9 30	0.48599	0.97276	7803	15.777,7	862,8	40 23 9	165,0	9 30	7803
72	9	0.48746	0.97553	7815	15.999,9	827,8	40 35 9	158,4	9 1	7814

Ciò premesso, dividendo per la massa M le variabili in gioco, prendiamo in considerazione le sei quantità risultanti

$$(1) \quad i = \frac{F}{M} ; d = \frac{D}{M} ; r = \frac{R}{M} ; c = -v \frac{d\beta}{dt} ; a = \frac{dv}{dt} ;$$

che chiameremo *accelerazioni*; intendendo le prime quattro come dinamiche, cioè forze per unità di massa; e le ultime due come *cinetiche*, cioè nel comune significato di accelerazione normale e tangenziale.

Tracciamo ora con queste sei quantità il poligono A B C D E F A (fig. 3); dal quale si deduce subito, per il verso attribuito a ciascun vettore, che la



somma vettoriale delle due accelerazioni cinetiche a e c , cioè l'accelerazione totale b nell'istante t , risulta dalla somma vettoriale delle quattro accelerazioni dinamiche i, g, d, r .

Ciò conferma la complessità della trattazione analitica anche in questo caso semplificato; ma consente una sintetica visione del problema.

Proiettando infatti le indicate accelerazioni sulla tangente e sulla normale alla traiettoria si ottengono come equazioni simboliche del moto le due relazioni

$$(2) \quad \begin{cases} a = \frac{dv}{dt} = i \cos \varphi - r - g \sin \beta; \\ c = -v \frac{d\beta}{dt} = i \sin \varphi + d + g \cos \beta; \end{cases}$$

che nel mentre si prestano a guidare le computazioni numeriche della integrazione pedissequa, offrono la possibilità di osservazioni fondamentali sulle finalità del problema.

Assumendo pertanto il tempo come variabile indipendente e supponendo che F ed M ne siano note funzioni, giudiziosamente prestabilite dal costruttore, conosceremo subito il valore scalare $i(t)$ e il denominatore $M(t)$ delle grandezze aerodinamiche. D'altra parte $a(t)$ e $c(t)$ sono funzioni immediate di v e β ; mentre le forze aerodinamiche, come preciseremo in appresso, sono funzioni di v e di φ , nonchè della densità dell'aria, funzione dell'altezza e quindi indirettamente di v e β .

Cosicchè, noto $i(t)$ e le condizioni iniziali o finali del moto del baricentro, si tratta di esprimere in funzione del tempo i tre parametri φ, v, β ; mentre si hanno disponibili due sole equazioni. La terza sarà appunto prescelta secondo le finalità del calcolo che si vuole intraprendere.

Si può cioè prestabilire la traiettoria in funzione del tempo e quindi conoscere $v(t)$ e $\beta(t)$. In tal caso si ottiene dalle (2), passo passo, il parametro $\varphi(t)$; e, poichè $\varphi = \beta - \Theta$, come deducesi dalle figure 2 e 3, si ottiene in definitiva il parametro $\Theta(t)$, cioè la legge di *elevazione* dell'asse del missile durante la combustione; ma rimane determinata anche la legge $i(t)$.

Si può invece prestabilire, oltre alla legge $i(t)$, anche la legge $\Theta(t)$ che il pilota, o gli strumenti di pilotaggio, provocheranno durante la combustione; ed allora ne risulterà determinata passo passo la legge della traiettoria, purchè ne siano indicate le condizioni iniziali oppure finali.

Si può infine prestabilire la legge $\varphi(t)$, oltre alla $i(t)$; ottenendone contemporaneamente la legge di orientamento del missile e quella della traiettoria.

Di queste tre procedure la prima appartiene al problema *costruttivo* del missile; la seconda al problema del suo *pilotaggio*; la terza a entrambi, in quanto che ha lo scopo di disciplinare nell'attraversamento dell'atmosfera le azioni aerodinamiche.

Ma per chiarire questa essenziale distinzione giova a questo punto introdurre una nuova quantità vettoriale; che è stata ottenuta nella fig. 3 spostando parallelamente le due accelerazioni aerodinamiche d ed r , già segnate in CD e DE, sino a portarle in BT e TH; e poi sommandole con l'accelerazione dinamica i del missile. Si è così ricavato il vettore AH, che denomineremo σ , e che, sommato al vettore g , porta naturalmente al punto E della figura.

È evidente, così operando, che per ottenere le quantità cinetiche a e c basta ora considerare la nuova spezzata AHEFA al posto della precedente ABCDEFA; o in altri termini, invece di sommare con g le accelerazioni i, d, r , basta ora sommarvi la sola accelerazione σ , che le contiene implicitamente. Nè si tratta di un diversivo di procedura, come potrebbe a prima vista sembrare; perchè la nuova quantità così ottenuta ha consistenza fisica reale.

Infatti la quantità σ , che si ricava dividendo per M la *somma geometrica delle forze esterne, escluso il peso*, rappresenta l'accelerazione che sarà risentita in qualsiasi istante da qualsiasi massa del mobile che partecipi al suo moto e sia in condizioni di vincoli da poterla accusare. In particolare se questa massa è l'uomo, quale preconizzabile pilota o passeggero, la quantità σ corrisponderà al *peso apparente* cui esso dovrà soggiacere. L'uomo risulterà premuto verso le pareti in ragione dell'accelerazione σ anzichè della accelerazione g che esso risentiva sulla Terra. E ciò avverrà in grandezza e direzione.

Introducendo questa entità fisica ben determinata in Meccanica del Volo io adoperai alcuni anni or sono ⁽²⁾ il termine *sopportazione* (*endurance*); particolarmente adatto a indicare il tormento fisiologico del volatore nelle acrobazie aviatorie. Ho avuto poi recente occasione di adoperarlo in Missilistica per il moto verticale ⁽³⁾. Nel presente studio tuttavia, anzichè nel verso del peso apparente, il vettore σ sarà preso nel verso della accelerazione che lo provoca, in coerenza colle altre quantità del poligono delle accelerazioni.

La più discriminante conseguenza di questo punto della Meccanica razionale, ben noto ma poco notorio, si è che in realtà il vettore σ è la sola entità fisica misurabile in volo. Si perde cioè ogni nozione particolare dell'accelerazione g in valore e orientamento. E ciò avviene perchè nel moto spaziale, sia ascendente che discendente, la g induce sempre una componente di caduta libera *comune* a tutte le masse del mobile; cosicchè vengono a mancare quelle corrispondenti interazioni che rendono possibile la individuazione diretta delle forze di gravitazione. Alla g si sostituisce per ogni effetto la σ ; tanto che, cessato il getto attivo e fuori dell'atmosfera densa, cessa insieme qualsiasi segnalazione dinamica apprezzabile di forze esterne; ed il volatore rimane libero e senza peso.

Questo singolare fenomeno di *levitazione* totale si estende, per il volatore, agli organi interni della sua anatomia; cosicchè ne deriva l'esasperazione di quel senso antiperistaltico che caratterizza il *mal di mare* e che è ben conosciuto agli aviatori nelle *picchiate* e nei *vuoti d'aria*. Ma non bisogna drammatizzarlo; perchè il corpo umano è così ben congegnato che riuscirà ad allenarsi alla levitazione con semplici accorgimenti igienici e senza artificiose macchinazioni. Sarà un preciso compito della Igiene del Volo.

Più significativa, nel fenomeno della evanescenza di g , è l'impossibilità di individuarne direttamente la direzione ai fini del pilotaggio del missile. Ad un osservatore in viaggio nel missile si presenterà cioè, appena cessata la spinta del getto, un mondo apparente diverso da quello cui era abituato sulla Terra: potremo dire un *mondo senza verticale*. Il mondo della verticale era per lui, mi si consenta l'espressione ottica, un sistema *copernicano*: il missile girava attorno alla Terra. Il mondo senza verticale apparirà ora per lui un sistema *tolomaico*, come se la Terra girasse attorno al missile.

Invero la verticale dell'osservatore in partenza coincide fisicamente, nell'attuale metodo di lancio, con l'asse del missile. Subito dopo, a causa del *peso apparente*, la sensazione di questa verticale si rafforza e continua a rafforzarsi durante tutta l'attività del getto, anche se disturbata dal transitorio passaggio attraverso le azioni aerodinamiche. Cosicchè, spentosi il getto e scomparso il peso apparente, l'asse del missile rimane l'unico asse convenzionale di riferimento del missilista. Ad esso dovrà pertanto riferirsi la posizione della Terra e la indicazione di qualsiasi strumento destinato a precisarla artificialmente.

(2) Vedi G. A. CROCCO, *Equazione generale della gran volta in Aerotecnica*, nn. 1-2 e 9-10 del 1942.

(3) G. A. CROCCO, *La sopportazione fisiologica nei missili in Aerotecnica*. Numero speciale del 15 febbraio 1951.

Il giroscopio è lo strumento specifico per tale indicazione, se dotato di tre assi di libertà, grazie alla sua virtù di mantenere a lungo l'asse del proprio rotore nella posizione che aveva al momento in cui fu reso libero. Se quindi alla partenza fu orientato con l'asse del missile, predisposto verticalmente, il giroscopio manterrà parallelo questo orientamento durante il moto; ed apparirà girare rispetto all'asse del missile di un angolo eguale ed opposto a quello di cui gira nello spazio l'asse del missile. Su terra *piatta* ciò basterebbe a indicare la verticale in qualsiasi istante della combustione. Su terra *tonda* l'indicazione risentirà dello spostamento angolare della verticale terrestre rispetto a quella di partenza e dovrà quindi venir corretto con opportuna precessione strumentale. Tutto il pilotaggio nel mondo senza verticale non potrà per altro prescindere dal sussidio strumentale e dalla sua approssimazione; ed anche il valore scalare di g , che si assumerà come una *costante* numerica della strumentazione, dovrà comunque venir corretto con la quota del volo.

Tutto ciò premesso ritorniamo alla fig. 3 dalla quale siamo partiti e riferiamo all'asse del missile la nuova entità fisica σ , precisandone con $\hat{\sigma}$ l'angolo di *sbandamento*. Indichiamo inoltre con $\gamma = \pi/2 - \Theta$ l'angolo di cui ha rotato rispetto al missile l'indicazione della *verticale giroscopica*; e completiamo queste conoscenze con l'introduzione presuntiva del valore scalare di g . Otterremo in definitiva il triangolo AHE della fig. 3, che qui riproduciamo nella fig. 4 nel modo con cui apparirebbe al pilota; e che ci dà l'unica relazione vettoriale ottenibile in volo.

Come si vede in figura sono noti infatti di questo triangolo due lati, $AH = \sigma$ ed $HE = g$; nonchè l'angolo compreso, $AHE = \Gamma = \gamma + \hat{\sigma}$; cosicchè è implicitamente noto il terzo lato $AE = b$; cioè l'*accelerazione totale*; che risulta così individuabile per via strumentale. Ma non è possibile di conoscere direttamente le sue componenti a e c ; e quindi non è possibile ottenere per via diretta nè la velocità di volo, v , nè l'angolo di volo β .

Vi è un sol caso particolare che porta a conclusioni diverse. Quello nel quale b risultasse nulla ed il punto E venisse a coincidere col punto A. In tal caso si avrebbe $c = 0$ ed $a = 0$; cioè moto *rettilineo ed uniforme*: ed inoltre risulterebbe $\sigma = g$, in grandezza e direzione: cioè risulterebbe individuabile il *vettore gravità*, anche senza conoscere le forze aerodinamiche e propulsive. Anche l'angolo β risulterebbe determinabile direttamente. È quanto avviene nell'aeroplano in volo orizzontale, ascendente, o discendente; purchè rettilineo ed uniforme. Ma questo caso si può considerare eccezionale nell'ordinaria dinamica del missile.

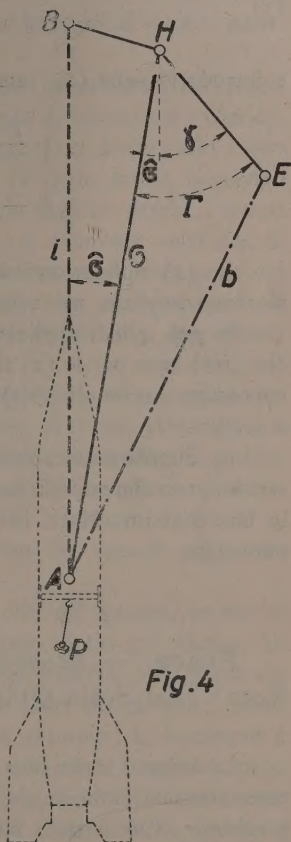


Fig. 4

Se tuttavia nel caso generale non si possono conoscere direttamente i parametri della traiettoria, è invece possibile di ottenerli indirettamente mediante integrazione analitica o grafica, sol che si conoscano le condizioni iniziali del volo: cioè $\sigma_0 = i_0$, in grandezza e direzione; nonchè β_0 e v_0 .

Basta all'uopo ricavare dal triangolo AHE le relazioni che definiscono σ , e cioè

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma \cos(\varphi + \hat{\sigma}) = i \cos \varphi - r; \\ \sigma \sin(\varphi + \hat{\sigma}) = i \sin \varphi + d; \end{cases}$$

e introdurre nelle (2), ottenendo

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \sigma \cos(\varphi + \hat{\sigma}) - g \sin \beta; \\ -v \frac{d\beta}{dt} = \sigma \sin(\varphi + \hat{\sigma}) + g \cos \beta. \end{cases}$$

Le (4) riproducono le (2) con eliminazione delle incognite d ed r , che risultano implicite nei valori strumentali di σ e $\hat{\sigma}$.

Si può quindi applicare alle (4) ancor più semplicemente il ragionamento che conduceva per le (2) alla determinabilità della legge $v(t)$ e $\beta(t)$ quando era conosciuta quella di $\Theta(t)$; essendo qui determinate le leggi strumentali $\sigma(t)$ e $\hat{\sigma}(t)$.

La dimostrazione può altresì venir condotta vettorialmente a mezzo di un rapido procedimento di integrazione grafica delle (2) o delle (4); che esporrò in una prossima Nota, insieme a indicazioni sulla strumentazione della legge di pilotaggio.

Fisica. — *Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli.*
Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

La velocità della luce o delle radioonde nel vuoto, c , è ritenuta una importante costante naturale che i fisici cercano di determinare, con sempre maggiore precisione. Ciò è stato fatto negli ultimi 15 anni, con metodi diversi, come quelli ottici, di risonanza elettromagnetica e col *radar*. Così, si è potuto stabilire il valore di c , in media, in 299.790,2 km/sec, con un errore probabile di una frazione di km⁽¹⁾.

Sembrerebbe dunque, che la precisione con cui si è potuto determinare c , dipenda dalla sempre maggiore perfezione dei metodi usati. Nulla ci impedirebbe perciò di credere che essa possa spingersi, in avvenire, oltre il milionesimo, sinora raggiunto.

(*) Presentata nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) L. ESSSEN, *Velocity of Light and radio waves*. «Nature», vol. 165, p. 582 (1950); *Proposed new value for the velocity of Light*, id., vol. 167, p. 258 (1951).

La relatività speciale di Einstein vuole, inoltre, che la costanza di c si verifichi anche per osservatori in moto, rispetto alla sorgente luminosa. Ed è noto, come questa ammissione porti alla strana ipotesi della contrazione dello spazio e della dilatazione dei tempi, accettata con tutta fiducia, da 46 anni, da matematici ed anche da fisici. Ora, se la teoria speciale fosse veramente attendibile e giusta, si dovrebbe inferirne la assoluta costanza di c , anche nel caso di osservatori in perfetta quiete, con la sorgente luminosa. E se tale fatto non si verificasse, ciò corrisponderebbe, in un certo modo, ad una menomazione di quella attendibilità.

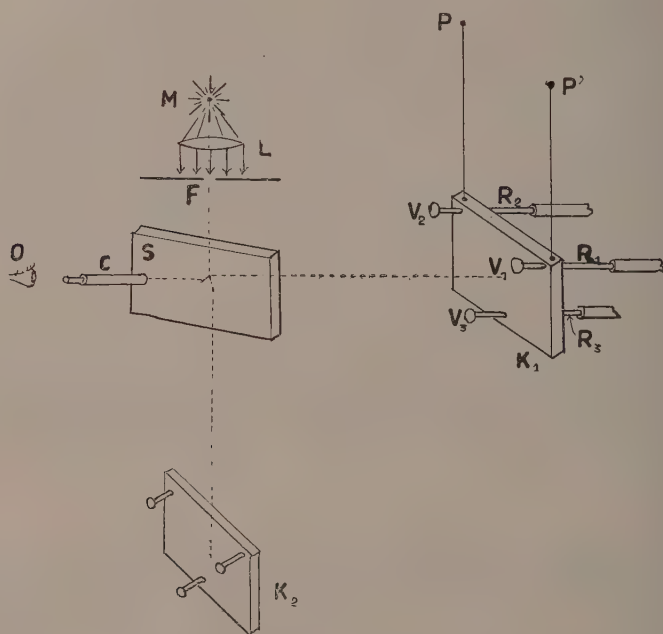
Prescindendo dalla teoria speciale, è da rilevare che l'abolizione dell'ipotesi eterea (corrispondente al risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, e, si noti, anche alla teoria quantistica dell'effetto fotoelettrico, dovuta allo stesso Einstein) toglie la necessità fisica di quella costanza. In certo modo, seguendo l'ipotesi corpuscolare della luce, non vi sarebbe plausibile ragione perchè i quanti energetici, non legati ad un ipotetico mezzo esteriore, si muovano tutti con la stessa velocità. Può sospettarsi, infatti, che gli svariati modi che la natura ci offre, per la generazione della luce, e le contingenze con cui ne avviene la trasmissione, possano occasionare qualche variabilità nei valori di c , per quanto piccola.

Guidato da tali considerazioni, ho intrapreso da qualche anno, ricerche sperimentali per controllare se effettivamente la costanza di c sia perfettamente rigorosa. Naturalmente, nel cercare di realizzare un simile controllo, ci si deve limitare a vedere se qualche differenza esiste, in due casi diversi di trasmissione luminosa, senza tentare di stabilire, in ciascuno di essi, il preciso valore di c . Infatti, non si potrebbe, con ciò, superare la precisione dei metodi più sopra richiamati.

Fra le vie da me seguite, nel ricercare un controllo del genere, ve ne ha una che mi ha fornito interessanti risultati, e sulla quale voglio qui riferire. La riflessione metallica della luce è dovuta, secondo ogni probabilità, alla emissione di energia raggiante da parte degli elettroni cosiddetti *liberi* dei metalli; questi restituirebbero così, le radiazioni incidenti ricevute ed assorbite. Il fenomeno è legato alle caratteristiche (diverse da caso a caso) di tali corpi; e sembra poco probabile che costituisca una peculiare proprietà degli elettroni, indipendentemente dalla materia a cui normalmente sono legati. Fra tali caratteristiche, possono considerarsi: la conducibilità elettrica (o calorifica), il potenziale elettrico, le qualità magnetiche, e forse anche il peso atomico o la densità. Confrontando due differenti metalli, dal punto di vista della capacità di riflettere la luce, si potrebbe sperare di verificare se c sia veramente costante.

Ho reso possibile una simile ricerca, mediante una opportuna modificazione dell'interferometro di Michelson. Essa si basa sul concetto di rendere sostituibile uno degli specchi estremi di tale interferometro (con braccia uguali) *senza occasionare, con ciò, spostamenti nelle frangie osservabili*. Ecco come è disposto un simile interferometro. La luce proveniente da una sorgente M (ved. figura), resa parallela da una lente L, limitata da uno schermo con piccolo foro F, battendo sullo specchio semiargentato S, è in parte riflessa sullo specchio K_1 , e va, in parte,

sull'altro K_2 . Per l'aggiustaggio di K_1 e K_2 , l'occhio O , mediante il cannocchiale C , osserva frangie d'interferenza localizzate, di opportuna conformazione. Ciò è possibile, lavorando con le viti micrometriche di K_1 e K_2 e con la lunga vite (non segnata in figura) occasionante lo scorrimento di K_2 , sulla alidada collegante S e K_2 (anch'essa non segnata). Lo specchio K_1 , costituito da una lamina di vetro o di quarzo, delle dimensioni di $8 \times 8 \times 0,5$ cm, è sospeso a due punti fissi (solidali col sostegno di K_1) P, P' . La lamina viene così a trovarsi con la sua faccia anteriore volta verso S , in dolce contatto con le estremità arrotondate delle tre rigide viti, di ottone, micrometriche V_1, V_2, V_3 , le cui



madreviti (non segnate) sono solidali col sostegno. Tre sottili bastoncini di legno, R_1, R_2, R_3 , spinti da delicate molle di ottone, assicurano il contatto fra K_1 e le viti predette. I tre specchi S, K_1, K_2 , con i loro accessori, sono fissati su due assi, collegati ad angolo retto (non segnati), di legno robusto (sezione 12×12 cm), della lunghezza di 2 metri ciascuno. Lasciando S sempre sul vertice dell'angolo retto, si possono portare, con opportuna manovra, gli specchi K_1, K_2 , sino a 186 cm di distanza da S , sulle due braccia.

Il descritto dispositivo permette così, di rimuovere lo specchio K_1 , con la sospensione P, P' , ed eventualmente di ricollocarlo nella sua primitiva posizione, senza occasionare spostamenti del suo piano. Si dice ciò, nell'ipotesi che lo specchio sia perfettamente piano, e perchè, nel ricollocare lo specchio, i punti di contatto con le viti sono certamente cambiati. Realmente io non ho mai potuto disporre di lamine di vetro, lavorate perfettamente (a meno di $1/10$ di λ).

Ho, in certo modo, supplito a questa mancanza, usando a turno 3 lamine di quarzo, delle accennate dimensioni, di cui disponevo sin dal 1924, per averle commissionate, per altre ricerche, alla Casa Fuess. Anche esse però non sono lavorate con perfezione ottica. Col descritto dispositivo, mi sono accorto infatti che, tra le sei faccie di tali lamine, si scorgono differenze tra le posizioni delle frangie osservabili, che vanno da 0,5 a 3,5 di esse. Ho trovato però modo di prescindere da simile imperfezione, anche perchè, per tali buone lamine di quarzo, non ha influenza alcuna l'inevitabile detta incertezza della posizione dei punti di contatto, con le viti.

Le facce delle lamine vengono a turno ricoperte da depositi sottili di metalli o metalloidi, diversi da caso a caso, ottenuti per volatilizzazione a caldo, nel vuoto. Lo spessore di tali strati si aggira intorno ad una piccola frazione di micron; salvo il caso del silenio, che, essendo abbastanza trasparente in rosso-rubino, deve avere lo spessore da 5 a 10 micron, per riflettere sufficientemente la luce.

Se ora, con l'indicato dispositivo, si confrontano due superficie di sostanze differenti, usando luce monocromatica (sodio o mercurio), non è possibile riconoscere quale spostamento di frangie abbia avuto luogo. Infatti, tale spostamento è spesso superiore ad una frangia intera. Si rimedia a ciò, usando luce bianca. Come è noto, allora, per la esatta uguaglianza delle braccia dell'interferometro, si scorgono frangie⁽²⁾, la cui centrale è nera (ordine zero), ossia acromatica. Le altre frangie hanno le colorazioni degli anelli di Newton. Perchè ciò avvenga con nettezza e simmetria, occorre usare una lamina compensatrice (non segnata) che abbia lo stesso spessore e qualità del vetro di S, e sia, a questo, rigorosamente parallela. L'esame di tali frangie colorate, computato nelle sue colorazioni rosse o rosa, permette di apprezzare gli spostamenti che si verificano da un caso all'altro, esprimendoli in numero di frangie, di circa 0,7 micron di lunghezza d'onda. Si nota che, sia a destra che a sinistra della frangia centrale nera, si possono contare sino a sei o sette frangie, man mano meno marcate.

Ora, l'esame delle frangie osservabili con superficie o facce delle lamine differenti, non può avere significato preciso od interessante. Infatti, esso deve dipendere da cause diverse e propriamente: in primo luogo, dalla imperfetta lavorazione delle lamine di quarzo; ma poi, anche, dallo spessore della pellicola metallica (alquanto variabile, da caso a caso, perchè non vi ha modo di regolare nel vuoto, il regime di volatilizzazione della sostanza); dal fatto per cui lo spessore di uno stesso strato può essere lievemente variabile, da punto a punto della superficie (in causa di dissimmetrie nella posizione del fornello di volatilizzazione); da eventuale differenza di fase della luce riflessa, dovuta alla varia natura delle sostanze usate; ed infine, dall'effetto di cui si va in cerca.

Si possono rimuovere tutte queste difficoltà, eseguendo due volte l'esame od il confronto tra due diverse superficie riflettenti, servendosi pur sempre dell'interferometro con braccia eguali, ma di lunghezze diverse, l ed l' , nei due casi.

(2) Cfr. C. R. MANN, *Manual of advanced Optics*, p. 58, Chicago, 1902.

Così, le due osservazioni che si fanno, sono nelle stesse condizioni, e se mai si ha da fare con l'ultima delle accennate possibilità. Esaminiamo che cosa debba avvenire, così operando. Suppongasi di fare osservazioni, dapprima, con una lunghezza di braccia l . In tali condizioni, il confronto tra due facce ricoperte da sostanze diverse, dia uno spostamento Δ , tra le posizioni della frangia centrale nera. Questo spostamento è rilevabile col reticolo micrometrico del cannocchiale C, ed è espresso, come si è detto, in unità di 0,7 micron di lunghezza. Si ripetono le stesse operazioni, per una lunghezza delle braccia dell'interferometro, diversa, l' . Seguendo le teorie sinora ammesse (relatività compresa), in queste nuove condizioni si dovrebbe trovare ancora lo stesso valore Δ . Per vero, vi potrebbe essere una ragione, per dubitare di ciò. Infatti, sperimentando con le due lunghezze diverse l ed l' , il cannocchiale C della figura può puntare località non identiche dei due specchi K_1, K_2 . Potrebbe darsi così che, sia per la detta imperfetta lavorazione delle facce, sia perchè i raggi incidenti potrebbero avere diversa inclinazione nei due casi, qualche spostamento di frangie fosse osservabile. A rimuovere tale dubbio, si avverte che nelle varie esperienze, mediante due schemi con foro centrale di 1 cm, posti quasi a contatto con i due specchi, si viene a limitare la regione utile degli specchi stessi: nei due casi i raggi luminosi, percorrenti le due braccia, hanno così i percorsi in parte coincidenti. Rimane la questione di sapere se, in causa dei diversi ingrandimenti, che il cannocchiale C deve avere, per puntare regioni a distanze diverse, possa intervenire qualche perturbazione. Ma ciò è da escludersi, perchè si tratta di frangie localizzate, proprio sulla superficie degli specchi.

Se nelle due osservazioni compiute, alle due distanze l ed l' da S, si osservano spostamenti di frangie diversi Δ e Δ' , l'unica ipotesi possibile che si può avanzare è che la luce riflessa dallo specchio K_1 , abbia, nei due casi, velocità diversa. In particolare, ammettiamo che i detti spostamenti Δ e Δ' si riferiscano alle due sostanze A ed A', con cui sono ricoperti gli specchi. Se si constata che allungando a mano, la distanza l , a cui si trova lo specchio K_2 da S, si ha uno spostamento di frangie a destra nel reticolo (che vogliamo chiamare positivo), e se $\Delta' > \Delta$, la differenza $\Delta' - \Delta$ deve corrispondere ad un allungamento virtuale del braccio SK_2 , qualora si ammetta che $l' > l$. Realmente, nell'usare la sostanza A' (che occasiona lo spostamento Δ'), non si è occasionato alcun allungamento di SK_2 . Basterebbe però che, invece, si fosse scorciato SK_1 (infatti se anche SK_1 si fosse allungato, nessuno spostamento di frangie sarebbe osservabile). Ma realmente nemmeno SK_1 si è scorciato. Rimane dunque il fatto, per cui lo spostamento $\Delta' - \Delta$ sta ad indicare che nel braccio SK_1 , quando sia la sostanza A' a riflettere la luce, entra un minor numero di lunghezze d'onda, per dar luogo all'osservato spostamento $\Delta' - \Delta$. Perchè sia giustificata tale conclusione, non si può che ammettere, come si diceva, che la luce riflessa da A' abbia maggior velocità, di quella riflessa da A. Si vede facilmente, che, detta λ la lunghezza d'onda scelta come misura degli spostamenti Δ , l'incremento di velocità della luce riflessa da A', è dato da:

$$p = \frac{c(\Delta' - \Delta)\lambda}{l' - l}.$$

Passo ora a dire dei risultati sperimentali, ottenuti applicando i precedenti criteri. Per ragioni costruttive dell'apparecchio da me realizzato, ho scelto $l = 16$ cm ed $l' = 186$ cm. Ho così sperimentato dapprima con alluminio, argento, oro ferro. I primi tre di questi metalli, foggiate in fili di circa 0,2 mm di diametro, oppure in piccoli frammenti, sono avvolti su fili di tungsteno di 0,25 di diametro, o posti in crogioletti di molibdeno. Con corrente da 10 a 25 amp., vengono portati alla fusione e volatilizzazione, al disotto della lamina di quarzo, nel vuoto (distanza 6 o 7 cm). Per il ferro, se ne ottiene la volatilizzazione, arroventando fili di 1 mm di diametro, al rosso-aranciato spinto. L'operazione dura da pochi minuti, nel caso di alluminio, argento, oro, a circa un'ora, per il ferro.

Ho adoperato coppie di tali metalli depositi separatamente, sulle due facce della stessa lamina di quarzo. E propriamente, mi son servito di Al-Ag, Al-Au, Al-Fe. È stato inutile preparare le altre tre combinazioni di questi quattro elementi, perchè dai risultati ottenibili con quelle segnate, si possono dedurre quelli ottenibili per le altre. Per questi metalli, e per ogni coppia segnata, ho compiute moltissime osservazioni, portando più volte, alternativamente, le braccia dell'interferometro ai due valori indicati. Ogni volta, dopo aver ottenuto le frangie colorate in luce bianca (per il che occorre lavorare un'intera giornata) si susseguono 20 o 30 letture di posizioni di frangie. Così, nelle medie, viene ad essere quasi garantito il valore di Δ entro 1 o 2 centesimi di frangia. Debbo dire, che per vero, mentre il valore di Δ risulta variabile da coppia a coppia, nessuna differenza, superiore ai possibili errori di osservazione, si ha passando da l a l' o viceversa. In altri termini, per le coppie scelte tra i metalli Al, Ag, Au, Fe, il valore della differenza $\Delta' - \Delta$, è risultato praticamente nullo. Forse, un valore, lievemente diverso da zero, potrà trovarsi, disponendo di mezzi più perfezionati.

Il precedente risultato negativo costituisce però una prova, della giustezza dei criteri, su cui la ricerca si appoggia. Per cui, se un effetto si fosse manifestato, con i metalli indicati, lo si sarebbe rilevato. Io ritengo però che, in conseguenza del principio di causalità, tale effetto debba pur esistere; ma esso è tanto piccolo, da sfuggire ai mezzi di osservazione sinora impiegati.

Ma ad un altro risultato negativo, voglio ancora accennare. Avendo usato depositi di ferro, ho voluto ricercare se l'azione di un campo magnetico potesse dar luogo ad un eventuale spostamento di frangie. Tale esperienza si realizza facilmente, ponendo dietro la lamina K , ricoperta di ferro (la parte posteriore lo è di alluminio), un elettromagnete, avente una faccia polare piana, circolare, di 5 cm di diametro. Essa risulta così a circa 0,6 cm dalla pellicola di ferro. Osservate le frangie, anche solo monocromatiche (di sodio o di mercurio), cerco di sorprendere il sospettato spostamento, con l'eccitare l'elettromagnete. Questo dà un campo dell'ordine da 5 a 10 mila oersted. L'effetto manca del tutto. Si hanno soltanto delle perturbazioni transitorie, dovute a correnti indotte, sulle armature di ottone dell'interferometro, e nessuna azione magnetica sul ferro (in causa della sua estrema sottigliezza). Tali perturbazioni rimangono inalterate, rovesciando la lamina, cioè affacciando allo specchio S , l'alluminio, anziché il

ferro. Usando frangie molto larghe (manovrando le viti degli specchi), facendole passare cioè da rettilinee a curve (circolari, ellittiche, polari od iperboliche), si apprezza che la mancanza di effetto magnetico va sino ad $1/100$ di frangia, od anche meno. L'esperienza è particolarmente sensibile, perchè questa volta, per ricercare il sospettato effetto, non vi ha bisogno alcuno di rimozione della lamina. Una traccia di azione permanente del campo, sulla posizione delle frangie si ha (meno di $1/100$ di frangia), tanto col ferro che con l'alluminio; ma essa deve esser causata da para o diamagnetismo dei supporti.

Che l'effetto ricercato (corrispondente alla formula data) manchi del tutto, è stato rilevato per i detti metalli, aventi caratteristiche diverse: dall'alluminio all'oro (differenti potenziale elettrico, peso atomico, densità; conducibilità poco diversa), ed al ferro (differenti proprietà magnetiche). Probabilmente, nelle indicate condizioni, molti altri metalli avrebbero confermato tale mancanza di effetto. Ma è ora assai interessante rilevare, che altri elementi chimici, presentanti caratteristiche metalliche meno accentuate, diano, in modo che appare quasi sicuro, una traccia sensibile del ricercato effetto. Accenno così ad ulteriori esperimenti eseguiti con antimonio, bismuto, selenio. Esperimenti con tellurio, hanno ancora dato risultato negativo. Tutte queste sostanze possono venire facilmente depositate su K_1 , mediante riscaldamento di un crogiuolletto di quarzo fuso, che di volta in volta li contiene. Antimonio, bismuto, tellurio danno depositi splendidi, confondibili, per un sommario esame, con argento od alluminio. Per il selenio, ho già accennato che bisogna accontentarsi di depositi più spessi, di aspetto non veramente metallico, ma tuttavia capaci di lasciare osservare ancora le frangie. Costituendo le coppie Al-Sb, Al-Bi, Al-Te, Al-Se, ho potuto constatare i seguenti valori per $\Delta' - \Delta$, intendendosi che il secondo elemento di ciascuna coppia dà luogo al valore positivo indicato:

Antimonio, $\Delta' - \Delta = + 0,28$ frangie, $p = + 34$ metri

Bismuto, $\Delta' - \Delta = + 0,1$ frangie, $p = + 12$ metri

Tellurio, $\Delta' - \Delta = 0,0$ frangie, $p = 0$ metri

Selenio, $\Delta' - \Delta = + 0,19$ frangie, $p = + 23$ metri

Nella terza colonna, sono riportati i valori di p , calcolati con la formula già scritta. Come si è già detto, il valore p positivo, corrisponderebbe al fatto per cui la velocità della luce, riflessa dal secondo metallo di ciascuna coppia è alquanto maggiore, per una quantità dell'ordine di $1/10.000.000$ di quella corrispondente al primo. I riportati risultati rappresentano le medie o meglio i massimi di numerose osservazioni. Si dice così, perchè mentre col selenio, le misure eseguite sono abbastanza concordanti, per l'antimonio ed il bismuto, talvolta l'effetto è più piccolo o manca del tutto. Ciò può forse dipendere da incontrollabili differenze, fra le varie preparazioni dei depositi.

Le eseguite esperienze porterebbero perciò ad ammettere un piccolissimo effetto, che corrisponderebbe ad una altrettanto piccola variabilità di c . Ma se si

deve ammettere tale fatto, ne deriva in modo indiscutibile, la inconsistenza della asserita costanza di tale grandezza e del secondo postulato della relatività di Einstein. A tale conclusione ero già pervenuto mediante le considerazioni svolte precedentemente (3). E con le ricerche sperimentali ora riassunte, ho cercato di fornire la prova diretta della giustezza di quelle considerazioni. A parte ciò, il metodo indicato offre la possibilità di studiare sperimentalmente e risolvere con sicurezza, un problema che concerne la base di una teoria che tanto credito ha finora riscosso. Ciò sarà meglio possibile, usando apparecchi più perfezionati dei miei, specialmente per quanto concerne la perfetta lavorazione degli specchi. Una simile disponibilità non è stata a me sinora concessa.

Ringrazio vivamente il Collega prof. Giorgio Valle, per la cortese ospitalità offertami, da più anni, nell'Istituto fisico «Augusto Righi» di Bologna, da lui diretto. Tale ospitalità mi ha permesso di tradurre in atto le ricerche ora riassunte.

Geologia. — *Sull'origine e i viaggi delle ofioliti alpine.* Nota (*)
del Socio GAETANO ROVERETO.

Mi riferisco a quel gruppo delle ofioliti alpine, dette altrimenti *pietre verdi*, di età liassica, che dalle Alpi proprie passano a formare l'Appennino Ligure Occidentale, il quale è una continuazione tettonica delle Alpi stesse. Per far ciò mi valgo delle deduzioni e dei metodi che ho introdotti per trattare delle ofioliti della Penisola, di età titonico-cretacea.

Per procedere in questo esame non è da invocarsi la distesa di laccoliti sottomarine, nè la funzione geosinclinalica di un affondamento attingente nel sima, nè orogeni locali, ossia manifestazioni sino alla superficie di una tettonica di fondo (sono queste le ultime tre ipotesi avanzate per discutere il problema); ma si può continuare nel porre come punto di partenza il fatto dell'*autometamorfismo per idratazione* delle serpentiniti, e il viaggio di queste *per estrusione*.

La diversità cronologica fra le due formazioni ofiolitiche non è molta, eppure le differenze che fra loro intercedono si riconoscono ben marcate.

Sono diversità di composizione, di struttura, di giacimento, precipuamente dovute a che la *cortecia paramagmatica*, nei tempi liassici, e a grande profondità, ha subito un *allometamorfismo* anteriore alle idratazioni. Per questo le ofioliti alpine sono comprese nei metamorfici calcosericitoscisti o calcescisti; le ofioliti della Penisola fanno parte del più antico livello del *flysch* scistoso e argilloso, solo che consolidato, e rimasto quasi superficiale.

(3) Ved. questi «Rendiconti», vol. IX, p. 216, e le citazioni ivi contenute.

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1951.

Le ofoliti liassiche hanno subito due tempi di tensioni, l'uno precedette i movimenti orogenici del paleogene, l'altro fu il movimento orogenico stesso; inoltre, essendo la prima cinemasi avvenuta in ambiente molto profondo, fu accentuata nelle sue manifestazioni da condizioni di temperatura e di carico che dopo più non si verificarono.

In questa successiva manifestazione di fenomeni, furono iniziali delle differenziazioni basiche e ultrabasiche, che il metamorfismo ridusse subito a rocce scistoso-cristalline (scistosità elementale o listata): sono scisti pirossenici, anfibolici, eclogitici, gabbri, molto basici.

Nel contempo, alle azioni calorifiche e cinematiche si associò lo sviluppo - e questa è la mia teoria - di *intumescenze*, che si sollevarono dalla corteccia paramagmatica di natura peridotica e allumo-pirossenica-anfibolica che si idratò, e si originarono serpentine, antigoriti, prasiniti, gabbri albitici, fra le quali rocce solo le serpentine peridotiche si hanno anche nel titonico-cretaceo, mentre le altre sono sostituite da diabasi uralitizzati o spiliti, e da gabbri saussuritici.

Con l'idratazione ebbe inizio un secondo gruppo di fenomeni tettonici e petrogenetici: le intumescenze paramagmatiche cominciarono il loro viaggio nella corteccia sedimentizia, e non poterono più avere proprietà eruttive, ma solo estrusive, per la manifestazione di tensioni che le spinsero verso la zona di minor resistenza, ossia verso l'esterno.

Ma questa estrusione, costituita da materiale autometamorfico per idratazione, non viaggia sola, poichè continua sui suoi margini l'iniezione di rocce eruttive franche (peridotiti, gabbri, granatiti, ecc.), e si forma così tutto un insieme poligenico, la cui determinazione si arresta quando le intumescenze si staccano dalla zona paramagmatica, e si interrompono e si occludono le vie di iniezione. È allora che l'insieme ofiolitico viaggia isolato nella corteccia sedimentizia (la quale nel contempo si metamorfizza), ed è di varia importanza, e di varia forma, a seconda che le intumescenze sono più o meno notevoli e ripetute.

Si può dire che i grandi ammassi furono le intumescenze principali, e che i minori furono delle pustole secondarie, avendosi in più delle lenti e lamine di prasiniti e di serpentiniti, staccatesi come scaglie dagli ammassi principali durante l'ascesa, e che ora sono sperdute nei calcosericitoscisti, alla stessa maniera di quanto si verifica per le ofoliti del titonico-cretaceo.

Si arriva così ad una terza tappa: la massa ofiolitica, deve ancora compiere un tragitto di una ventina di chilometri per giungere alla corteccia della zona esterna. Tutto fa credere, che si trattò di un commovimento generale della corteccia, preludio del periodo orogenico alpino. A otto-dieci chilometri di profondità, le ofoliti entrano nei sedimenti liassici, nel contempo che questi si metamorfizzano e diventano i calcosericitoscisti.

Dopo ciò, i veri e propri movimenti di estrusione cessano, ma perdurano le azioni mineralogeniche, in gran parte metasomatiche, della zona esterna, e ciò sino al periodo orogenico alpino, durante il quale si accentuano, per attenuarsi dopo: si ha così un terzo insieme *postestrusivo*, dal lias al paleogene.

Nel seguente prospetto è in maniera schematica riassunto quanto si è detto:

Gruppo prestrusivo (liassico)	{ eclogiti, pirosseniti augitiche, anfiboliti orneblendiche, in banchi;
Gruppo sinestrusivo (liassico)	{ insieme autometamorfico delle serpentiniti (serpentina, antigorite), prasiniti e gabbri albitizzati, in ammassi e lenti; iniezioni periferiche negli ammassi autometamorfici: peridotiti, gabbri franchi, anfiboliti attinolitiche, glaucofaniti, epidositi, clorititi a magnetite, granatiti, in ammassi, lenti, filoni e vene;
Gruppo postestrusivo (dal lias al paleogene)	{ Silicizzazioni, limonitizzazioni, talcitizzazioni, cloritizzazioni, in patine, losime, ganghe e cementazioni varie, per opera della circolazione di acque vadose mineralogeniche, favorita dalla cataclasi, milonitizzazione e simili.

I movimenti tangenziali di verso la fine del periodo orogenico alpino cambiano molto le condizioni tettoniche dell'estrusione, e in più casi si deve affrontare questo problema: le nostre ofioliti sono in falda oppure in pieghe radicate?

Date le grandissime dimensioni, fra le massime, dei due massicci serpentinosi in cui si divide la zona delle pietre verdi liguri, ho già ripetutamente avanzato il dubbio, che questi due massicci siano radicati, ossia che si trovino sul luogo della loro estrusione: ora dò una soluzione del problema con questa nuova considerazione.

La zona dei calcosericitoscisti di Voltri-Rossiglione, che separa i due massicci serpentinosi liguri, è un anticlinale, per il quale affiorano le quarziti del trias inferiore; il resto dovrebbe quindi essere in zona sinclinale. Inoltre, per l'epirogenesi postoligocenica i due massicci si sono inarcati, conformemente a quanto è avvenuto ai loro lati, rispetto alla Falda del Gran San Bernardo a ponente, e alla Falda Ligure-Toscana a levante, con la determinazione dello spartiacque appenninico; quindi, i due massicci, per aver permesso tale inarcamento, non devono avere radici molto profonde, devono quindi essere anche loro in falda, far parte della Falda del Monte Rosa; in caso contrario sarebbero rimasti rigidi rispetto al rigonfiamento epirogenico.

Per meglio documentarsi su quanto ho ora detto, si consultino la particolareggiata descrizione del *Massiccio delle Pietre Verdi Liguri*, da me fatta in *Liguria Geologica* (Roma 1939), e il mio Rilievo Geologico al 1:100.000 del foglio Genova esistente nelle Cartoteche dell'Ufficio Geologico Nazionale in Roma e nell'Istituto Geologico dell'Università di Genova.

Chimica analitica. — *Un micrometodo per la determinazione in serie degli alogeni nei composti organici*^(*). Nota di STANLEY JOHN PIRT e ERNST BORIS CHAIN, presentata^(**) dal Socio E. B. CHAIN.

I principali metodi per la determinazione degli alogeni nei composti organici sono:

1° Combustione con acido nitrico in presenza di nitrato d'argento e determinazione ponderale dell'alogenuro d'argento.

2° Combustione a secco con produzione di alogeno libero che può essere determinato per via ponderale o volumetrica.

3° Fusione con potassio e determinazione volumetrica dell'alogenuro ionizzato.

Gli autori si sono imbattuti nel problema di dover seguire, a frequenti intervalli di tempo, la sorte metabolica dei composti contenenti alogeni nei microorganismi. A questo scopo i metodi 1° e 2° sono stati trovati troppo lunghi

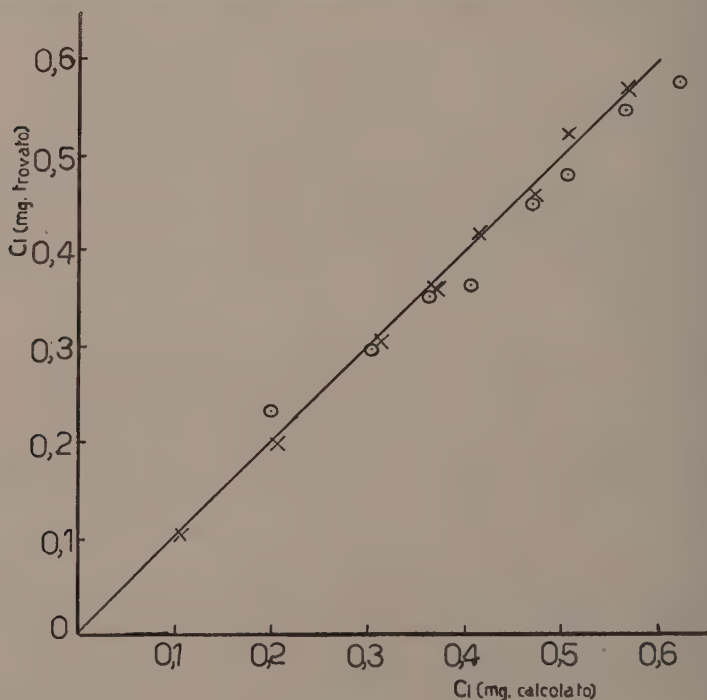


Fig. 1. — Determinazione di cloro.

× Acido o-cloro-benzoico (metodo argentometrico);

○ Acido o-cloro-benzoico (metodo di Conway).

La linea intera rappresenta il valore teorico.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Biologica dell'Istituto Superiore di Sanità, Roma.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

e complicati, mentre si sono incontrate difficoltà, nel metodo della fusione con potassio, nel portare la totalità della sostanza organica in intimo contatto con il potassio stesso. È stato quindi ideato il seguente diverso metodo che permette la rapida determinazione in serie di piccole quantità di alogeni nei composti organici (da 1,5 a 15 micromole).

Il composto contenente alogeno è sottoposto alla combustione in tubi chiusi con acido nitrico fumante in presenza di nitrato d'argento. Il precipitato è raccolto

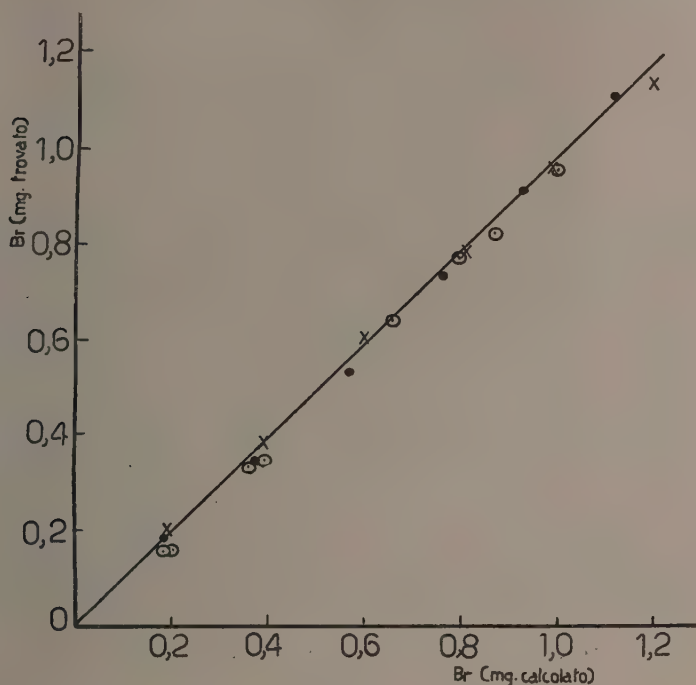


Fig. 2. - Determinazione di bromo.

- Acido bromo-terefthalico (metodo argentometrico);
 - × p-bromo-fenilacetato di potassio (metodo argentometrico);
 - p-bromo-fenilacetato di potassio (metodo di Conway).
- La linea intera rappresenta il valore teorico.

per mezzo di centrifugazione nel tubo stesso di combustione, e sciolto in acqua per aggiunta di una sostanza che forma un complesso solubile con i sali d'argento (idrato di ammonio nel caso di cloruro e bromuro, cianuro di potassio nel caso di ioduro). Il complesso argento-alogeno viene ridotto (con idrato di idrazina nel caso di cloruro e bromuro e con polvere di zinco nel caso di ioduro) ad argento metallico e alogeno ionizzato. L'argento metallico precipita e lo ione alogeno rimane in soluzione acquosa⁽¹⁾.

(1) Quando questo lavoro era già compiuto è giunto a conoscenza degli autori un articolo di Iwantscheff [« Angew. Chem. », 62, 361 (1950)] in cui analoghi principi sono stati applicati alla determinazione di tracce di cloruro nel selenio.

La quantità dell'alogeno presente può essere stabilita sia con una determinazione volumetrica dell'argento metallico precipitato, dopo averlo sciolto in acido nitrico, sia con una diretta titolazione dell'alogeno ionizzato. La determinazione dell'argento e dell'alogeno ionizzato può essere effettuata con qualunque dei comuni metodi di titolazione. Gli autori hanno preferito, per la determinazione dell'argento, un metodo potenziometrico con l'impiego di un elettrodo di riferimento a vetro e

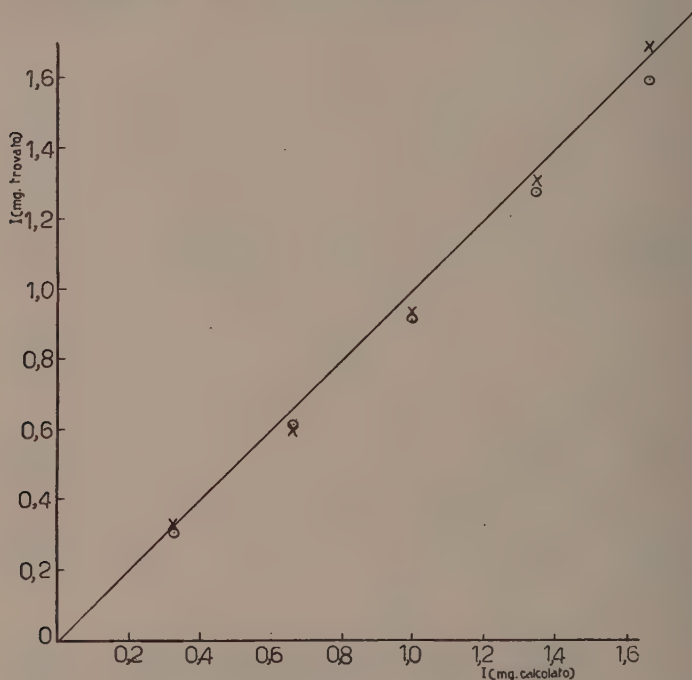


Fig. 3. - Determinazione di iodio.

× iodio-acetato di potassio (metodo argentometrico);

○ iodio-acetato di potassio (metodo di Conway).

La linea intera rappresenta il valore teorico.

di un millivoltmetro elettronico a lettura continua⁽²⁾ e per quella dell'alogeno ionizzato, i metodi di diffusione di Conway⁽³⁾.

Risultati dell'applicazione di questi sistemi sono riportati nei diagrammi 1, 2, e 3. I risultati più accurati si sono ottenuti col metodo argentometrico. Il procedimento di Conway dà talvolta valori più bassi tuttavia ha il vantaggio di permettere la misura diretta di ciascun degli alogeni (cloro, bromo, iodio) in presenza degli altri due.

(2) L. LYKKEN e F. D. TUEMMLER, «Industr. Engng. Chem. (Anal. ed.)», 14, 67 (1942).

(3) E. J. CONWAY, *Microdiffusion Analysis and Volumetric Error*, London; Crosby Lockwood.

Fisiologia. — *Fenomeni elettrici di facilitazione nel tetano cardiaco.* (Considerazioni sul meccanismo delle reazioni graduate nel muscolo striato) (*). Nota (**) del Corrisp. IGINO SPADOLINI.

Esponendo le ricerche compiute in questo Laboratorio⁽¹⁾ sul tetano del miocardio ventricolare di *bufo vulgaris* venne fatta menzione di un particolare fenomeno elettrico di facilitazione o di avviamento che è apparso poi meritevole di più approfondito studio. Le ricerche illustrate dalla presente Nota ci hanno indotto a prospettare alcune ipotesi di lavoro sul significato di questo fenomeno di facilitazione, rivelatoci dalle modificazioni cui va incontro il potenziale di azione (p. d. a.),

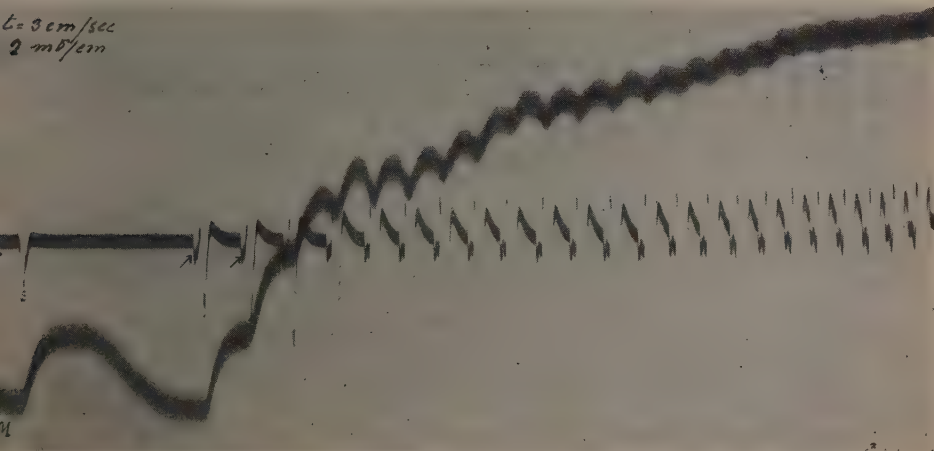


Fig. 1. — Fenomeni elettrici di facilitazione nella contrazione tetanica del miocardio (preparato ventricolare isolato di *bufo vulgaris* in liquido di Ringer ipercalcico). Modificazioni presentate dai potenziali di azione (persicronia tetanica) per frequenze opportune di stimolazione. Si noti il graduale instaurarsi di un elevato plateau e lo sviluppo difasico di ciascun potenziale. (Le frecce indicano l'artefatto dovuto allo stimolo. Registr. cillogr. con amplif. ad entrata bilanc., alta imp., cost. tempo 0,1 sec/periodo. M = meccanogramma; E = elettrogramma; deriv. ditopica).

quando si verifichi per opportune frequenze di stimolazione, un processo di sommazione meccanico delle singole contrazioni ventricolari. Processo che conduce a manifestazioni meccaniche in tutto identiche a quelle che distinguono il tetano della fibra striata scheletrica⁽²⁾. Il fenomeno in questione rassomiglia genericamente nella sua espressione grafica a certi episodi di sincronizzazione descritti in elettroencefalografia e si inizia con andamento a scala (staircase).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia Umana della Università di Firenze.

(**) Presentata nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) I. e L. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », 138, 50 (1951).

(2) L. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », 166, 49 (1949).

Nella Nota precedentemente citata è stato detto che allorché la frequenza degli stimoli raggiunge un certo valore, onde la singole contrazioni ventricolari possono gradualmente sommarsi, si verifica nella forma dei corrispondenti complessi elettrici ventricolari una singolare e progressiva trasformazione che riguarda tanto il gruppo dei potenziali rapidi R e S quanto il potenziale lento finale T. Delle modificazioni di quest'ultimo e del significato loro attribuito già venne a lungo discusso ⁽¹⁾ e perciò non intendiamo farne ulteriore menzione. È quindi alla trasformazione, cui va incontro il complesso Q. R. S. dell'elettroventricologramma ordinario che vengono limitate le nostre considerazioni sul processo di facilitazione osservato.

Nella derivazione ditopica eseguita con elettrodi posti a circa 1 mm. di distanza l'uno dall'altro sulla superficie anteriore del ventricolo (terzo inferiore) il fenomeno in questione consiste nella sostituzione ai potenziali suddetti (dei quali, com'è noto, solo l'onda R presenta un voltaggio assai elevato, mentre la Q e la S risultano spesso appena evidenti) di una ampia oscillazione difasica le cui due fasi, negativa e positiva, presentano spesso un voltaggio pressochè identico e la stessa rapidità di sviluppo. Questa ampia oscillazione difasica va subendo un progressivo incremento fino a raggiungere il suo maggior valore (che è sempre assai rilevante) allorchè la sommazione meccanica delle singole contrazioni può considerarsi praticamente raggiunta.

L'andamento di tale fenomeno ben rilevabile dal tracciato della fig. 1 si inizia, com'è stato detto, colle caratteristiche di una scala graduata ascendente dei singoli potenziali inscritti al di sopra e al di sotto dell'ascissa isopotenziale e che potremo ancora indicare rispettivamente con le lettere R e S. Però, mentre l'incremento della fase R rappresenta un episodio relativamente semplice, quello della fase S è più complesso, esprimendo tale potenziale anche certi fenomeni di inter-dipendenza che si stabiliscono con l'iniziarsi del processo di ripolarizzazione della membrana.

Per avere un quadro più preciso dei fenomeni che modificano profondamente la forma dell'oscillazione S durante l'inizio del tetano si è ricorso a registrare i p. d. a. del ventricolo a mezzo di una derivazione monotopica da lesione (causticazione di una ristrettissima zona in prossimità della punta). Con tale artificio si sono potute osservare molto bene le trasformazioni cui va incontro l'onda S venendo questa rappresentata da una oscillazione che declina allora assai lentamente (fig. 2). Essa deve considerarsi nel suo insieme come la espressione degli eventi elettrici che si svolgono nel tessuto miocardico a livello delle zone limitrofe all'elettrodo distale.

In dette condizioni, appena si inizia il processo di sommazione può constatarsi che l'onda S va assumendo un voltaggio sempre più elevato mentre il piede di tale oscillazione va gradatamente restringendosi, sicchè la difasicità perfettamente simmetrica ⁽²⁾ del complesso rapido ventricolare comporta anche una sostanziale modificazione della componente lenta T inserentesi nella fase di regressione dell'onda S.

(1) Tale perfetta simmetria non si realizza che nei casi in cui il fronte dell'onda di depolarizzazione procede regolarmente in avanti conforme ai postulati classici dell'elettrofisiologia.

Tale componente lenta continua a intravedersi nell'elettrogramma come un tratto alquanto più spesso dell'oscillazione suddetta.

La trasformazione, cui vanno gradatamente incontro i potenziali ventricolari nel tetano, è evidentemente l'espressione di una insolita propagazione e distribuzione simmetrica dell'eccitamento che si instaura nel cuore come conseguenza del processo di tetanizzazione. Conseguenza di tale distribuzione simmetrica e contemporanea a tutti gli elementi compresi nell'onda di depolarizzazione è il notevolissimo aumento di voltaggio che assumono i singoli p. d. a.

Già nello studio più volte ricordato era stato fatto cenno a fenomeni di dispersione temporale caratterizzanti la propagazione normale dell'eccitamento nel sincizio miocardico. Con un lieve eccitamento asincrono vennero, infatti, spiegati

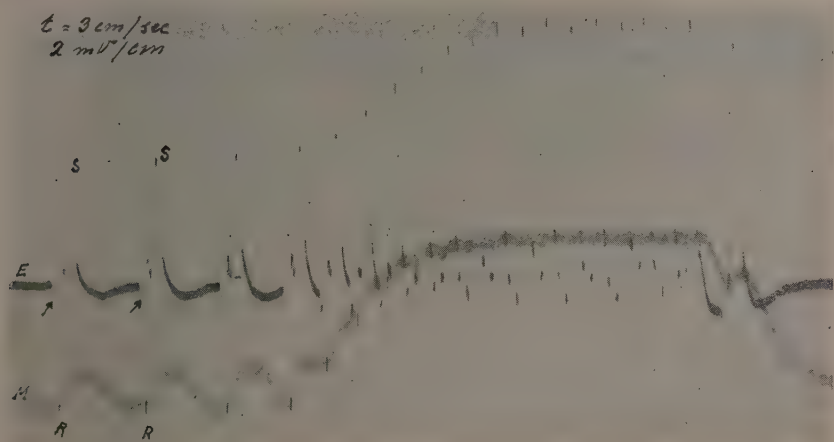


Fig. 2. - Fenomeni di facilitazione a carico dell'oscillazione S per effetti cumulativi da frequenza nel tetano del cuore. (Sviluppo dell'onda S all'inizio (scala) e durante la contrazione tetanica; corrispondente accorciamento del piede d'onda. Deriv. ditopica da lesione all'elettrodo distale. Le altre indic. come nella fig. 1).

non solo il basso voltaggio delle due oscillazioni Q e S, ma anche le piccole oscillazioni secondarie che complicano spesso lo svolgersi dell'onda R. Con le presenti ricerche possiamo oggi meglio documentare questa normale asincronia di eccitazione che è l'espressione della modalità con cui ordinariamente si distribuisce l'eccitamento stesso nel muscolo cardiaco. Ne sono appunto palese dimostrazione le imponenti modificazioni dei p. d. a. ventricolari, allorchè nel tetano la propagazione del processo eccitatorio viene a compiersi secondo uno schema completamente differente.

Il miocardio comune si considera costituito da un fitto plesso di fibre muscolari striate, non individualizzate, con estese zone di coalescenza attraverso le quali si produce un largo scambio di miofibrille. Connettivo lamellare si insinua nello spessore delle fibre suddividendole in fascetti fibrillari. Nella massa contrattile si trovano dischi dotati di un certo spessore, detti strie intercalari. Queste possono avere aspetto scalariforme e a torto si credettero un tempo limitate unità cellulari

distinte. Le miofibrille si continuano attraverso le strie intercalari e si riuniscono in colonnette o fascetti aventi spesso la forma lamellare. Nei punti in cui due fibre contigue si uniscono ad angolo le miofibrille passano dall'una all'altra ininterrotte. In questo sincizio l'eccitamento propagato, partito da un punto, si disperde in tutte le direzioni con una certa velocità.

Peraltro, esistono con ogni probabilità regioni di maggior resistenza alla conduzione, situate o a livello delle zone di coalescenza o dei ponti di congiunzione fra due fibre, poichè anche considerando due punti del miocardio posti a breve distanza fra loro l'onda di eccitamento non sembra quasi mai avanzarsi in linea retta lungo la direttrice congiungente i due punti, ma deviando lateralmente pare disperdersi in complicati circuiti collaterali stabiliti da vie di minor resistenza, sicchè all'elettrodo distale l'eccitamento può giungere non tanto con un certo ritardo, quanto come un potenziale di voltaggio assai basso poichè trasmesso da regioni del muscolo momentaneamente inattive e quindi operanti come conduttori di volume. Non si può fare a meno di pensare a tali condizioni allorchè si constata che a livello del secondo elettrodo (elettrodo distale) viene talvolta a mancare la segnalazione di qualsiasi potenziale per cui l'onda di depolarizzazione, praticamente rappresentata dalla sola punta R finisce per essere espressa da un tracciato molto simile a quello di una derivazione monotopica da lesione, in cui appunto l'elettrodo distale funziona da elettrodo indifferente.

Su queste basi, che del resto non si discostano troppo dai concetti della comune elettrocardiografia clinica, è assai facile di rendersi conto del significato attribuibile alla notevole trasformazione subita nel tetano dal p. d. a.

Il processo di facilitazione che permette l'istituirsi di elevati potenziali difasici attraverso un rapido ma graduale incremento iniziale del loro voltaggio è probabilmente da ricondurre ad un fenomeno cumulativo da frequenza di stimoli che induce in tutti gli elementi miocardici, successivamente investiti dall'onda di depolarizzazione, un elevato grado di sincronizzazione facilitante la propagazione essenzialmente rettilinea dell'eccitamento. Perciò, data la scomparsa delle suddette zone parcellari di blocco (probabilmente assai numerose nel sincizio miocardico) l'onda di depolarizzazione rapida giunge ad essere propagata più uniformemente da parte di tutti gli elementi compresi nel tessuto muscolare posto fra gli elettrodi ⁽⁴⁾ dando luogo, come espressione di questa modalità di propagazione, ad una oscillazione nettamente difasica. Per l'elevata sincronia di eccitamento che ne risulta, il p. d. a. raggiunge anche il suo maggior valore.

Il processo di facilitazione in questione è dunque l'espressione di un avviamento in massa e perciò uniformemente rettilineo della propagazione dell'eccitamento e i fenomeni di avviamento che lo condizionano sono a parer nostro da attribuire alla liberazione di sostanze attive che in ragione della frequenza di stimolazione adottata giungono a sommare gli effetti dei singoli quanti successivamente formati. Le ricerche ancora in corso su questa importante questione tendono a prospettarci la possibilità che detto fenomeno di facilitazione sia pure

(4) Probabilmente ciò avviene lungo tutto il sincizio miocardico dalle regioni della base verso la punta del cuore.

legato all'instaurarsi di un processo lento di depolarizzazione (fig. 3) che tracciati eseguiti con amplificazioni in accoppiamento diretto (ma del resto già convalidate da indagini compiute col galvanometro a corda⁽⁵⁾) hanno dimostrato stabilirsi subito all'inizio del tetano e permanere sovente durante tutto il suo svolgimento. La facilitazione rivelataci dal comportamento dei p. d. a. sarebbe quindi legata ad un potenziale elettrotonico negativo (p. e. n.) di cui sono ben noti gli effetti sulla eccitabilità dei tessuti. Quali siano i fattori determinanti l'insorgere di questo p. e. n. non possiamo indicare ancora con tutta sicurezza; sta però il fatto che l'atropina ne attenua o ne impedisce la comparsa (fig. 4) ostacolando contemporaneamente la sommazione meccanica delle singole scosse (tetano). Non sembrerà quindi azzardato il pensare ad un intervento più o meno diretto dell'acetilcolina nel processo

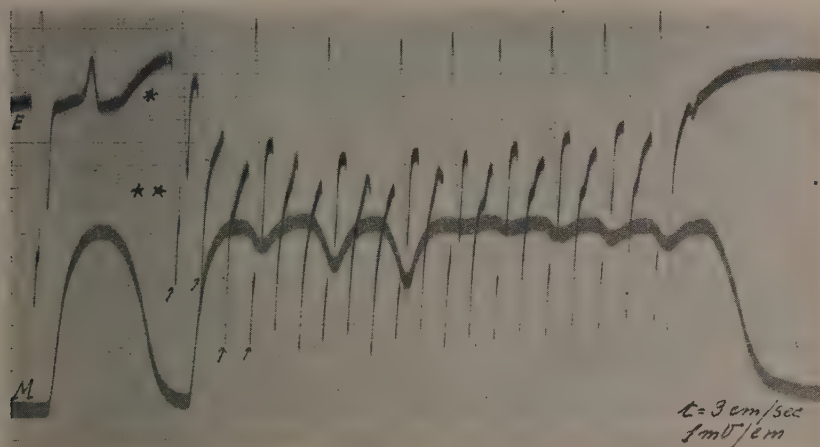


Fig. 3. - Fenomeni di depolarizzazione el. ton. nel miocardio ventricolare durante lo svolgersi di un breve tetano. (Il valore del potenziale di riposo è stato indicato da un asterisco; quello raggiunto dalla depolarizzazione lenta nel tetano da due asterischi. (Registr. oscillogr. con amplific. in accoppiam. diretto, costruz. Magnolfi).

di depolarizzazione lento osservato. Il quale non riguarda, come ben s'intende, la natura e l'origine del processo propagato, anche se talvolta detti potenziali elettrotonici possono svisarne o mascherarne il carattere T. o N.

Queste vedute sulla genesi del meccanismo di facilitazione trovano appoggio nella ipotesi da noi ripetutamente sostenuta⁽⁶⁾ che la sommazione meccanica dei singoli battiti nel tetano del miocardio sia realmente da riferire a fattori neuro-ormonici. Noi abbiamo, anzi, precisato che l'acetilcolina sembra essere l'agente responsabile di ogni reazione contrattile graduata, sia nel miocardio che nella fibra scheletrica, di cui il tetano non rappresenta che un caso limite rispetto alla frequenza dello stimolo. Si ricorda, inoltre, che reazioni graduate dell'inotropismo cardiaco si osservano anche per frequenze di stimolazioni non ancora di valore

(5) L. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », 287, 49 (1949).

(6) I. e L. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », 348, e 436, 50 (1951).

tetanizzante. L'azione dell'acetilcolina si svolgerebbe direttamente sul substrato contrattile del muscolo modificando la lunghezza delle catene di actomiosina, secondo reazioni di tipo graduato anzichè massimale (T. o N.). Poichè l'effetto contrattile dell'acetilcolina dipende da una certa persistenza di azione e dalla concentrazione raggiunta nell'effettore, è evidente che reazioni graduate non si effettueranno che in seguito ad opportune frequenze di eccitamenti, frequenze che risultano appunto relativamente elevate quando si tratti di evocare quella particolare reazione graduata che è il tetano.

Rispetto ad eccitamenti singoli e distanziati nel tempo, per cui la liberazione di acetilcolina non giunge a provocare effetti di carattere sommatorio (per la distruzione che il principio attivo subisce fra un eccitamento e l'altro), il tessuto

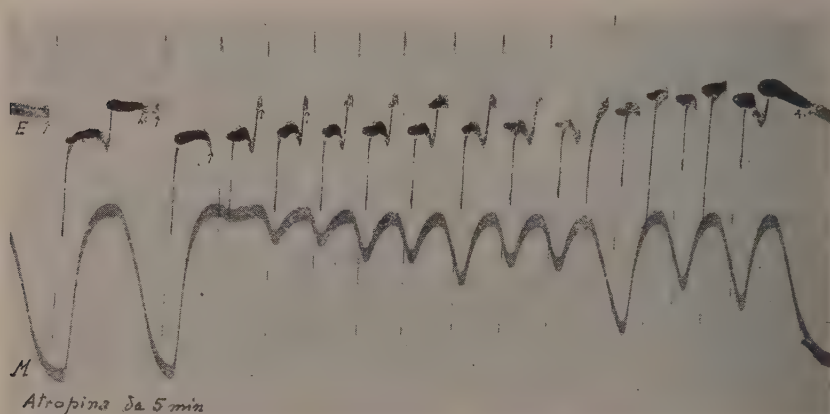


Fig. 4. - Dopo atropinizzazione del preparato i fenomeni di depolarizzazione lenta si attenuano o scompaiono, mentre corrispondentemente si attenua o scompare la proprietà meccanica del muscolo a sommare le singole scosse. (Per le altre indicazioni cfr. figg. 1 e 3).

non potrà rispondere che secondo la regola del T. o N., l'entità della reazione dipendendo allora dalle condizioni metaboliche in cui il tessuto si trova e dal valore assoluto dei singoli quanti di acetilcolina liberati a ciascun eccitamento. Poichè il processo propagato e i quanti di acetilcolina rappresentano effetti T. o N., anche la risposta del muscolo per sequenze lente di stimoli avrà lo stesso carattere.

Non è certo facile indicare in quali strutture del sincizio miocardico si incontrino quelle resistenze cui sopra è stato accennato e nella cui scomparsa si identificano i fenomeni di facilitazione alla propagazione dell'eccitamento. Si potrebbe pensare che zone di relativa resistenza sussistano nel sincizio miocardico a livello delle strie intercalate e scalariformi, che obbligando l'onda di eccitamento a percorrere tragitti complicati e tortuosi creino quel lieve asincronismo che caratterizza dal lato elettrico la propagazione dell'onda di depolarizzazione rapida durante il battito cardiaco normale. Però, in base a considerazioni dedotte dal comportamento del tetano e di altre reazioni graduate nel muscolo scheletrico (potenziamento post-tetnico, ascesa secondaria, fenomeno della scala, ecc.) siamo più propensi a credere

che dette resistenze trovino la loro giustificazione nel comportamento stesso delle singole miofibrille. Tali organuli, che adempiono contemporaneamente al compito di condurre l'eccitamento propagato come effetto di membrana, e di accorciarsi per le proprietà insite nella struttura della molecola actomiosinica, potrebbero assai differire fra loro per differenti soglie di eccitabilità. Le zone di resistenza alla conduzione dell'eccitamento sarebbero rappresentate nel sincizio miocardico (che possiede un apparato miofibrillare unitario) da quelle miofibrille o colonnette di miofibrille che in numero maggiore o minore non sono in grado di entrare in eccitazione contemporaneamente alle altre aventi una soglia più bassa di eccitabilità.

Che ciò sia possibile, sembrerebbe doversi dedurre da molti reperti istologici che indicano, nella fibra eccitata a contrarsi, una non concordanza di aspetti da parte dei diversi fascetti di miofibrille specialmente significativi quando l'osservazione venga compiuta a luce polarizzata ⁽⁷⁾.

I fenomeni di facilitazione (dei quali si è detto nella prima parte di questa Nota) eliminerebbero tali differenze di eccitabilità fra i diversi fascetti di miofibrille. Ciò avverrebbe nel cuore progressivamente e rapidamente così da permettere al processo propagato di investire, ottenendone una elevata sincronia di risposta, tutti gli elementi compresi nella fascia d'onda. Come risultato di questa nuova modalità di progressione dell'eccitamento si determinerebbe la comparsa dei caratteristici p. d. a. che distinguono l'elettrotetanogramma.

È possibile che anche nella fibra scheletrica, ove la suddetta diversità di aspetti appare veramente suggestiva a livello dei fascetti di miofibrille situati in prossimità della placca motrice, esistano condizioni che inducono soglie di differente eccitabilità nei diversi fascetti stessi e quando scarso è il numero di quelli che possono entrare immediatamente in azione si costituiscono zone in cui l'impulso si arresta o si avvanza con decremento ⁽⁸⁾.

La risposta meccanica T.o.N. corrisponderebbe nel cuore all'effetto di quella parte dei fascetti miofibrillari che reagisce immediatamente all'eccitamento propagato singolo; quella graduata (compreso il tetano) corrisponderebbe invece ad un numero sempre maggiore di fascetti che entrano in funzione man mano che con la ripetizione dello stimolo il processo di facilitazione giunge opportunamente ad abbassare la loro soglia di eccitabilità. Nel tetano e in tutte le risposte graduate l'accorciamento della singola fibra non deve però essere considerato soltanto come un evento di ordine spaziale (cioè, dipendente dall'entrata in attività di miofibrille sempre più

(7) G. LEVI, *Trattato di Istologia*, U. T. E. T. Torino, 1946.

(8) A questo proposito è da ricordare il fatto osservato da I. SPADOLINI (*) che la estrema sottigliezza di certi sistemi di fibre di connessione atrio-ventricolari nel cuore dei rettili è causa di una resistenza alla conduzione dell'eccitamento che si traduce in un lungo tempo latente. Vi è, peraltro, da prospettare la possibilità che le condizioni di blocco relativo o completo nei fascetti miofibrillari siano costituite da stati di iperpolarizzazione (positiva) che richiedono per la depolarizzazione della membrana il contributo di un agente depolarizzante locale. Tale agente potrebbe essere appunto l'acetilcolina, della quale sono note le proprietà depolarizzanti a livello della placca motrice.

(*) I. SPADOLINI, «Arch. Ital. Anat. e Embriol.», 273, 28 (1921).

numerosa) ma anche da eventi temporali capaci di provocare una graduazione nell'accorciamento delle stesse catene actomiosiniche.

A differenza di quanto avviene nel miocardio (e ciò giustifica il concetto che esso debba venire considerato come una unica fibra) nel muscolo scheletrico in toto i descritti fenomeni di facilitazione elettrica osservati nel tetano sfuggono facilmente all'indagine oscillografica per la moltitudine di fibre ordinariamente in fasi diverse di attività. Solo in rare circostanze il fenomeno sembra essere stato osservato nei muscoli del pollo ⁽⁹⁾. Di recente, una documentazione più precisa è stata portata da Peruzzi ⁽¹⁰⁾ in ricerche di oscillografia catodica in corso di pubblicazione.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Equazioni differenziali. — *Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$.* Nota II di GIOVANNI PRODI, presentata ^(*) dal Corrisp. G. ASCOLI.

3. Dimostriamo ora un teorema analogo al teorema I (ma che non sembra riducibile a questo):

TEOREMA II. *L'equazione (I') abbia i suoi integrali tutti limitati; inoltre detti $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due integrali linearmente indipendenti della (I') e, posto:*

$$I_{i,k}(x) = \int_{x_0}^x Q(\xi) u_i(\xi) u_k(\xi) d\xi \quad (i, k = 1, 2)$$

$$\Omega_{ik}(\eta, x) = \text{oscillazione di } I_{i,k}(\xi) \text{ per } \eta \leq \xi \leq x,$$

siano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) $I_{i,k}(x)$ limitati in $(x_0, +\infty)$, $(i, k = 1, 2)$;

b) $\int_{x_0}^x |Q(\eta)| \Omega_{ik}(\eta, x) d\eta$ limitati in $(x_0, +\infty)$, $(i, k = 1, 2)$;

allora anche l'equazione (2) ha i suoi integrali tutti limitati.

Premettiamo un lemma ottenuto generalizzando un lemma di R. Bellmann ⁽⁶⁾:
Se una funzione $y(x)$ soddisfa alla limitazione:

$$|y(x)| \leq M + L \int_{x_0}^x f(x, \eta) |y(\eta)| d\eta$$

(9) G. BROWN e A. M. HARVEY, «J. Physiol.», 285, 93 (1938); 330, 97 (1939-40).

(10) P. PERUZZI, «Arch. Fisiol.», 51, 1951 (in corso di stampa).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(6) R. BELLMANN, *The stability of solutions of linear differential equations*. «Duke Math. Journal», 10, 643-647 (1943).

dove M ed L sono costanti ≥ 0 e $f(x, \eta)$ è una funzione definita per $x_0 \leq \eta \leq x$ che assume solo valori positivi o nulli, allora è:

$$|y(x)| \leq M \exp. \left(L \int_{x_0}^x \text{estr. sup.}_{\eta \leq \xi \leq x} f(\xi, \eta) d\eta \right).$$

Risulta dal lemma citato che, se una funzione $y(x)$ soddisfa alla disequazione:

$$|y(x)| \leq M + L \int_{x_0}^x f(\eta) |y(\eta)| d\eta$$

essendo $f(\eta)$ una funzione ≥ 0 , vale per essa la limitazione:

$$|y(x)| \leq M \exp. \left(L \int_{x_0}^x f(\eta) d\eta \right).$$

Ora, fissato x , per ogni λ tale che $x_0 \leq \lambda \leq x$, dall'ipotesi segue:

$$|y(\lambda)| \leq M + L \int_{x_0}^{\lambda} \text{estr. sup.}_{\eta \leq \xi \leq x} f(\xi, \eta) d\eta,$$

ove la funzione $\text{estr. sup.}_{\eta \leq \xi \leq x} f(\xi, \eta)$ non dipende da λ , ma solo da x e da η .

Possiamo dunque applicare il lemma di R. Bellmann e scrivere:

$$|y(\lambda)| \leq M \exp. \left(L \int_{x_0}^{\lambda} \text{estr. sup.}_{\eta \leq \xi \leq x} f(\xi, \eta) d\eta \right).$$

Dà questa, ponendo $\lambda = x$, si ottiene la relazione asserita.

Ciò posto, riprendiamo la relazione (5). Per l'ipotesi a)

$$\left| u(x) + \int_{x_0}^x Q(\xi) H(x, \xi) u(\xi) d\xi \right|$$

si mantiene limitato e noi supporremo che non superi una costante M . Dalla espressione di $H(x, \xi)$ si deduce che è:

$$\left| \int_{\eta}^x H(x, \xi) H(\xi, \eta) Q(\xi) d\xi \right| \leq L \sum_{i,k}^{1,2} \left| \int_{\eta}^x Q(\xi) u_i(\xi) u_k(\xi) d\xi \right|$$

essendo L una costante > 0 . Avremo dunque:

$$|y(x)| \leq M + L \int_{x_0}^x |y(\eta)| \cdot \left| Q(\eta) \sum_{i,k}^{1,2} \int_{\eta}^x Q(\xi) u_i(\xi) u_k(\xi) d\xi \right| d\eta$$

e, in virtù del lemma dimostrato,

$$|y(x)| \leq M \exp. \left(L \int_{x_0}^x |Q(\eta)| \left| \sum_{i,k}^{1,2} \text{estr. sup.}_{\eta \leq \xi \leq x} \int_{\eta}^{\xi} Q(\xi) u_i(\xi) u_k(\xi) d\xi \right| d\eta \right)$$

$$|y(x)| \leq M \exp. \left(L \int_{x_0}^x |Q(\eta)| \sum_{i,k}^{1,2} \Omega_{ik}(\eta, x) d\eta \right)$$

da cui risulta, per l'ipotesi b) l'asserto.

4. Per estendere il criterio (VL) potremo procedere in modo perfettamente analogo a quello seguito per il teorema I, applicando una notevole equazione integrale cui soddisfano le soluzioni della (1) nell'ipotesi che la funzione $A(x)$ sia positiva e a variazione limitata ad ogni intervallo finito. Questa equazione è stata data da G. Ascoli in una Nota citata sopra, a cui rinviamo per la dimostrazione (7):

$$(7) \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{A(x)}} (c_1 e^{i\tau(x)} + c_2 e^{-i\tau(x)}) + \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \int_{x_0}^x y(\xi) \cos(\tau(\xi) - \tau(x)) d\sqrt{A(\xi)}$$

(c_1 e c_2 costanti), dove è $\tau(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{A(\xi)} d\xi$ e l'integrale è di Stieltjes. Noi

supporremo, in più, che la funzione $A(x)$ sia continua. Sostituendo ancora, come nella dimostrazione del teorema I; invertendo, nell'integrale doppio di Stieltjes che si ottiene, l'ordine delle integrazioni, e prendendo il modulo, si ricava per la $y(x)$ una disequazione analoga alla (5). Da questa risultano immediatamente le condizioni di stabilità espresse nel seguente:

TEOREMA III. - La funzione $A(x)$, continua e a variazione limitata in ogni intervallo finito, soddisfi, per ogni x maggiore di un certo x_0 alle seguenti condizioni:

- a) $A(x)$ resta compresa tra due costanti positive;
- b) l'integrale:

$$\int_{x_0}^x e^{2i\tau(\xi)} d \log A(\xi), \quad \text{dove} \quad \tau(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{A(\zeta)} d\zeta,$$

si mantiene limitato;

- c) si può determinare una costante positiva $K < 1$ tale che:

$$\frac{1}{2\sqrt{A(x)}} \int_{x_0}^x \left| \int_{\eta}^x \cos(\tau(\xi) - \tau(x)) \cos(\tau(\eta) - \tau(\xi)) d \log A(\xi) \right| d\sqrt{A(\eta)} < K;$$

allora ogni integrale della (1) si mantiene limitato in $(x_0, +\infty)$.

(7) La Nota è la seconda citata in (1). L'equazione a cui ci riferiamo è la prima delle (9) a p. 136.

Abbiamo voluto riportare questo risultato, malgrado la sua complicazione, perchè esso permette di accertare la stabilità in un caso particolarmente interessante per le conseguenze cui esso conduce. Consideriamo l'equazione:

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin 2x}{2x}\right) y = 0.$$

La condizione *a*) è evidentemente soddisfatta. Per quanto riguarda la *b*), osserviamo che si può assumere:

$$\tau(x) = x + 2\sqrt{x} - \int_x^\infty \frac{\sin 2\xi}{2\xi} d\xi = x + 2\sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{-1})$$

e che si ha poi, con facile calcolo,

$$e^{2i\tau(x)} = e^{2i(x+2\sqrt{x})} (1 + \mathcal{O}(x^{-1})) \quad , \quad \frac{d \log A(x)}{dx} = \frac{\cos 2x}{x} + \mathcal{O}(x^{-3/2}).$$

Di qui:

$$e^{2i\tau(\xi)} \frac{d \log A(\xi)}{d\xi} = e^{2i(\xi+2\sqrt{\xi})} \frac{\cos 2\xi}{\xi} + \mathcal{O}(\xi^{-3/2}) = \frac{e^{4i\xi+4i\sqrt{\xi}}}{2\xi} + \frac{e^{4i\sqrt{\xi}}}{2\xi} + \mathcal{O}(\xi^{-3/2})$$

che si riconosce facilmente integrabile tra x e $+\infty$ ⁽⁸⁾, avendosi anzi:

$$\int_x^\infty e^{2i\tau(\xi)} d \log A(\xi) = \mathcal{O}(x^{-1/2}) \quad \text{e quindi:} \quad \int_x^\infty \cos 2\tau(\xi) d \log A(\xi) = \mathcal{O}(x^{-1/2}),$$

$$\int_x^\infty \sin 2\tau(\xi) d \log A(\xi) = \mathcal{O}(x^{-1/2})$$

che ci saranno utili tra poco.

Passando ora alla *c*), trasformiamo l'integrale interno che vi figura notando che è:

$$\begin{aligned} \cos(\tau(\xi) - \tau(x)) \cos(\tau(\eta) - \tau(\xi)) &= \frac{1}{2} \cos(\tau(\eta) - \tau(x)) + \frac{1}{2} \cos(\tau(x) + \\ &+ \tau(\eta) - 2\tau(\xi)) = \frac{1}{2} \cos(\tau(\eta) - \tau(x)) + \frac{1}{2} \cos(\tau(x) + \tau(\eta)) \cos 2\tau(\xi) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(\tau(x) + \tau(\eta)) \sin 2\tau(\xi) \end{aligned}$$

d'onde per esso l'espressione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(\tau(\eta) - \tau(x)) \int_\eta^x d \log A(\xi) + \mathcal{O}(x^{-1/2}) &= \mathcal{O}(\log A(x)) + \mathcal{O}(\log A(\eta)) + \\ &+ \mathcal{O}(x^{-1/2}) = \mathcal{O}(x^{-1/2}) + \mathcal{O}(\eta^{-1/2}) \end{aligned}$$

che per $\eta < x$ è $\mathcal{O}(\eta^{-1/2})$. Tenuto poi conto che è

$$\frac{d \sqrt{A(\eta)}}{d\eta} = \mathcal{O}(\eta^{-1}),$$

(8) Per il primo termine si integri per parti, assumendo $e^{4i\xi+4i\sqrt{\xi}} d\xi$ come fattore differenziale; per il secondo si ponga $\xi = u^2$, che riconduce ad un integrale classico.

abbiamo che l'integrale che figura in c) si può maggioreare con

$$\int_{x_0}^{\infty} \Theta(\eta^{-3/2}) d\eta = \Theta(x_0^{-1/2})$$

che tende a zero per $x_0 \rightarrow +\infty$. Onde la c) è anch'essa soddisfatta e l'equazione considerata ha dunque tutti i suoi integrali limitati. Si deduce che lo stesso avviene per l'equazione:

$$y'' + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{\sin 2x}{x}\right)y = 0$$

ottenuta dalla precedente sopprimendo nel coefficiente di y termini assolutamente integrabili nell'intervallo infinito.

Interessante è ora il confronto di questa equazione con l'altra:

$$y' + \left(1 + \frac{\sin 2x}{x}\right)y = 0$$

che possiede integrali *non limitati* ⁽⁹⁾. Esso risponde negativamente al seguente quesito: se l'aggiunta alla funzione $A(x)$ di un termine a variazione limitata e tendente a zero per $x \rightarrow +\infty$ mantenga necessariamente la stabilità degli integrali di un'equazione del tipo (1). In altre parole: *non sussiste per un termine aggiuntivo a variazione limitata e tendente a zero un teorema di confronto analogo a quello dato da G. Ascoli per un termine assolutamente integrabile.*

Analisi matematica. — *Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni* ^(*). Nota di GAETANO FICHERA, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

Tutti sanno che l'esistenza del minimo dell'integrale multiplo

$$\mathfrak{J}[u] = \int_A \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_r$$

nella classe delle funzioni che assumono valori prescritti sulla frontiera $\mathfrak{F}A$ del campo limitato A , è connessa al classico principio di Dirichlet, relativo all'esistenza di una funzione armonica in A , di cui sono prescritti i valori su $\mathfrak{F}A$.

L'esistenza del detto minimo, specie nel caso $r=2$, è stata diffusamente trattata da numerosi Autori.

In talune questioni di Fisica matematica si presenta anche il problema dell'esistenza del minimo dell'integrale

$$I[u] = \int_A \left(\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_r$$

(9) Vedi nota (4) dell'introduzione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1951.

nella classe delle funzioni, per le quali i valori su $\mathcal{F}A$ e i valori della derivata normale coincidono rispettivamente con due prescritte funzioni. Tale problema variazionale ha come corrispondente problema al contorno, quello relativo all'esistenza di una soluzione dell'equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$ ($\Delta_2 \equiv$ operatore differenziale di Laplace) di assegnati valori e di assegnata derivata normale su $\mathcal{F}A$. Questo problema va comunemente inteso col nome di problema bi-iperarmonico.

A quanto mi consta non è stata mai dimostrata l'esistenza del minimo di $I[u]$ nella classe specificata.

Invero, i procedimenti, mediante i quali d'ordinario si dimostra l'esistenza del minimo di $\mathcal{J}[u]$, non sono applicabili all'integrale $I[u]$. La ragione essenziale di ciò risiede nel fatto che mentre l'integrand' di $\mathcal{J}[u]$ è una forma quadratica definita positiva nelle derivate prime di u , quella di $I[u]$ è soltanto semidefinita positiva nelle derivate seconde di u .

Alcuni Autori, limitatamente al caso $r = 2$, per ovviare a tale inconveniente, sostituiscono ad $I[u]$ il funzionale

$$G[u] = \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2,$$

che può esser trattato con metodi analoghi a quelli impiegati per $\mathcal{J}[u]$ ⁽¹⁾. La classe funzionale in cui si ricerca il minimo di $G[u]$ è quella delle funzioni aventi un assegnato gradiente su $\mathcal{F}A$ ed il problema al contorno corrispondente consiste nel provare l'esistenza di una funzione bi-iperarmonica (cioè soluzione di $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$), della quale sono assegnate le derivate prime su $\mathcal{F}A$. Poichè tale problema ovviamente equivale a quello bi-iperarmonico, una volta dimostrata l'esistenza della soluzione, si può cercare di dedurre da essa quella del minimo di $I[u]$.

Vogliamo, però, in questa Nota – supposto r qualsiasi – dare una dimostrazione diretta dell'esistenza del minimo di $I[u]$, applicando un procedimento che è caso particolare di un metodo generale, il quale consente la dimostrazione dell'esistenza del minimo in tutti quei problemi di calcolo delle variazioni, che sono connessi a problemi al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari di tipo ellittico.

Tale metodo è stato dall'autore della presente Nota esposto in una conferenza tenuta all'Università di Padova ⁽²⁾ e sarà pubblicato in una Memoria che apparirà nei « Rendiconti » di quel Seminario matematico.

I. IPOTESI E PREMESSE. – Sia A un insieme aperto (campo) limitato dello spazio euclideo a r dimensioni. Faremo l'ipotesi che la frontiera $\mathcal{F}A$ di A possa decomporci in un numero finito di ipersuperficie aperte di classe 2. Con \mathcal{Q} indicheremo

(1) Cfr. G. FUBINI, *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo XXVIII (1907); H. O. FRIEDRICH, *Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung)*. « Math. Annalen », 98 Bd. (1928).

(2) Il 26 febbraio 1951.

la totalità delle funzioni continue in A assieme alle derivate parziali prime e seconde e tali che

$$\int_A \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx < +\infty, \quad \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx < +\infty \quad \begin{matrix} (dx = dx_1 dx_2 \dots dx_r) \\ (i, j = 1, 2, \dots, r). \end{matrix}$$

Si dimostra⁽³⁾ che per quasi tutti i punti ξ di $\mathcal{F}A$ esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = \bar{u}(\xi), \quad \lim_{x \rightarrow \xi} u_{x_i}(x) = \bar{u}_i(\xi) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

facendo tendere x a ξ lungo la direzione individuata da un qualsiasi vettore $\mu(\xi)$ definito su $\mathcal{F}A$, penetrante nell'interno di A e di classe 1 su ogni ipersuperficie regolare che compone $\mathcal{F}A$. Tale vettore può - quindi - in particolare, coincidere col vettore normale a $\mathcal{F}A$. Le funzioni $\bar{u}(\xi)$ e $\bar{u}_i(\xi)$ non dipendono da μ e saranno assunte come i valori di $u(x)$ e delle sue derivate prime su $\mathcal{F}A$. Occorre anche ricordare che $u(x)$ e le $u_{x_i}(x)$ sono uniformemente sommabili sulle frontiere di una successione di domini che invade A , talchè $\bar{u}(\xi)$ e le $\bar{u}_i(\xi)$ risultano sommabili su $\mathcal{F}A$. Per derivata normale su $\mathcal{F}A$ di una funzione $u(x)$ di \mathcal{M} intenderemo la funzione così definita quasi ovunque su $\mathcal{F}A$

$$\frac{du}{dv} = \sum_{i=1}^r \bar{u}_i(\xi) v_i(\xi),$$

essendo $v_i(\xi)$ le componenti del vettore $v(\xi)$ normale a $\mathcal{F}A$, diretto verso l'interno di A .

Su $\mathcal{F}A$ faremo l'ulteriore ipotesi che in ogni punto ξ in cui è determinato $v(\xi)$ possa condursi un segmento normale a $\mathcal{F}A$, avente centro ξ e contenuto per metà in A e per metà all'esterno di A .

Se v è una funzione di classe 2 in $A + \mathcal{F}A$, cioè continua assieme alle derivate parziali prime e seconde in $A + \mathcal{F}A$, ed u appartiene ad \mathcal{M} , sussiste la seguente formula di Green

$$(I) \quad \int_{\mathcal{F}A} \left(u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} \right) d\sigma + \int_A (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) dx = 0,$$

epperò ogni funzione u di \mathcal{M} si rappresenta così in A :

$$(2) \quad u(x) = \int_{\mathcal{F}A} \left[u(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - \frac{du}{dv} s(x, \xi) \right] d\sigma - \int_A (\Delta_2 u) s(x, y) dy,$$

essendo:

$$s(x, \xi) \begin{cases} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{x\xi} & \text{per } r = 2, \\ = \frac{1}{\omega_r} \frac{1}{x\xi^{r-2}} & \text{per } r > 2. \end{cases}$$

(3) Cfr. G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. « Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa », ser. III, vol. IV, fasc. I-II, cap. V (1950).

Con $\overline{x\xi}$ s'è indicata la distanza fra x e ξ , con ω_r la misura ipersuperficiale della ipersfera unitaria moltiplicata per $r - 2$.

Si osservi che il potenziale

$$\int_A (\Delta_2 u) s(x, y) dy$$

che interviene al secondo membro di (2) è - per un noto teorema di Lichtenstein⁽⁴⁾ - una funzione di \mathcal{M} , pertanto anche la funzione

$$\int_{\mathfrak{F}A} \left[u(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{d\nu} - \frac{du}{d\nu} s(x, \xi) \right] d_{\xi} \sigma$$

appartiene ad \mathcal{M} .

2. TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO. - Siano $f(\xi)$ e $g(\xi)$ due funzioni quasi continue e sommabili su $\mathfrak{F}A$. Consideriamo la sottoclasse $\overline{\mathcal{M}}$ di \mathcal{M} costituita da tutte le funzioni di \mathcal{M} per le quali si ha su $\mathfrak{F}A$, nel senso sopra specificato

$$(3) \quad u = f \quad , \quad \frac{du}{d\nu} = g \quad .$$

Supporremo che la classe $\overline{\mathcal{M}}$ non sia vuota.

Dimostreremo il seguente teorema:

Esiste il minimo di $I[u]$ nella classe $\overline{\mathcal{M}}$.

Diciamo B un campo il quale sia esterno ad $A + \mathfrak{F}A$ ed abbia punti contenuti in ogni parte connessa di cui si compone l'insieme complementare di $A + \mathfrak{F}A$. Diciamo $\{\varphi_k(x)\}$ un sistema di funzioni tutte definite in B e ivi completo nel senso di Hilbert. Poniamo

$$v_k(x) = \int_B \varphi_k(y) s(x, y) dy \quad .$$

Le funzioni $v_k(x)$ sono armoniche e di classe 2 in $A + \mathfrak{F}A$. Possiamo inoltre supporre che il sistema di funzioni armoniche $\{v_k(x)\}$ sia ortonormale in A , verifichi cioè le condizioni

$$\int_A v_h(x) v_k(x) dx \begin{cases} = 1 & , \quad \text{se } h = k, \\ = 0 & , \quad \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

Indichiamo con $\{\psi_i(x)\}$ un sistema di funzioni completo in A nel senso di Hilbert e poniamo

$$w_i(x) = \psi_i(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} v_k(x) \quad , \quad c_k^{(i)} = \int_A \psi_i(x) v_k(x) dx \quad .$$

(4) Cfr. L. LICHTENSTEIN, *Ueber das Poissonsche Integral*. «Journal für die reine und angewandte Math.», Bd. 141 (1912). H. O. FRIEDRICH, *A theorem of Lichtenstein*. «Duke Math. Journal», 14 (1947).

Il sistema costituito dalle due successioni $\{v_k(x)\}$ e $\{w_i(x)\}$ è hilbertianamente completo in A . Infatti se $z(x)$ è una funzione di quadrato sommabile in A , verificante le infinite equazioni integrali

$$\int_A z(x) v_k(x) dx = 0 \quad , \quad \int_A z(x) w_i(x) dx = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots)$$

per essa sarà anche, per ogni i ,

$$\int_A z(x) \psi_i(x) dx = 0$$

e pertanto è $z(x) = 0$ quasi ovunque in A .

Quali si siano k ed i , riesce

$$\int_A v_k(x) w_i(x) dx = 0$$

e quindi, se dal sistema $\{w_i(x)\}$ deduciamo, col noto procedimento di Schmidt, uno ortonormale in A , che seguiranno a chiamare allo stesso modo, possiamo concludere che le due successioni $\{v_k(x)\}$ e $\{w_i(x)\}$ costituiscono un sistema ortonormale e completo in A .

Per ogni funzione u di \mathfrak{M} si ha:

$$I[u] = \int_A (\Delta_2 u)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_A v_k \Delta_2 u dx \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_A w_i \Delta_2 u dx \right)^2.$$

D'altronde se u appartiene ad $\overline{\mathfrak{M}}$, riesce per la (1)

$$(4) \quad \int_A (v_k \Delta_2 u) dx = \int_{\mathfrak{F}A} \left(f \frac{dv_k}{dv} - g v_k \right) d\sigma,$$

avremo quindi in $\overline{\mathfrak{M}}$, indicata con a_k la costante a secondo membro della (4),

$$I[u] \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Poniamo

$$(5) \quad u_0(x) = \int_{\mathfrak{F}A} \left[f(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - g(\xi) s(x, \xi) \right] d\xi \sigma - \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(y) \right) s(x, y) dy.$$

Si ha

$$I[u_0] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Per dimostrare il teorema occorre solo far vedere che u_0 appartiene ad $\overline{\mathfrak{M}}$. Intanto, dato che per ogni funzione u di $\overline{\mathfrak{M}}$ sussiste la (2) con f e g rispettivamente al posto di u e du/dv , per l'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente, la funzione

$$(6) \quad \int_{\mathfrak{F}A} \left[f(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - g(\xi) s(x, \xi) \right] d\xi \sigma$$

appartiene ad \mathfrak{M} e, poichè, per il già richiamato teorema di Lichtenstein, anche la funzione

$$(7) \quad \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(y) \right) s(x, y) dy$$

appartiene ad \mathfrak{M} , ne segue che $u_0(x)$ è una funzione di \mathfrak{M} . Sussistono quindi le formule

$$(8) \quad u_0(x) = \int_{\mathfrak{F}A} \left[u_0(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - \frac{du_0}{dv} s(x, \xi) \right] d\sigma - \int_A (\Delta_2 u_0) s(x, y) dy$$

per x in A , e

$$(9) \quad 0 = \int_{\mathfrak{F}A} \left[u_0(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - \frac{du_0}{dv} s(x, \xi) \right] d\sigma - \int_A (\Delta_2 u_0) s(x, y) dy$$

per x esterno ad A . D'altra parte, supposto x in B , moltiplicando le due funzioni (6) e (7) per $\varphi_k(x)$ e integrando su B si deduce

$$\int_B \varphi_k(x) dx \int_{\mathfrak{F}A} \left[f(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - g(\xi) s(x, \xi) \right] d\xi \sigma = \int_B \varphi_k(x) dx \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(y) \right) s(x, y) dy = a_k$$

e pertanto per ogni x esterno ad A sarà:

$$(10) \quad 0 = \int_{\mathfrak{F}A} \left[f(\xi) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - g(\xi) s(x, \xi) \right] d\xi \sigma - \int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(y) \right) s(x, y) dy.$$

Dato che $\Delta_2 u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$, dalle (5), (8), (9), (10) si trae

$$\int_{\mathfrak{F}A} \left[(f - u_0) \frac{ds(x, \xi)}{dv} - \left(g - \frac{du_0}{dv} \right) s(x, \xi) \right] d\xi \sigma = 0$$

al variare comunque di x all'esterno o all'interno di A . Il che — in virtù delle ipotesi fatte su $\mathfrak{F}A$ e di note estensioni degli ordinari teoremi sui semplici e sui doppi strati armonici⁽⁵⁾ — implica le (3), cioè l'appartenenza di u_0 a $\overline{\mathfrak{M}}$. Il teorema è così dimostrato.

Si noti che si è in pari tempo dimostrato il teorema di esistenza per il problema bi-iperarmonico nella classe \mathfrak{M} , pervenendo alla costruzione esplicita della soluzione, espressa dalla (5)⁽⁶⁾.

(5) Cfr. G. C. EVANS-E. R. C. MILES, *Potential of general masses in single and double layers*. « Journal of Math. », vol. 53 (1931); G. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*. « Ann. di Mat. pura e appl. », tomo 27, ser. IV (1948).

(6) È da notare che la dimostrazione del teorema di esistenza ora data semplifica quella contenuta nella Nota dello scrivente: *Teorema di esistenza per il problema bi-iperarmonico*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. V (1948), in quanto non si è fatto ora uso di un lemma sul potenziale di campo, che viene là invece impiegato.

Analisi matematica. — *Sul calcolo numerico degli integrali multipli* (*). Nota di CARLO BIRINDELLI, presentata(**) dal Socio M. PICONE.

Come è noto esistono formule, per il calcolo numerico approssimato degli integrali semplici di una assegnata funzione, dotate di una maggiorazione dell'errore d'approssimazione.

Le formule più adatte per le scienze sperimentali sono quelle che impiegano esclusivamente i valori della funzione, in quanto che quelli delle derivate possono non essere conosciuti, neppure in via approssimata.

Si pone spontaneamente la questione di ricercare formule, per il calcolo numerico approssimato di integrali multipli d'ordine r , per assegnate funzioni di r variabili, che impieghino integrali multipli d'ordine non superiore ad $r-1$ operanti su funzioni di al più $r-1$ variabili dedotte dalla assegnata, formule che siano dotate di una maggiorazione dell'errore di approssimazione.

A formule di tale tipo è già pervenuto il Tortorici⁽¹⁾ per gli integrali doppi operanti su una assegnata funzione in due variabili, applicando uno sviluppo tipo Taylor, per le funzioni di due variabili, nel quale l'ufficio delle derivate per le funzioni di una è prestato dalle così dette derivate totali dei vari ordini⁽²⁾.

Scopo di questa Nota è di fornire le dette formule per qualsivoglia valore di r .

Ovviamente, in possesso di esse si può effettuare il calcolo di un integrale r^{plo} impiegando quello di integrali d'ordine non superiore ad $r-2$, ai quali si perviene calcolando ognuno degli integrali già introdotti d'ordine $r-1$ impiegando integrali d'ordine non superiore ad $r-2$, se poi quelli fra questi d'ordine $r-2$ si calcolano alla loro volta impiegando integrali d'ordine non superiore ad $r-3$, si perverrà alla riduzione del primitivo integrale r^{plo} in somme di integrali d'ordine non superiore ad $r-3$ e, così via, si può pervenire infine ad una formula approssimata per il calcolo di un integrale r^{plo} impiegando solamente i valori della funzione, calcolati in certi punti del dominio d'integrazione, assegnando inoltre una maggiorazione dell'errore d'approssimazione.

I. FORMULA DI TAYLOR ALLE DERIVATE TOTALI. — Di una funzione $u(x, y, z)$, definita in un dominio rettangolare R di punti estremo inferiore (a', b', c') e superiore (a'', b'', c'') , chiamo, col Picone, *derivata totale* d'ordine n la seguente derivata parziale d'ordine $3n$

$$u^{(n)}(x, y, z) = \frac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n},$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) PAOLO TORTORICI, *Su un metodo numerico di calcolo approssimato per gli integrali doppi*. Pubblicazione I. N. A. C. n. 303 (Serie II), Roma 1951.

(2) MAURO PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, Rondinella, Editore 1940, vedi p. 598.

e nel seguito sottintenderemo sempre che una tale derivata sia continua in R con tutte le derivate parziali d'ordine minore.

Indichi (a, b, c) un punto interno ad R e $S[a, b, c]$ l'insieme dei tre piani $x = a, y = b, z = c$:

Supposto che di una $u(x, y, z)$ e delle prime sue n derivate totali successive siano assegnati i valori lungo $S[a, b, c]$, mediante arbitrarie funzioni continue

$$u^{(k)}(x, y, z) [\text{su } S[a, b, c]] = g_k(x, y, z) = u^{(k)}(x, y, c) + u^{(k)}(a, y, z) + u^{(k)}(x, b, z) + u^{(k)}(a, b, c) - u^{(k)}(x, b, c) - u^{(k)}(a, y, c) - u^{(k)}(a, b, z),$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, n$, mentrechè della $u^{(n+1)}(x, y, z)$ sia assegnato il valore in tutto R a mezzo di una affatto arbitraria funzione, si perviene, mediante l'opportuno procedimento ricorrente, alla sopradetta formula di Taylor esprimente la $u(x, y, z)$ in $R [(a', b', c'); (a'', b'', c'')]$

$$\begin{aligned} (I_{(3)}^{(n)}) \quad u(x, y, z) &= g_0(x, y, z) \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_a^x \int_b^y \int_c^z g_k(\xi, \eta, \zeta) \frac{[(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)]^{k-1}}{[(k-1)!]^3} d\xi d\eta d\zeta \\ &+ \int_a^x \int_b^y \int_c^z u^{(n+1)}(\xi, \eta, \zeta) \frac{[(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)]^n}{[n!]^3} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Nel caso generale in cui si operi nell' S_r con r qualunque, indichi $R[(a_1, a_2, \dots, a_r); (b_1, b_2, \dots, b_r)]$ il dominio rettangolare di punti estremo inferiore (a_1, \dots, a_r) e superiore (b_1, \dots, b_r) e sia (c_1, \dots, c_r) un assegnato punto interno a tale dominio. L'insieme degli r iperpiani $x_1 = c_1, \dots, x_r = c_r$ verrà nel seguito indicato ancora col simbolo $S[c_1, \dots, c_r]$.

Fissato un qualunque intero positivo s , con $s \leq r$, indichi (i_1, \dots, i_s) la generica *combinazione semplice*, di classe s , degli r numeri $1, \dots, r$, *priva di inversioni* e (j_1, \dots, j_{r-s}) indichi l'altra, di classe $r-s$, *pure priva di inversioni*, i cui elementi assieme a quelli della precedente esauriscono l'insieme di tutti gli interi da 1 ad r .

Per il seguito sarà talvolta conveniente indicare le funzioni non col simbolo usuale per disteso $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ma invece con l'altro $f \left(\begin{smallmatrix} x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \\ x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}} \end{smallmatrix} \right)$ più comodo del precedente per la struttura delle formule che qui si devono considerare.

Se per $k = 0, 1, \dots, n$ è

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x_1, \dots, x_r) [\text{su } S[c_1, \dots, c_r]] &= g_k(x_1, \dots, x_r) \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ \text{le } (i_1, \dots, i_s)}} u^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \\ c_{j_1}, \dots, c_{j_{r-s}} \end{smallmatrix} \right), \end{aligned}$$

con l'ultimo membro costituito dunque da $2^r - 1$ addendi, ciascuno dei quali è una arbitraria funzione continua delle $x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}}$, mentre che la $u^{(n+1)}$ si

intende assegnata invece in tutto il dominio R a mezzo di una qualunque funzione continua in R , la cercata formula, cui compete la naturale denominazione di *formula di Taylor nell' S_r* e che esprime la $u(x_1, \dots, x_r)$ in tutto $R[(a_1, \dots, a_r); (b_1, \dots, b_r)]$, è costituita dalla seguente notevole espressione

$$u(x_1, \dots, x_r) = g_0(x_1, \dots, x_r) + \sum_{k=1}^n \int_{c_1}^{x_1} \dots \int_{c_r}^{x_r} g_k(\xi_1, \dots, \xi_r) \frac{[(x_1 - \xi_1) \dots (x_r - \xi_r)]^{k-1}}{[(k-1)!]^r} d\xi_1 \dots d\xi_r \\ + \int_{c_1}^{x_1} \dots \int_{c_r}^{x_r} u^{(n+1)}(\xi_1, \dots, \xi_r) \frac{[(x_1 - \xi_1) \dots (x_r - \xi_r)]^n}{[n!]^r} d\xi_1 \dots d\xi_r.$$

2. FORMULA APPROSSIMATA PER IL CALCOLO DI UN INTEGRALE r^{plo} . - Per il seguito supporremo che il punto (c_1, \dots, c_r) sia il punto medio di $R[(a_1, \dots, a_r); (b_1, \dots, b_r)]$, cosicchè, essendo $d_1 = (b_1 - a_1)/2, \dots, d_r = (b_r - a_r)/2$, le r semi-dimensioni del dominio rettangolare R , risulta essere $a_1 = c_1 - d_1, b_1 = c_1 + d_1, \dots, a_r = c_r - d_r, b_r = c_r + d_r$.

Volendo in tal caso calcolare l'integrale r^{plo} , della u , esteso ad R , col servirsi della detta formula di Taylor, si trova che

$$(I) \quad \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_r}^{b_r} u(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r \\ = \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ \text{le } (i_1, \dots, i_s)}} 2^s \cdot d_{i_1} \dots d_{i_s} \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \dots \int_{a_{j_{r-s}}}^{b_{j_{r-s}}} u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}}) dx_{j_1} \dots dx_{j_{r-s}} \\ + \sum_{\substack{\text{per } k \text{ pari} \\ \text{da } 2 \text{ a } n}} \sum_{s=1}^r \frac{(-1)^{s-1} \cdot 2^s}{[(k+1)!]^s} \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ \text{le } (i_1, \dots, i_s)}} [d_{i_1} \dots d_{i_s}]^{k+1} \cdot \\ \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \dots \int_{a_{j_{r-s}}}^{b_{j_{r-s}}} dx_{j_1} \dots dx_{j_{r-s}} \int_{c_{j_1}}^{x_{j_1}} \dots \int_{c_{j_{r-s}}}^{x_{j_{r-s}}} u^{(k)}(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{r-s}}) \cdot \\ \frac{[(x_{j_1} - \xi_{j_1}) \dots (x_{j_{r-s}} - \xi_{j_{r-s}})]^{k-1}}{[(k-1)!]^{r-s}} d\xi_{j_1} \dots d\xi_{j_{r-s}} \\ + \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_r}^{b_r} dx_1 \dots dx_r \int_{c_1}^{x_1} \dots \int_{c_r}^{x_r} u^{(n+1)}(\xi_1, \dots, \xi_r) \frac{[(x_1 - \xi_1) \dots (x_r - \xi_r)]^n}{[n!]^r} d\xi_1 \dots d\xi_r,$$

cosicchè, se nel secondo membro di questa si scartasse l'ultimo addendo, qualora fosse nota una maggiorazione M_n di $|u^{(n+1)}(x_1, \dots, x_r)|$ in tutto R , allora l'espressione residua dà dell'integrale r^{plo} a primo membro un valore appros-

simato che scarta dal valore esatto a meno di un numero in valore assoluto non superiore di

$$\frac{M_n}{[(n+1)!]^r} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} |(x_1 - c_1) \cdots (x_r - c_r)|^{n+1} dx_1 \cdots dx_r \\ = \frac{M_n}{[(n+2)!]^r} \cdot 2^r \cdot [d_1 \cdots d_r]^{n+2} = \frac{M_n \cdot R^{n+2}}{[(n+2)!]^r \cdot 2^{(n+1)r}},$$

ove con R si è indicata la misura (su $S_{(r)}$) del dominio rettangolare R .

Se R ha dimensioni non piccole, conviene indicare con R_{h_1, \dots, h_r} il generico dominio rettangolare della decomposizione di R in m^r domini rettangolari eguali,

di semidimensioni $\alpha_1 = \frac{d_1}{m}, \dots, \alpha_r = \frac{d_r}{m}$. Va da sè che $\begin{cases} h_1 = 1, \dots, m \\ \dots \\ h_r = 1, \dots, m \end{cases}$. Indiche-

remo poi con $(c_{h_1}, \dots, c_{h_r})$ il centro di R_{h_1, \dots, h_r} . In relazione a R_{h_1, \dots, h_r} si consideri l'insieme $S[c_{h_1}, \dots, c_{h_r}]$ di r iperpiani e si applichi ad ogni singolo R_{h_1, \dots, h_r} la formula costituita dal secondo membro della (1), scartando l'ultimo addendo, per poi fare la somma delle m^r singole espressioni onde ottenere la nuova

formula, di approssimazione dell' $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} u(x_1, \dots, x_r) dx_1 \cdots dx_r$, che, meglio di

quella pertinente alla (1), si presta a dare dell'integrale r^{plo} un valore approssimato estremamente vicino al valore esatto dell'integrale. Si perviene alla formula

$$\sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^s \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ \text{le } (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_s)}} d_{i_1} \cdots d_{i_s} \sum_{\substack{h_{i_1}=1, \dots, m \\ \dots \\ h_{i_s}=1, \dots, m}} \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \cdots \int_{a_{j_{r-s}}}^{b_{j_{r-s}}} u \left(\begin{matrix} x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}} \\ c_{h_{i_1}}, \dots, c_{h_{i_s}} \end{matrix} \right) dx_{j_1} \cdots dx_{j_{r-s}} \\ \sum_{\substack{r \text{ pari} \\ 2 \leq r}} \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \left(\frac{2}{(k+1)! m^{k+1}} \right)^s \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ \text{le } (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_s)}} [d_{i_1} \cdots d_{i_s}]^{k+1} \sum_{\substack{h_{i_1}=1, \dots, m \\ \dots \\ h_{i_s}=1, \dots, m}} \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \cdots \int_{a_{j_{r-s}}}^{b_{j_{r-s}}} dx_{j_1} \cdots dx_{j_{r-s}} \int_{c_{h_{j_1}}}^{x_{j_1}} \cdots \\ \int_{c_{h_{j_{r-s}}}}^{x_{j_{r-s}}} 2d^{(k)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{r-s}} \\ c_{h_{i_1}}, \dots, c_{h_{i_s}} \end{matrix} \right) \cdot \frac{[(x_{j_1} - \xi_{j_1}) \cdots (x_{j_{r-s}} - \xi_{j_{r-s}})]^{k-1}}{[(k-1)!]^{r-s}} d\xi_{j_1} \cdots d\xi_{j_{r-s}},$$

ove, nell'ultimo termine, va inteso che presa una generica $(r-s)^{\text{pla}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}})$ i deve ad essa associare il dominio rettangolare

$$R_{h_{j_1}, \dots, h_{j_{r-s}}} \equiv R[(c_{h_{j_1}} - \alpha_{j_1}, \dots, c_{h_{j_{r-s}}} - \alpha_{j_{r-s}}) ; (c_{h_{j_1}} + \alpha_{j_1}, \dots, c_{h_{j_{r-s}}} + \alpha_{j_{r-s}})]$$

cui appartiene il punto scelto $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}})$ e valutare la espressione integrale

$$\text{relativa } \int_{c_{h_{j_1}}}^{x_{j_1}} \cdots \int_{c_{h_{j_{r-s}}}}^{x_{j_{r-s}}} \text{ (non definibile con valore unico quando } x_{j_1} = c_{h_{j_1}} \pm \alpha_{j_1}, \dots,)$$

che, così intesa, è funzione limitata e quasi continua di $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}})$.

Se in R è $|u^{(n+1)}(x_1, \dots, x_r)| \leq M_n$, usando la (2) l'errore che si commette è, in modulo, non superiore a

$$\left(\frac{2}{(n+2)!m^{n+1}}\right)^r \cdot M_n \cdot [d_1 \dots d_r]^{n+2}.$$

3. CASO PARTICOLARE. - La formula (2) assume aspetto singolarmente semplice quando si prenda $n=0$ ed $n=1$, ed è la seguente

$$(2') \quad \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^s \sum_{\substack{\text{per tutte} \\ 1 \leq (i_1, \dots, i_s)}} d_{i_1} \dots d_{i_s} \sum_{\substack{h_1=1, \dots, m \\ \dots \\ h_s=1, \dots, m}} \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} \dots \int_{a_{j_{r-s}}}^{b_{j_{r-s}}} u \left(\begin{matrix} x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-s}} \\ c_{h_{i_1}}, \dots, c_{h_{i_s}} \end{matrix} \right) dx_{j_1} \dots dx_{j_{r-s}}$$

e in relazione ad essa basterà tener presente che nel primo caso, cioè quando si sappia che in R è $|u^{(1)}(x_1, \dots, x_r)| \leq M_0$, l'errore che si commette è in modulo non superiore a $M_0 \cdot (1/m^r) \cdot [d_1 \dots d_r]^2$, mentrechè nel secondo caso, quando cioè si sappia che in R è $|u^{(2)}(x_1, \dots, x_r)| \leq M_1$, l'errore che si commette è in modulo non superiore a $M_1 \cdot (1/3^r \cdot m^{2r}) \cdot [d_1 \dots d_r]^3$, ove d_1, \dots, d_r sono le semidimensioni del dominio rettangolare R in cui s'intende calcolare l'integrale r -plo della $u(x_1, \dots, x_r)$.

Analisi matematica. — *Nota ad un lavoro di L. Toscano* (*).
Nota (**) di ARTHUR ERDÉLYI, presentata dal Socio M. PICONE.

In un suo recente lavoro (1), L. Toscano ha trovato una formula interessante che connette i polinomi di Laguerre ai polinomi ultrasferici. La relazione è:

$$(1) \quad \sqrt{\pi} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)_n L_n^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-x} (x+z)^n V_{2n}^{(2\alpha+1)} \left(\sqrt{\frac{z}{x+z}} \right) \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Usando la notazione (2) di Szegő dei polinomi ultrasferici:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = V_n^{(2\lambda)}(x),$$

e ponendo

$$\mathcal{L}_s \{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

detta relazione può essere riscritta così:

$$(2) \quad \sqrt{\pi} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)_n L_n^{(\alpha)}(s) = s^{n+1/2} \mathcal{L}_s \left\{ \frac{(1+t)^n}{\sqrt{t}} P_{2n}^{(\alpha+1/2)} \left(\sqrt{\frac{t}{1+t}} \right) \right\}.$$

(*) Promulgata dall'ufficio di ricerche Navali, U. S. A.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1951.

(1) *Relazione integrale dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre*. « Rendiconti dei Lincei », (8), VIII, 200-202 (1950).

(2) G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials*, New York, 1939.

La dimostrazione di Toscano è un po' involuta. Il fine di questa Nota è di provare che la dimostrazione diventa notevolmente più semplice se si parte dallo sviluppo di $P_n^{(\alpha)}(\mu)$ in serie di potenze di $1 - \mu^2$ sostituendo queste alle potenze di μ , impiegate dal Toscano. I dettagli sono i seguenti.

Abbiamo ⁽³⁾

$$P_{2n}^{(\alpha+1/2)}\left(\sqrt{\frac{t}{1+t}}\right) = \frac{(2\alpha+1)_{2n}}{(2n)!} F\left(-n, n + \alpha + \frac{1}{2}; \alpha + 1; \frac{1}{1+t}\right),$$

e se la trasformazione di Eulero è applicata alle serie ipergeometriche,

$$(1+t)^n P_{2n}^{(\alpha+1/2)}\left(\sqrt{\frac{t}{1+t}}\right) = \frac{(2\alpha+1)_{2n}}{(2n)!} t^n F\left(-n, \frac{1}{2} - n; \alpha + 1; -\frac{1}{t}\right),$$

quindi il membro a destra della (2) si scrive:

$$\frac{(2\alpha+1)_{2n}}{(2n)!} s^{n+1/2} \mathcal{L}_s \left\{ t^{n-1/2} F\left(-n, \frac{1}{2} - n; \alpha + 1; -\frac{1}{t}\right) \right\},$$

cioè, sviluppando e integrando termine a termine,

$$\frac{(2\alpha+1)_{2n}}{(2n)!} \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (1/2 - n)_r}{r! (\alpha+1)_r} F\left(n - r + \frac{1}{2}\right) (-s)^r,$$

e dopo alcune semplificazioni si perviene al membro sinistro della (2).

Il metodo dà una formula simile per polinomi ultrasferici di grado dispari:

$$(3) \quad \sqrt{\pi} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)_{n+1} L_n^{(\alpha)}(s) = s^{n+1/2} \mathcal{L}_s \left\{ (1+t)^{n+1/2} P_{2n+1}^{(\alpha+1/2)}\left(\sqrt{\frac{t}{1+t}}\right) \right\},$$

la cui dimostrazione è analoga alla precedente.

Meccanica. — *Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi.* Nota II di FILIPPO LATTANZI, presentata ^(*) dal Socio G. ARMELLINI.

Nella Nota precedente⁽¹⁾ sono state fissate le espressioni delle rotazioni intorno agli assi Y, Y' dell'estremità di un'asta curva OT considerata una volta vincolata in O, libera in T e soggetta ad un sistema di forze di linea Z; ed un'altra volta vincolata in T, libera in O e scarica.

6. In definitiva dunque, le rotazioni intorno agli assi Y ed Y' per l'azione simultanea dei due casi considerati, ricordando le (8) (13) (15) e (16), risultano:

$$\text{nella sezione O:} \quad \rho_y^O = (\rho_y^O)'' + (\rho_y^O)'$$

$$\text{nella sezione T:} \quad \rho_y^T = (\rho_y^T)'' + (\rho_y^T)'$$

(3) Loc. cit. 3, p. 80, equazione (4. 7. 6).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) Pubblicata in questi « Rendiconti », vol. X, fasc. 5, Maggio 1951.

cioè:

$$(17) \quad \rho_y^0 = \frac{1}{l} \cdot (l \cdot \beta' + \varepsilon') - \frac{\varepsilon}{l} = \beta' + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{l}$$

$$(18) \quad \rho_y^T = \frac{1}{l} \cdot (l \cdot \beta - \varepsilon) + \frac{\varepsilon'}{l} = \beta + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{l}.$$

Ricordando ora l'espressioni di ε' e ε (7) (14) per le quali:

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{l} = \frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^0 - \frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^T + \frac{S_x^0}{l^2} \cdot (\mu_x^0)' + \frac{S_x^T}{l} \cdot (\mu_x^T)' + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} - \frac{c}{l}$$

e quelle di β e β' (6) (13), sostituendo ed ordinando nelle (17) (18) abbiamo:

$$\begin{cases} \rho_y^0 = -\frac{l \cdot S_y^T - \mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^0 - \frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^T - \frac{l \cdot R_y^x - S_x^0}{l} \cdot (\mu_x^0)' + \frac{S_x^T}{l} \cdot (\mu_x^T)' + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} - \frac{c}{l} \\ \rho_y^T = +\frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^0 - \frac{l \cdot S_y^0 + \mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^T + \frac{S_x^0}{l} \cdot (\mu_x^0)' + \frac{l \cdot R_y^x + S_x^T}{l} \cdot (\mu_x^T)' + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} - \frac{c}{l} + b \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \rho_y^0 = \frac{\mathfrak{I}^T}{l^2} \cdot \mu_y^0 - \frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^T + \frac{S_x^T}{l} \cdot [(\mu_x^T)' + (\mu_x^0)'] + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} - \frac{c}{l} \\ \rho_y^T = \frac{\mathfrak{I}^{OT}}{l^2} \cdot \mu_y^0 - \frac{\mathfrak{I}^0}{l^2} \cdot \mu_y^T + \frac{S_x^0}{l} \cdot [(\mu_x^T)' + (\mu_x^0)'] + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} - \frac{c}{l} + b. \end{cases}$$

Ora dalle (5) (12) abbiamo:

$$(19) \quad (\mu_x^T)' + (\mu_x^0)' = -\frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^0 + \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^T - \frac{\rho_x^T - \rho_x^0}{R_x^x} + \frac{a}{R_x^x}$$

che sostituita nelle precedenti le trasforma, riducendo, nelle:

$$\begin{cases} \rho_y^0 = -\frac{\overline{S_x^T} - \mathfrak{I}^T \cdot R_x^x}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^0 + \frac{S_x^0 \cdot S_x^T - \mathfrak{I}^{OT} \cdot R_x^x}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^T - \frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} + \frac{S_x^T \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} \\ \rho_y^T = -\frac{S_y^0 \cdot S_x^T - \mathfrak{I}^{OT} \cdot R_x^x}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^0 + \frac{\overline{S_x^0} - \mathfrak{I}^0 \cdot R_x^x}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^T - \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} + \frac{S_x^0 \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} + b. \end{cases}$$

Ponendo in queste:

$$(20) \quad \mathfrak{I}^0 \cdot R_x^x - \overline{S_x^0} = A \quad (21) \quad \mathfrak{I}^T \cdot R_x^x - \overline{S_x^T} = A' \quad (22) \quad S_x^0 \cdot S_x^T - \mathfrak{I}^{OT} \cdot R_x^x = B$$

si hanno le:

$$\begin{cases} \rho_y^0 = +\frac{A'}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^0 + \frac{B}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^T - \frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} + \frac{S_x^T \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} \\ \rho_y^T = -\frac{B}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^0 - \frac{A}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mu_y^T - \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) + \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} + \frac{S_x^0 \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} + b. \end{cases}$$

Dalle quali, ponendo:

$$(23) \quad \mathcal{A} = \left(\frac{S_x^T \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} \right) \cdot l^2 \quad (24) \quad \mathcal{B} = \left(\frac{S_x^O \cdot a}{l \cdot R_x^x} - \frac{c}{l} + b \right) \cdot l^2$$

ed ordinando, avremo:

$$\begin{cases} A' \cdot \mu_y^O + B \mu_y^T = + l^2 \cdot R_x^x \cdot \rho_y^O + l \cdot S_x^T \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) - l \cdot R_x^x \cdot (\delta_x^T - \delta_x^O) - \mathcal{A} \cdot R_x^x \\ B \cdot \mu_y^O + A' \mu_y^T = - l^2 \cdot R_x^x \cdot \rho_y^T - l \cdot S_x^O \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) + l \cdot R_x^x \cdot (\delta_x^T - \delta_x^O) + \mathcal{B} \cdot R_x^x. \end{cases}$$

Le quali, risolte ponendo:

$$(25) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A' & B \\ B & A' \end{vmatrix} = A' \cdot A - B^2$$

ci danno:

$$\begin{aligned} \mu_y^O &= - \frac{(\mathcal{A}A + \mathcal{B}B) \cdot R_x^x}{\Delta} - \frac{l^2 \cdot R_x^x}{\Delta} \cdot \left[A \cdot \rho_y^O + B \cdot \rho_y^T + \frac{A \cdot S_x^T + B \cdot S_x^O}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) - (A + B) \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^O}{l} \right] \\ \mu_y^T &= + \frac{(A' \mathcal{B} + \mathcal{A}B) \cdot R_x^x}{\Delta} - \frac{l^2 \cdot R_x^x}{\Delta} \cdot \left[B \cdot \rho_y^O + A' \cdot \rho_y^T + \frac{A' \cdot S_x^O + B \cdot S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) - (A' + B) \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^O}{l} \right]. \end{aligned}$$

7. Ora, ricordando le (20) (21) (22), abbiamo:

$$\Delta = A' \cdot A - B^2 = (\mathfrak{J}^T \cdot R_x^x - S_x^{I^2}) \cdot (\mathfrak{J}^O \cdot R_x^x - \overline{S_x^O}^2) - (S_x^O \cdot S_x^T - \mathfrak{J}^{OT} \cdot R_x^x)^2$$

cioè:

$$\Delta = R_x^x [\mathfrak{J}^O \cdot \mathfrak{J}^T - \overline{\mathfrak{J}^{OT}}^2] - \mathfrak{J}^O \cdot \overline{S_x^T}^2 - \mathfrak{J}^T \cdot \overline{S_x^O}^2 + 2 \cdot S_x^O \cdot S_x^T \cdot \mathfrak{J}^{OT}.$$

Ponendo ora:

$$(26) \quad C = \frac{A \cdot S_x^T + B \cdot S_x^O}{l \cdot R_x^x} \quad (27) \quad C' = \frac{A' \cdot S_x^O + B \cdot S_x^T}{l \cdot R_x^x}$$

$$(28) \quad D = A + B \quad (29) \quad D' = A' + B$$

$$(30) \quad W = \frac{\Delta}{R_x^x} = R_x^x \cdot (\mathfrak{J}^O \cdot \mathfrak{J}^T - \overline{\mathfrak{J}^{OT}}^2) - \mathfrak{J}^O \cdot \overline{S_x^T}^2 - \mathfrak{J}^T \cdot \overline{S_x^O}^2 + 2 \cdot S_x^O \cdot S_x^T \cdot \mathfrak{J}^{OT}$$

ed inoltre:

$$(31) \quad \mathfrak{N}_y^O = - \frac{(\mathcal{A}A + \mathcal{B}B) \cdot R_x^x}{\Delta} = - \frac{\mathcal{A}A + \mathcal{B}B}{W} \quad (32) \quad \mathfrak{N}_y^T = \frac{(\mathcal{A}' \mathcal{B} + \mathcal{A}B) \cdot R_x^x}{\Delta} = \frac{\mathcal{A}' \mathcal{B} + \mathcal{A}B}{W}$$

avremo in definitiva:

$$(33) \quad \mu_y^O = \mathfrak{N}_y^O + \frac{l^2}{W} \cdot \left[A \cdot \rho_y^O + B \cdot \rho_y^T + C \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) - D \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^O}{l} \right]$$

$$(34) \quad \mu_y^T = \mathfrak{N}_y^T - \frac{l^2}{W} \cdot \left[B \cdot \rho_y^O + A' \cdot \rho_y^T + C' \cdot (\rho_x^T - \rho_x^O) - D' \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^O}{l} \right]$$

che ci danno i valori dei momenti di asse parallelo ad Y agli estremi O, T, in funzione delle deformazioni delle sezioni terminali O, T, e dei momenti \mathfrak{N}_y^O e \mathfrak{N}_y^T di asse pure parallelo ad Y, il significato dei quali è ovviamente quello dei momenti di estremità dell'asta OT perfettamente incastrata agli estremi.

8. Per la determinazione dei momenti di asse X e delle forze di linea Z di estremità sommeremo quelli relativi ai due casi presi in esame e cioè le (5) (12) per i valori μ_x^T e le (2) (11) per F_s^T . Avremo:

$$(35) \quad \mu_x^T = (\mu_x^T)' + (\mu_x^T)'' \quad (36) \quad F_s^T = (F_s^T)' + (F_s^T)''.$$

La (35) per essere $(\mu_x^T)' = (\mu_x^0)'$ risulta uguale alla (19) dalla quale, sostituendovi le (33) (34), ponendo:

$$(37) \quad \mathfrak{M}_x^T = -\frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{M}_y^0 + \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{M}_y^T + \frac{a}{R_x^x}$$

ed ordinando, abbiamo:

$$\mu_x^T = \mathfrak{M}_x^T - \frac{l^2}{W} \cdot \left[\frac{A \cdot S_x^T + B \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \rho_y^0 + \frac{B \cdot S_x^T + A' \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \rho_y^T + \frac{l C \cdot S_x^T + l C' \cdot S_x^0 + W}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - \frac{D \cdot S_x^T + D' \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \frac{\delta_s^T - \delta_s^0}{l} \right]$$

ponendo in questa:

$$(38) \quad E = \frac{l \cdot C \cdot S_x^T + l \cdot C' \cdot S_x^0 + W}{l^2 \cdot R_x^x} \quad (39) \quad G = \frac{D \cdot S_x^T + D' \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} = \frac{(A+B) \cdot S_x^T + (A'+B) \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} = C +$$

abbiamo:

$$(40) \quad \mu_x^T = \mathfrak{M}_x^T - \frac{l^2}{W} \cdot \left[C \cdot \rho_y^0 + C' \cdot \rho_y^T + E \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - G \cdot \frac{\delta_s^T - \delta_s^0}{l} \right]$$

mentre

$$\mu_x^0 = \mu_x^T - M_0^x$$

dove \mathfrak{M}_x^T è il momento in T di asse X per asta perfettamente incastrata agli estremi.

Dalla (36) abbiamo:

$$F_s^T = \frac{1}{l} \cdot \mu_y^0 - \frac{1}{l} \cdot \mu_y^T + \frac{1}{l} \cdot M_y^0$$

dalla quale, sostituendovi le (33) (34), ponendo:

$$(41) \quad \mathfrak{F}_s^T = \frac{(\mathfrak{M}_y^0 - \mathfrak{M}_y^T)}{l} + \frac{M_y^0}{l}$$

ed ordinando, abbiamo:

$$F_s^T = \mathfrak{F}_s^T + \frac{l}{W} \cdot \left[(A+B) \cdot \rho_y^0 + (A'+B) \cdot \rho_y^T + (C+C') \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - (D+D') \cdot \frac{\delta_s^T - \delta_s^0}{l} \right]$$

da cui, ponendo $H = D + D'$ si ha:

$$(42) \quad F_s^T = \mathfrak{F}_s^T + \frac{l}{W} \cdot \left[D \cdot \rho_y^0 + D' \cdot \rho_y^T + G' \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - H \cdot \frac{\delta_s^T - \delta_s^0}{l} \right]$$

mentre

$$F_s^0 = F_s^T - F_s^T$$

dove \mathfrak{F}_s^T rappresenta la forza in T di linea Z per asta perfettamente incastrata agli estremi.

Le equazioni risolutive saranno quindi in definitiva:

$$(I) \left\{ \begin{aligned} \mu_y^0 &= \mathfrak{N}_y^0 + \frac{l^2}{W} \cdot \left[A \cdot \rho_y^0 + B \cdot \rho_y^T + C \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - D \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} \right] \\ \mu_y^T &= \mathfrak{N}_y^T - \frac{l^2}{W} \cdot \left[B \cdot \rho_y^0 + A' \cdot \rho_x^T + C' \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - D' \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} \right] \\ \mu_x^T &= \mathfrak{N}_x^T - \frac{l^2}{W} \cdot \left[C \cdot \rho_y^0 + C' \cdot \rho_y^T + E \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - G \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} \right] & \mu_x^0 &= \mu_x^T - M_x^0 \\ F_x^T &= \mathfrak{F}_x^T + \frac{l}{W} \cdot \left[D \cdot \rho_y^0 + D' \cdot \rho_y^T + G \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) - H \cdot \frac{\delta_x^T - \delta_x^0}{l} \right] & F_x^0 &= F_x^T - F_x. \end{aligned} \right.$$

9. Riprendiamo ora le formule (31) (32) (37) (41) che ci danno i valori dei parametri delle reazioni nelle sezioni O, T di estremità dell'asta considerata ivi perfettamente incastrata, allo scopo di esprimerle in funzione delle deformazioni dell'estremo T dell'asta considerata rigidamente incastrata in O e libera in T; e cioè in funzione di \mathfrak{R}_x^T , \mathfrak{R}_y^T e Δ_x^T . Ritorniamo perciò alle (23) (24) ed esprimiamole in funzione di queste stesse deformazioni.

Ricordando le (4) avremo:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= l^2 \cdot \left[\frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \left(\mathfrak{R}_x^T - \frac{M_y^0}{l} \cdot S_x^T \right) - \frac{1}{l} \cdot \left(\Delta_x^T - \frac{M_y^0}{l} \cdot \mathfrak{F}_x^T \right) \right] \\ \mathfrak{B} &= l^2 \cdot \left[\frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \left(\mathfrak{R}_x^T - \frac{M_y^0}{l} \cdot S_x^T \right) - \frac{1}{l} \cdot \left(\Delta_x^T - \frac{M_y^0}{l} \cdot \mathfrak{F}_x^T \right) + \mathfrak{R}_y^T + \frac{M_y^0}{l} \cdot S_x^T \right] \end{aligned} \right.$$

e cioè:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left[\frac{\mathfrak{F}_x^T \cdot R_x^x - S_x^{T^2}}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot M_y^0 + \frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - \frac{\Delta_x^T}{l} \right] \cdot l^2 \\ \mathfrak{B} &= \left[\frac{\mathfrak{F}_x^{0T} \cdot R_x^x - S_x^0 \cdot S_x^T}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot M_y^0 + \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - \frac{\Delta_x^T}{l} + \mathfrak{R}_y^T \right] \cdot l^2 \end{aligned} \right.$$

da cui:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left[\frac{A'}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot M_y^0 + \frac{S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - \frac{\Delta_x^T}{l} \right] \cdot l^2 \\ \mathfrak{B} &= \left[\frac{B}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot M_y^0 + \frac{S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - \frac{\Delta_x^T}{l} + \mathfrak{R}_y^T \right] \cdot l^2 \end{aligned} \right.$$

sostituendo tali valori nelle formule prima citate ed operando le necessarie riduzioni e sostituzioni avremo:

per i momenti di asse Y:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_y^0 &= -\frac{\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B}{W} = -\frac{AA' - B^2}{W \cdot R_x^x} \cdot M_y^0 - \frac{l^2}{W} \cdot \left[B \cdot \mathfrak{R}_y^T + \frac{A \cdot S_x^T + B \cdot S_x^0}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - (A + B) \cdot \frac{\Delta_x^T}{l} \right] \\ \mathfrak{N}_y^T &= +\frac{A' \cdot \mathfrak{B} + B \cdot \mathfrak{A}}{W} = +\frac{l^2}{W} \cdot \left[A' \cdot \mathfrak{R}_y^T + \frac{A' \cdot S_x^0 + B \cdot S_x^T}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^T - (A' + B) \cdot \frac{\Delta_x^T}{l} \right] \end{aligned} \right.$$

quindi, essendo $AA' - B^2 = \Delta = W \cdot R_x^x$:

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_y^o = -\frac{l^2}{W} \cdot \left(B \cdot \mathfrak{R}_y^r + C \cdot \mathfrak{R}_x^r - D \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) - M_y^o \\ \mathfrak{N}_y^r = +\frac{l^2}{W} \cdot \left(A' \cdot \mathfrak{R}_y^r - C' \cdot \mathfrak{R}_x^r + D' \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) \end{cases}$$

per i momenti di asse X:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_x^r &= -\frac{S_x^r}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{N}_y^o + \frac{S_x^o}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{N}_y^r + \frac{a}{R_x^x} \\ &= \frac{l^2}{W} \cdot \left[\left(B \cdot \frac{S_x^r}{l \cdot R_x^x} + A' \cdot \frac{S_x^o}{l \cdot R_x^x} \right) \cdot \mathfrak{R}_y^r + \left(C \cdot \frac{S_x^r}{l \cdot R_x^x} + C' \cdot \frac{S_x^o}{l \cdot R_x^x} + \frac{W}{l^2 \cdot R_x^x} \right) \mathfrak{R}_x^r - \left(D \cdot \frac{S_x^r}{l \cdot R_x^x} + D' \cdot \frac{S_x^o}{l \cdot R_x^x} \right) \right] \\ &= \frac{l^2}{W} \cdot \left[\frac{B \cdot S_x^r + A' \cdot S_x^o}{l \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_y^r - \frac{l \cdot C \cdot S_x^r + l \cdot C' \cdot S_x^o + W}{l^2 \cdot R_x^x} \cdot \mathfrak{R}_x^r + \frac{D \cdot S_x^r + D' \cdot S_x^o}{l \cdot R_x^x} \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right] \end{aligned}$$

quindi:

$$\mathfrak{N}_x^r = \frac{l^2}{W} \cdot \left(C' \cdot \mathfrak{R}_y^r + E \cdot \mathfrak{R}_x^r - G \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) \quad \text{mentre } \mathfrak{N}_x^o = \mathfrak{N}_x^r - M_x^o$$

per le forze di linea Z:

$$\mathfrak{F}_s^r = \frac{(\mathfrak{N}_y^o - \mathfrak{N}_y^r)}{l} + \frac{M_y^o}{l} = -\frac{l}{W} \cdot \left[(B + A') \cdot \mathfrak{R}_y^r + (C + C') \cdot \mathfrak{R}_x^r - (D + D') \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right]$$

quindi:

$$\mathfrak{F}_s^r = -\frac{l}{W} \cdot \left(D' \cdot \mathfrak{R}_y^r + G \cdot \mathfrak{R}_x^r - H \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) \quad \text{mentre } \mathfrak{F}_s^o = \mathfrak{F}_s^r - F_s$$

che possiamo tutte raggruppare nelle:

$$(II) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}_y^o = -\frac{l^2}{W} \cdot \left(B \cdot \mathfrak{R}_y^r + C \cdot \mathfrak{R}_x^r - D \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) - M_y^o \\ \mathfrak{N}_y^r = +\frac{l^2}{W} \cdot \left(A' \cdot \mathfrak{R}_y^r + C' \cdot \mathfrak{R}_x^r - D' \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) \\ \mathfrak{N}_x^r = +\frac{l^2}{W} \cdot \left(C' \cdot \mathfrak{R}_y^r + E \cdot \mathfrak{R}_x^r - G \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) & \mathfrak{N}_x^o = \mathfrak{N}_x^r - M_x^o \\ \mathfrak{F}_s^r = -\frac{l}{W} \cdot \left(D' \cdot \mathfrak{R}_y^r + G \cdot \mathfrak{R}_x^r - H \cdot \frac{\Delta_s^r}{l} \right) & \mathfrak{F}_s^o = \mathfrak{F}_s^r - F_s \end{cases}$$

10. Riprendiamo ora i valori dei coefficienti che compaiono nei gruppi di equazioni (I) e (II) e determiniamo le loro espressioni definitive.

Ricordando che:

$$A = \mathfrak{J}^o \cdot R_x^x - \overline{S_x^2} \quad A' = \mathfrak{J}^r \cdot R_x^x - \overline{S_x^2} \quad B = S_x^o \cdot S_x^r - \mathfrak{J}^{or} \cdot R_x^x$$

avremo:

$$C = \frac{A \cdot S_x^T + B \cdot S_x^O}{l \cdot R_x^x} = \frac{\vartheta^O \cdot S_x^T \cdot R_x^x - \overline{S_x^O}^2 \cdot S_x^T + \overline{S_x^O}^2 \cdot S_x^T - \vartheta^{OT} \cdot S_x^O \cdot R_x^x}{l \cdot R_x^x} = \frac{\vartheta^O \cdot S_x^T - \vartheta^{OT} \cdot S_x^O}{l}$$

$$C' = \frac{A' \cdot S_x^O + B' \cdot S_x^T}{l \cdot R_x^x} = \frac{\vartheta^T \cdot S_x^O - \vartheta^{OT} \cdot S_x^T}{l}$$

$$D = A + B = \vartheta^O \cdot R_x^x - \overline{S_x^O}^2 + S_x^O \cdot S_x^T - \vartheta^{OT} \cdot R_x^x = S_x^O \cdot (S_x^T - S_x^O) + R_x^x \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT})$$

$$D' = A' + B' = S_x^T \cdot (S_x^O - S_x^T) + R_x^x \cdot (\vartheta^T - \vartheta^{OT})$$

$$E = \frac{l \cdot C \cdot S_x^T + l \cdot C' \cdot S_x^O + W}{l^2 \cdot R_x^x} = \frac{\vartheta^O \cdot \vartheta^T - \overline{\vartheta^{OT}}^2}{l^2}$$

$$G = C + C' = \frac{S_x^T \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT}) + S_x^O \cdot (\vartheta^T - \vartheta^{OT})}{l}$$

$$H = D + D' = A + A' + 2B = R_x^x \cdot (\vartheta^O + \vartheta^T - 2 \cdot \vartheta^{OT}) - (S_x^T - S_x^O)^2$$

$$W = R_x^x \cdot (\vartheta^T \cdot \vartheta^O - \overline{\vartheta^{OT}}^2) - \vartheta^O \cdot \overline{S_x^T}^2 - \vartheta^T \cdot \overline{S_x^O}^2 + 2 \cdot S_x^T \cdot S_x^O \cdot \vartheta^{OT}.$$

Nel caso di asta simmetrica gli assi dell'ellisse di elasticità trasversale si dispongono parallelamente agli assi X ed Y per cui la componente orizzontale della Γ^x e quella verticale della Γ^y si annullano.

Sarà cioè:

$$R_y^x = R_x^y = 0$$

quindi:

$$S_x^T = S_x^O \quad R_y^y \equiv R^y \quad R_x^x \equiv R^x \quad \vartheta^T = \vartheta^O$$

per cui:

$$A = A' = R^x \cdot \vartheta^O - \overline{S_x^O}^2 \quad B = \overline{S_x^O}^2 - \vartheta^{OT} \cdot R^x \quad C = C' = \frac{S_x^O \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT})}{l}$$

$$D = D' = R^x \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT}) \quad E = \frac{\overline{\vartheta^O}^2 - \overline{\vartheta^{OT}}^2}{l^2} \quad G = \frac{2 \cdot S_x^O \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT})}{l} = 2 \cdot C$$

$$H = 2 \cdot R^x \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT}) = 2 \cdot D \quad W = R^x \cdot (\overline{\vartheta^O}^2 - \overline{\vartheta^{OT}}^2) - 2 \cdot \overline{S_x^O}^2 \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT}).$$

Se supponiamo che l'asta curva degeneri in una retta, sarà:

a) nel caso di asta retta e dissimmetrica:

$$S_x^T \equiv S_x^O = 0 \quad R_x^x \equiv R^x \quad R_y^y \equiv R^y$$

quindi:

$$A = R^x \cdot \vartheta^O \quad A' = R^x \cdot \vartheta^T \quad B = -R^x \cdot \vartheta^{OT}$$

$$C = C' = 0 \quad D = R^x \cdot (\vartheta^O - \vartheta^{OT}) \quad D' = R^x \cdot (\vartheta^T - \vartheta^{OT})$$

$$E = \frac{\vartheta^O \cdot \vartheta^{OT} - \overline{\vartheta^{OT}}^2}{l^2} \quad G = 0 \quad H = R^x \cdot (\vartheta^T + \vartheta^O - 2 \cdot \vartheta^{OT})$$

$$W = R^x \cdot (\vartheta^O \cdot \vartheta^T - \overline{\vartheta^{OT}}^2)$$

per cui le equazioni dei gruppi (I) e (II) assumeranno le note forme seguenti:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_y^o = \mathfrak{N}_y^o + \frac{l^2}{K} \cdot \left(+ \mathfrak{J}^o \cdot \rho_y^o - \mathfrak{J}^{or} \cdot \rho_y^r - L \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \\ \mu_y^r = \mathfrak{N}_y^r - \frac{l^2}{K} \cdot \left(- \mathfrak{J}^{or} \cdot \rho_y^o + \mathfrak{J}^r \cdot \rho_y^r - L' \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \\ \mu_x^r = \mathfrak{N}_x^r - \frac{l}{R_x} \cdot (\rho_x^r - \rho_x^o) \quad \mu_x^o = \mu_x^r - M_x^o \\ F_z^r = \mathfrak{F}_z^r + \frac{l}{K} \cdot \left(L \cdot \rho_y^o + L' \cdot \rho_y^r - N \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \quad F_z^o = F_z^r - F_z \end{array} \right.$$

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_y^o = - \frac{l^2}{K} \cdot \left(- \mathfrak{J}^{or} \cdot \mathfrak{R}_y^r - L \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) - M_y^o \\ \mathfrak{N}_y^r = + \frac{l^2}{K} \cdot \left(+ \mathfrak{J}^r \cdot \mathfrak{R}_y^r - L' \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) \\ \mathfrak{N}_x^r = + \frac{l}{R_x} \cdot \mathfrak{R}_x^r \quad \mathfrak{N}_x^o = \mathfrak{N}_x^r - M_x^o \\ \mathfrak{F}_z^r = - \frac{l}{K} \cdot \left(L' \cdot \mathfrak{R}_y^r - N \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) \quad \mathfrak{F}_z^o = \mathfrak{F}_z^r - F_z \end{array} \right.$$

ove: $K = \mathfrak{J}^o \cdot \mathfrak{J}^r - \mathfrak{J}^{or^2}$ $L = \mathfrak{J}^o - \mathfrak{J}^{or}$ $L' = \mathfrak{J}^r - \mathfrak{J}^{or}$ $N = \mathfrak{J}^r + \mathfrak{J}^o - 2 \cdot \mathfrak{J}^{or}$

b) nel caso di asta retta e simmetrica: $\mathfrak{J}^o = \mathfrak{J}^r$ quindi:

$$K = \mathfrak{J}^{o^2} - \mathfrak{J}^{or^2} \quad L = L' = \mathfrak{J}^o - \mathfrak{J}^{or} \quad N = 2 \cdot (\mathfrak{J}^o - \mathfrak{J}^r) = 2 \cdot L$$

$$\frac{L}{K} = \frac{\mathfrak{J}^o - \mathfrak{J}^{or}}{(\mathfrak{J}^o - \mathfrak{J}^{or}) \cdot (\mathfrak{J}^o + \mathfrak{J}^{or})} = \frac{1}{\mathfrak{J}^o + \mathfrak{J}^{or}} = \frac{1}{K'}$$

per cui le precedenti equazioni si riducono alle:

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_y^o = \mathfrak{N}_y^o + \frac{l^2}{K} \cdot \left(+ \mathfrak{J}^o \cdot \rho_y^o - \mathfrak{J}^{or} \cdot \rho_y^r - L \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \\ \mu_y^r = \mathfrak{N}_y^r - \frac{l^2}{K} \cdot \left(- \mathfrak{J}^{or} \cdot \rho_y^o + \mathfrak{J}^o \cdot \rho_y^r - L \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \\ \mu_x^r = \mathfrak{N}_x^r - \frac{l}{R_x} \cdot (\rho_x^r - \rho_x^o) \quad \mu_x^o = \mu_x^r - M_x^o \\ F_z^r = \mathfrak{F}_z^r + \frac{l}{K'} \cdot \left(\rho_y^o + \rho_y^r - 2 \cdot \frac{\delta_z^r - \delta_z^o}{l} \right) \quad F_z^o = F_z^r - F_z \end{array} \right.$$

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_y^o = - \frac{l^2}{K} \cdot \left(- \mathfrak{J}^{or} \cdot \mathfrak{R}_y^r - L \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) - M_y^o \\ \mathfrak{N}_y^r = + \frac{l^2}{K} \cdot \left(+ \mathfrak{J}^o \cdot \mathfrak{R}_y^r - L \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) \\ \mathfrak{N}_x^r = + \frac{l}{R_x} \cdot \mathfrak{R}_x^r \quad \mathfrak{N}_x^o = \mathfrak{N}_x^r - M_x^o \\ \mathfrak{F}_z^r = - \frac{l}{K'} \cdot \left(\mathfrak{R}_y^r - 2 \cdot \frac{\Delta_z^r}{l} \right) \quad \mathfrak{F}_z^o = \mathfrak{F}_z^r - F_z \end{array} \right.$$

Dinamica dei fluidi. — *Sul calcolo dell'interferenza elica-ala.*

Nota di ALDO MUGGIA, presentata (*) dal Corrisp. C. FERRARI.

1. La distribuzione della portanza sull'apertura di un'ala è influenzata dalla scia dell'elica. Fuori della scia l'ala è investita da una corrente di velocità V_0 , entro la scia da una corrente di velocità SV_0 ; sul contorno della scia devono essere soddisfatte le condizioni (1)

$$(1) \quad \varphi_I = S\varphi_{II} \quad , \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{II} = S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_I,$$

in cui φ è il potenziale della perturbazione, $\partial/\partial n$ indica derivazione in direzione normale alla superficie e gli indici I e II indicano rispettivamente le regioni esterna e interna alla scia.

Ci limitiamo a considerare il caso in cui si ha ala media, elica in corrente assiale, e si ha simmetria rispetto a un piano normale all'apertura alare. Non si tiene conto delle componenti della velocità derivanti dalla rotazione dell'elica, il che non altera sostanzialmente il calcolo.

Individuiamo le varie sezioni alari mediante una coordinata $\eta = \cos \vartheta$, variabile da -1 a $+1$ lungo l'apertura, e sia $\Gamma = 2bV_0\gamma$ (essendo $2b$ l'apertura) la circuitazione della velocità attorno a una generica sezione.

2. Si soddisfa alle (1) aggiungendo al campo prodotto dai vortici liberi il campo prodotto da altri vortici, e precisamente: nella regione esterna il campo dei vortici interni moltiplicati per $-D$ più quello dei vortici immagine (rispetto al disco dell'elica) degli esterni moltiplicati per $-C$, e nella regione interna il campo dei vortici esterni moltiplicati per $-D$ e dei vortici immagine degli interni moltiplicati per $+C$, avendo posto:

$$C = \frac{S^2 - 1}{S^2 + 1} \quad , \quad D = \frac{(S - 1)^2}{S^2 + 1}.$$

Indichiamo con $2hb$ il tratto di apertura investito dalla scia. Per $\eta = \pm h$, $\gamma(\eta)$ è discontinua, perchè continua deve essere la portanza per unità di lunghezza; quindi in tali punti hanno origine due vortici concentrati e valgono le relazioni seguenti, deducibili dalle (1):

$$(2) \quad \gamma_I = S\gamma_{II} \quad , \quad \left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)_{II} = S\left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)_I.$$

(*) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) C. KONING, *Influence of the propeller on other parts of the airplane structure* (su DURAND. *Aerodynamic theory*, vol. IV); A. FRANKE und F. WEINIG, *Tragflügel und Schraubenstrahl*. «Luftfahrtforschung», Bd. 15, Lfg. 6, 1938.

Detta $w_o(\gamma)$ la velocità indotta nella sezione η dai vortici liberi corrispondenti a γ e $w_i(\gamma)$ la velocità indotta dai vortici ad essi associati, si ha:

$$\frac{w_o(\gamma)}{V_o} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_{II} - \gamma_I}{\eta + h} + \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_I - \gamma_{II}}{\eta - h};$$

per $|\eta| > h$

$$\begin{aligned} \frac{w_i(\gamma)}{V_o} = & -\frac{D}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \frac{D}{2\pi} \frac{\gamma_{II}}{\eta + h} + \frac{D}{2\pi} \frac{\gamma_{II}}{\eta - h} - \\ & - \frac{C}{2\pi} \int_{-1}^{-h} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - h^2/\eta'} - \frac{C}{2\pi} \int_h^1 \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - h^2/\eta'} + \frac{C}{2\pi} \frac{\gamma_I}{\eta + h} - \frac{C}{2\pi} \frac{\gamma_I}{\eta - h} \end{aligned}$$

e per $|\eta| < h$

$$\begin{aligned} \frac{w_i(\gamma)}{V_o} = & -\frac{D}{2\pi} \int_{-1}^{-h} \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \frac{D}{2\pi} \int_h^1 \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \frac{D}{2\pi} \frac{\gamma_I}{\eta - h} - \frac{D}{2\pi} \frac{\gamma_I}{\eta - h} + \\ & + \frac{C}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{d\gamma}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - h^2/\eta'} + \frac{C}{2\pi} \frac{\gamma_{II}}{\eta + h} - \frac{C}{2\pi} \frac{\gamma_{II}}{\eta - h}. \end{aligned}$$

3. Indichiamo con $\alpha(\eta)$ l'incidenza geometrica, con c_p il coefficiente angolare di portanza relativo alle sezioni alari, con $\sigma(\eta)$ il rapporto della corda alla semiapertura, con v_x l'incremento assiale di velocità dovuto all'elica; l'equazione integro-differenziale che determina γ risulta:

$$(3) \quad \frac{w_o(\gamma)}{V_o} + \frac{w_i(\gamma)}{V_o} + \frac{4\gamma}{\sigma(\eta) \cdot c_p} = \alpha(\eta) + \alpha(\eta) \frac{v_x}{V_o}$$

$$\frac{v_x}{V_o} = \begin{cases} 0 & \text{per } |\eta| > h \\ S-1 & \text{per } |\eta| < h. \end{cases}$$

Osserviamo che imponendo al primo membro della (3) di mantenersi finito si riottengono le condizioni (2).

Poniamo $\gamma = \gamma_e + \gamma_d$ (γ_e continuo e γ_d discontinuo):

$$\gamma_d = \begin{cases} 0 & \text{per } |\eta| > h \\ -a_1 - a_2 \eta^2 & \text{per } |\eta| < h \end{cases}$$

$$\gamma_e = \frac{2}{m+1} \sum_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \sum_{\mu=1}^m \sin \mu \vartheta_{\nu} \sin \mu \vartheta + \alpha_k \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_{\mu} \sin \mu \vartheta$$

$$\vartheta_1 = \pi - 2 \vartheta_o + \sin 2 \vartheta_o \quad \left(\eta = \cos \vartheta, \quad h = \cos \vartheta_o, \quad \vartheta_n = \frac{n\pi}{m+1} \right)$$

$$\beta_\mu = \frac{8}{\pi\mu} \left[\frac{\sin(\mu+1)\vartheta_0}{\mu+1} - \frac{\sin(\mu-1)\vartheta_0}{\mu-1} \right] \quad \text{per } \mu = 3, 5, 7, \dots$$

$$\beta_\mu = 0 \quad \text{per } \mu = 2, 4, 6, \dots \quad (2)$$

Il termine di γ_c in α_k corrisponde a

$$\frac{w_0}{V_0} = \begin{cases} 0 & \text{per } |\eta| > h \\ 2\alpha_k & \text{per } |\eta| < h. \end{cases}$$

La costante α_k verrà determinata in seguito. Anche le costanti a_1, a_2 si determineranno più avanti, imponendo che siano verificate le (2), il che porta al sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_c(h) = \frac{S}{S-1} (a_1 + a_2 h^2) \\ \frac{d\gamma_c}{d\eta}(h) = -\frac{2a_2 h}{S-1}. \end{cases}$$

4. Le γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$) si possono ricavare con un procedimento analogo a quello di Multhopp per l'ala isolata (3). Posto $\alpha_v = \alpha(\eta_v)$, $\sigma_v = \sigma(\eta_v)$, si ha:

$$\text{se } |\eta_v| \geq h \quad \left(A_{vv} + \frac{4}{\sigma_v c'_p} \right) \gamma_v + \sum_n A_{vn} \gamma_n + M(\eta_v) a_2 + M'(\eta_v) + \frac{4\alpha_k}{\sigma_v c'_p} \sum_\mu \beta_\mu \sin \mu \vartheta_v = \alpha_v$$

e se $|\eta_v| \leq h$

$$\begin{aligned} & \left(B_{vv} + \frac{4}{\sigma_v c'_p} \right) \gamma_v + \sum_n B_{vn} \gamma_n + N(\eta_v) a_2 + N'(\eta_v) - \frac{4}{\sigma_v c'_p} (a_1 + a_2 \eta_v^2) + \\ & + 2\alpha_k + \frac{4\alpha_k}{\sigma_v c'_p} \sum_\mu \beta_\mu \sin \mu \vartheta_v = \alpha_v S, \end{aligned}$$

essendo (b_{vv} e b_{vn} sono i coefficienti di Multhopp):

$$\begin{aligned} I_\mu(\vartheta) &= \int \frac{\cos \mu \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} & I_{\mu v} &= I_\mu(\vartheta_v) & I'_\mu &= \int_0^{\vartheta_0} \dots & I''_\mu &= \int_{\vartheta_0}^{\pi - \vartheta_0} \dots & I'''_\mu &= \int_{\pi - \vartheta_0}^{\pi} \dots \\ J_\mu(\vartheta) &= \int \frac{\cos \mu \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta - \cos^2 \vartheta_0 / \cos \vartheta'} & J_{\mu v} &= J_\mu(\vartheta_v) & J'_\mu &= \int_0^{\vartheta_0} \dots & J''_\mu &= \int_{\vartheta_0}^{\pi - \vartheta_0} \dots & J'''_\mu &= \int_{\pi - \vartheta_0}^{\pi} \dots \end{aligned}$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned} \sum_\mu \beta_\mu \sin \mu \vartheta &= \frac{4}{\pi} \left[(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln \left| \frac{\cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}}{\cos \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}} \right| - \right. \\ & \left. - (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \ln \left| \frac{\sin \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}} \right| + (\pi - 2\vartheta_0) \sin \vartheta \right]. \end{aligned}$$

(3) H. MULTHOPP, *Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln*. « Luftfahrtforschung », Bd. 15, Lfg. 4, 1938.

$$A_{vv} = b_{vv} + \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{\mu}^m \mu \operatorname{sen} \mu \vartheta_v \cdot [D \cdot I''_{\mu v} + C (J'_{\mu v} + J''_{\mu v})]$$

$$A_{vn} = -b_{vn} + \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{\mu}^m \mu \operatorname{sen} \mu \vartheta_n \cdot [D \cdot I''_{\mu v} + C (J'_{\mu v} + J''_{\mu v})]$$

$$B_{vv} = b_{vv} + \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{\mu}^m \mu \operatorname{sen} \mu \vartheta_v \cdot [D (I'_{\mu v} + I''_{\mu v}) - C \cdot J''_{\mu v}]$$

$$B_{vn} = -b_{vn} + \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{\mu}^m \mu \operatorname{sen} \mu \vartheta_n \cdot [D (I'_{\mu v} + I''_{\mu v}) - C \cdot J''_{\mu v}]$$

$$M(\eta) = \frac{2h}{\pi} (1-D) + \frac{\eta}{\pi} (1-D) \ln \left| \frac{\eta-h}{\eta+h} \right|$$

$$N(\eta) = \frac{M(\eta)}{1-D} - \frac{2Ch^3}{\pi\eta^2} - \frac{Ch^4}{\pi\eta^3} \ln \left| \frac{\eta-h}{\eta+h} \right|$$

$$M'(\eta) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \sum_{\mu}^{\infty} \mu \beta_{\mu} [DI''_{\mu} + C (J'_{\mu} + J''_{\mu})]$$

$$N'(\eta) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \sum_{\mu}^{\infty} \mu \beta_{\mu} [D (I'_{\mu} + I''_{\mu}) - C J''_{\mu}]$$

L'integrale I_{μ} si calcola tenendo conto che:

$$I_{\mu+1} + I_{\mu-1} = -\frac{2}{\mu} \operatorname{sen} \mu \vartheta' + 2 I_{\mu} \cos \vartheta$$

$$I_1 = -\vartheta' + I_0 \cos \vartheta$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \ln \left| \frac{-1 + \eta\eta' + \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{1-\eta'^2}}{\eta - \eta'} \right| \quad (\eta' = \cos \vartheta')$$

E l'integrale J_{μ} si calcola osservando che posto:

$$\bar{J}_{\mu}(\vartheta) = \int \frac{\cos \mu \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta \cos \vartheta' - \cos^2 \vartheta_0}$$

si ha:

$$2 J_{\mu} = \bar{J}_{\mu+1} + \bar{J}_{\mu-1} = \frac{2 \operatorname{sen} \mu \vartheta'}{\mu \cos \vartheta} + 2 \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta} \bar{J}_{\mu}$$

$$\bar{J}_1 = \frac{\vartheta'}{\cos \vartheta} + \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta} \bar{J}_0$$

$$\text{se } |\eta| < h^2 \quad \bar{J}_0 = -\frac{2}{\sqrt{h^4 - \eta^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{h^2 + \eta}{h^2 - \eta}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} \right)$$

$$\text{se } |\eta| > h^2 \quad \bar{J}_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - h^4}} \ln \left| \frac{\eta - h^2 \eta' + \sqrt{\eta^2 - h^4} \sqrt{1 - \eta'^2}}{\eta \eta' - h^2} \right|$$

$$\text{se } \eta = h^2 \quad \bar{J}_0 = \frac{1}{h^2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta'}{2}$$

$$\text{se } \eta = -h^2 \quad \bar{J}_0 = -\frac{1}{h^2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2}$$

5. Per ricavare α_k occorre scrivere ancora un'equazione, che si ottiene esprimendo che per $\eta = \hbar$ il primo membro della (3) ha una discontinuità uguale a quella del secondo membro. Cioè ($I_{\mu 0} = I_{\mu}(\vartheta_0)$, ecc.):

$$(5) \quad \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_1^m \gamma_n \sum_{\mu}^m \mu \operatorname{sen} \mu \vartheta_n [D(I'_{\mu 0} - I''_{\mu 0} + I'''_{\mu 0}) - C(J'_{\mu 0} + J''_{\mu 0} + J'''_{\mu 0})] + \\ + [N(\hbar) - M(\hbar)] a_2 + [N'(\hbar) - M'(\hbar)] - \frac{4}{\sigma(\hbar) \cdot c_p} (a_1 + a_2 \hbar^2) + 2 \alpha_k = \alpha(\hbar) \cdot (S - 1).$$

Si ha:

$$N(\hbar) - M(\hbar) = \frac{2\hbar}{\pi} (D - C) + \frac{\hbar}{\pi} (C - D) \ln 2\hbar + \frac{\hbar}{\pi} (D - C) \ln |\eta - \hbar|$$

$$N'(\hbar) - M'(\hbar) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \sum_{\mu}^{\infty} \mu \beta_{\mu} [D(I'_{\mu 0} - I''_{\mu 0} + I'''_{\mu 0}) - C(J'_{\mu 0} + J''_{\mu 0} + J'''_{\mu 0})].$$

Il primo membro della (5) contiene dei termini infiniti, che contengono tutti il $\ln |\eta - \hbar|$. E infatti (F e \mathfrak{J} significano « parte finita » e « parte infinita » rispettivamente):

$$F(I'_{00}) = -\frac{1}{\sqrt{1-\hbar^2}} \ln 2(1-\hbar^2) \quad \mathfrak{J}(I'_{00}) = \frac{1}{\sqrt{1-\hbar^2}} \ln |\eta - \hbar|$$

$$F(I''_{00}) = \frac{1}{\sqrt{1-\hbar^2}} \ln 2\hbar(1-\hbar^2) \quad \mathfrak{J}(I''_{00}) = -\frac{1}{\sqrt{1-\hbar^2}} \ln |\eta - \hbar|$$

$$F(\bar{J}'_{00}) = \frac{1}{\hbar \sqrt{1-\hbar^2}} \ln 2(1-\hbar^2) \quad \mathfrak{J}(\bar{J}'_{00}) = -\frac{1}{\hbar \sqrt{1-\hbar^2}} \ln |\eta - \hbar|$$

$$F(\bar{J}''_{00}) = -\frac{1}{\hbar \sqrt{1-\hbar^2}} \ln 2\hbar(1-\hbar^2) \quad \mathfrak{J}(\bar{J}''_{00}) = \frac{1}{\hbar \sqrt{1-\hbar^2}} \ln |\eta - \hbar|.$$

Le parti finite e infinite degli integrali I e \bar{J} soddisfano a formule ricorrenti, immediatamente deducibili dalle formule ricorrenti scritte per tali integrali. Così si ha:

$$F(I'_{\mu+1,0}) + F(I'_{\mu-1,0}) = -\frac{2}{\mu} \operatorname{sen} \mu \vartheta_0 + 2\hbar \cdot F(I'_{\mu 0})$$

$$\mathfrak{J}(I'_{\mu+1,0}) + \mathfrak{J}(I'_{\mu-1,0}) = 2\hbar \cdot \mathfrak{J}(I'_{\mu 0}) \quad \text{ecc.}$$

Del primo membro della (5) basterà prendere la parte finita, perchè il $\ln |\eta - \hbar|$ è moltiplicato per una quantità che risulta nulla in conseguenza delle (2).

6. Una volta ricavate le γ_n e α_k in funzione di a_1 e a_2 , si calcolano $\gamma_c(\hbar)$ e $d\gamma_c/d\eta(\hbar)$ (sempre in funzione di a_1 e a_2). Sostituendo i valori trovati nelle (4), si determinano a_1 e a_2 e si trova così la $\gamma(\eta)$.

Meccanica. — *Introduzione di nuovi vincoli dopo applicazione dei carichi esterni. Fenomeni viscosi.* Nota (*) di FRANCESCO SAVERIO MERLINO, presentata dal Socio G. COLONNETTI.

Si abbia una qualunque struttura elastico-viscosa iperstatica di grado $(n - 1)$ con $n \geq 1$. Si applichi a tale struttura un sistema qualunque di carichi; quindi, a deformazione avvenuta, si introduca l'ulteriore vincolo A.

Potrà interessare ora studiare la legge di variazione nel tempo della reazione X (nascente per effetto del fenomeno viscoso) del vincolo A; all'istante iniziale $t = 0$ la reazione X è nulla e tale si manterrebbe in assenza del fenomeno viscoso.

La struttura sarà supposta omogenea; la legge di viscosità sarà poi lineare nelle tensioni.

Mostriamo come nel presente studio ci si possa ricondurre al caso in cui i carichi agiscono sulla struttura già completa di tutti i suoi vincoli (iperstatica di grado n).

Immaginiamo pertanto di passare, nella esecuzione della struttura e nella applicazione dei carichi esterni, attraverso le seguenti fasi:

1° la struttura sia resa senz'altro iperstatica di grado n mediante l'introduzione del vincolo sovrabbondante A;

2° si applichino ora i carichi: nascerà di conseguenza al vincolo A la reazione iperstatica X_0 ;

3° si introduca ora, in corrispondenza del vincolo A, una distorsione (di Volterra) di caratteristica δ_0 tale da annullare la reazione creatasi nella fase precedente. La caratteristica δ_0 non è altro che lo spostamento nella direzione della futura X del punto di applicazione della reazione stessa per effetto dei carichi esterni da immaginare agenti nella struttura incompleta del vincolo A.

Ci verremo così a trovare al termine delle operazioni precedenti, cioè all'istante $t = 0$ origine del fenomeno viscoso, in quelle medesime condizioni di tensione e di deformazione che si hanno quando il vincolo sovrabbondante A è introdotto soltanto successivamente all'applicazione dei carichi esterni.

I carichi introdotti nella fase 2° daranno luogo nel tempo a variazioni dello stato di deformazione, non a variazione dello stato di tensione. La X_0 ottenuta in questa fase rimarrà perciò inalterata nel tempo.

Rimane da considerare la distorsione di caratteristica δ_0 : tale distorsione dà luogo all'istante $t = 0$ ad una reazione $-X_0$ del vincolo A; all'istante generico t tale reazione avrà il valore $-X_0 e^{-E\bar{\epsilon}_0}$, ove $\bar{\epsilon}_0$ è la legge di variazione in funzione del tempo della viscosità specifica.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1951.

Dunque, sovrapponendo gli effetti, si otterrà per la reazione X del vincolo A all'istante generico t la seguente espressione:

$$(1) \quad X = X_0 (1 - e^{-E\bar{e}_0})$$

Ritroviamo così la legge di variazione data e dimostrata del Levi in un recente studio ⁽¹⁾.

Nelle precedenti considerazioni è chiaro il riferimento al caso in cui il solo vincolo A sia introdotto dopo applicazione dei carichi esterni.

Supponiamo ora che anche il vincolo sovrabbondante B (oltre naturalmente il vincolo A) sia introdotto successivamente all'applicazione dei carichi (i carichi agiranno dunque sulla struttura iperstatica di grado $n - 2$; con $n \geq 2$).

Possiamo anche qui ricondurci, nello studio della legge di variazione della reazione in A, al caso dei carichi agenti sulla struttura già completa di tutti i suoi vincoli (struttura iperstatica di grado n). Basterà introdurre all'istante $t = 0$ origine del fenomeno viscoso, dopo applicazione dei carichi sulla struttura completa di A e B, una distorsione di Volterra in A e una distorsione di Volterra in B, aventi rispettivamente come caratteristica lo spostamento del punto di applicazione della reazione in A (nella direzione della futura reazione) e lo spostamento del punto di applicazione della reazione in B (nella direzione della futura reazione) per effetto dei carichi esterni immaginati naturalmente agenti nella struttura incompleta dei vincoli A e B (struttura iperstatica di grado $n - 2$).

Notando poi che l'applicazione dei carichi esterni sulla struttura completa di tutti i suoi vincoli dà luogo in A alla reazione X_0 invariabile nel tempo e notando che le due distorsioni di Volterra, insieme, danno luogo al tempo $t = 0$ ad un valore $-X_0$ dell'iperstatica in A e al tempo t ad un valore $-X_0 e^{-E\bar{e}_0}$ avremo per la reazione in A l'espressione:

$$(2) \quad X = X_0 (1 - e^{-E\bar{e}_0}).$$

Dunque, generalizzando, potremo affermare:

in una qualsiasi struttura isostatica o iperstatica (di grado $n - k$) qualunque sia il numero k dei vincoli aggiunti dopo applicazione dei carichi (e prima dell'inizio del fenomeno viscoso) la legge di variazione nel tempo della reazione (nascente per effetto della viscosità) di uno qualunque di tali vincoli supplementari è data sempre dall'espressione (1), ove la X_0 è la reazione del vincolo per effetto dei carichi esterni immaginati agenti sulla struttura senz'altro completa di tutti i suoi vincoli (struttura iperstatica di grado n).

Ovvero, procedendo in maniera perfettamente equivalente, notato esplicitamente che a parità di struttura finale la X_0 della (1) è la medesima X_0 della (2),

(1) FRANCO LEVI, *Effets de liaisons supplémentaires, introduites après les charges, dans les solides visco-élastiques*. «Comptes Rendus», 1951.

essendo sempre la reazione del vincolo A in regime puramente elastico per azione dei carichi esterni (supposti evidentemente i medesimi nei due casi per posizione e intensità) immaginati agenti nella struttura finale completa di tutti i suoi vincoli, si poteva senz'altro concludere:

la legge secondo cui nasce per effetto di viscosità la reazione del vincolo A realizzato dopo applicazione dei carichi (e prima dell'inizio del fenomeno viscoso) non varia se all'atto di applicare i carichi esterni la struttura sarà provvisoriamente mancante (fino all'inizio del fenomeno viscoso) non solo del vincolo A ma di un numero qualunque di altri vincoli iperstatici.

In altri termini ci si può sempre ricondurre immediatamente, nel presente studio, al caso in cui uno solo sia il vincolo introdotto dopo applicazione dei carichi.

A partire da quanto sopra risulterà semplice completare lo studio dello stato di equilibrio nel tempo di una struttura elastico-viscosa con vincoli introdotti successivamente all'applicazione dei carichi.

Facile risulterà anche lo studio della redistribuzione delle tensioni nel tempo in un solido elastico-viscoso costituito di parti solidarizzate in modo qualunque successivamente all'applicazione di tutti o parte dei carichi.

Astronomia. — *Sulla possibile natura e origine elettromagnetica delle pulsazioni osservate nel diametro del Sole.* Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Le misure quotidiane del diametro del Sole, eseguite dal 1874 al 1937 all'Osservatorio del Campidoglio a Roma (e tuttora continuate nella nuova sede a Monte Mario), opportunamente elaborate e discusse ⁽¹⁾, hanno messo in evidenza delle oscillazioni, fluttuazioni o pulsazioni del raggio del Sole, la cui natura e origine erano rimaste però piuttosto oscure. Alcuni astronomi avevano addirittura messo in dubbio la realtà di tali osservate variazioni come corrispondenti a effettive pulsazioni della fotosfera solare, attribuendole piuttosto a variazioni dell'irradiazione prodotte dall'atmosfera terrestre, o comunque a fattori meteorologici locali.

Il tentativo di approssimare ⁽²⁾ la curva osservata con i metodi dell'analisi periodale (nonostante i dubbi che sull'applicazione di tali metodi possono sorgere ⁽³⁾)

(*) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) LUCIO GIALANELLA, *Le variazioni del diametro solare nel sessantennio 1874-1937 secondo le osservazioni eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio.* « Com. Pontificia Accademia Scientiarum », 6, 1139 (1942); L. G., *Il diametro orizzontale del Sole.* « Astron. Nachr. », 273, 81 (1943).

(2) MASSIMO CIMINO, *Un'oscillazione ventiduenale del diametro del Sole.* « Com. Pontificia Accademia Scientiarum », 8, 485 (1945)

(3) Un teorema recente di Picone dimostra che il problema dell'analisi periodale è determinato soltanto nel caso che la funzione del tempo sottoposta ad analisi sia soluzione di una data equazione differenziale lineare ordinaria omogenea a coefficienti costanti. Cfr. M. PICONE, *Valute matematiche sull'analisi dei periodi*, « Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano », 19 (1948).

ha messo in evidenza inoltre l'esistenza di un'onda fondamentale con periodo di 22-23 anni, a cui si aggiunge un'onda secondaria con periodo di 6-8 anni. Si ritroverebbe, cioè, nelle pulsazioni del diametro il periodo stesso della variazione dell'attività solare, e precisamente quel periodo completo della variazione magnetica della polarità delle macchie, che già si intravede debba giuocare un ruolo fondamentale in tutto il ciclo dell'attività solare.

Tuttavia queste deduzioni sembravano dover restare allo stato di pura speculazione, finchè la scoperta recente dei campi magnetici stellari, e principalmente quella delle sue possibili variazioni, ha portato nuova e improvvisa luce su tutto il problema, giustificando non solo le realtà delle nostre osservate variazioni del diametro solare, ma anche offrendo la possibilità di tentare di spiegarne la natura e l'origine.

Scopo di questa breve Nota preliminare è appunto quello di mostrare come le osservate variazioni del diametro solare possano essere inquadrare nella teoria che si va formando – principalmente per opera di H. Alfvén, C. Walén, M. Schwarzschild – sull'elettromagnetismo solare e stellare, e richiamare quindi l'attenzione degli astronomi su queste osservazioni, che – se non erriamo – ci sembra debbano appunto diventare un'importante prova osservativa della teoria stessa.

C'è stata recentemente da qualche parte una tendenza a sollevare dei dubbi sulla effettiva esistenza del campo magnetico generale del Sole⁽⁴⁾; però la scoperta sicura (H. Babcock, 1947-50) di campi magnetici di grande intensità nelle stelle, rendendo rimarchevole l'analogia dei risultati delle osservazioni di Hale e di Babcock, darebbe invece nuova fiducia nell'esistenza del campo magnetico solare, il quale potrebbe essere tuttavia variabile, o addirittura periodicamente mascherato come sostengono appunto K. O. Kiepenheuer e C. Walén (e questo potrebbe alfine dar conto delle incertezze delle ultime osservazioni di Hale e anche di quelle successive di G. Thiessen). D'altra parte, la bene accertata esistenza del campo magnetico delle macchie, e il suo elevato valore, non possono non far pensare ad un eventuale collegamento, o magari dipendenza dei due campi, e quindi concluderne – sia pure solo dal punto di vista qualitativo – l'esistenza del campo generale.

Se questo è poi variabile, com'è stato accertato da Babcock per alcune stelle, è possibile applicare ad esso la teoria di M. Schwarzschild⁽⁵⁾, la quale – estendendo la precedente teoria delle onde magnetiche e magneto-idrodinamiche di Alfvén – conduce ad un accoppiamento di oscillazioni magnetiche e meccaniche nell'intera stella. Il modello di Schwarzschild corrisponde sostanzialmente ad un dipolo magnetico a cui si aggiungono oscillazioni meccaniche simmetriche rispetto all'equatore, la materia stellare delle regioni polari muovendosi rapidamente verso l'interno mentre la stella si espande nelle regioni equatoriali. Naturalmente i movimenti si invertono un mezzo ciclo più tardi. Queste pulsazioni dovrebbero

(4) Cfr. V. C. A. FERRARO, *Magnétisme solaire et cosmique*. « Monographies Obs. Royal de Belgique » I, 1950.

(5) « Ann. Astroph. », 12, 148 (1949).

essere presumibilmente mantenute da un lieve incremento della liberazione di energia nucleare nel nocciolo dell'astro in corrispondenza delle fasi in cui la temperatura centrale raggiunge un massimo. Il campo elettromagnetico dell'astro dovrebbe quindi considerarsi come un agente intermediario capace di trasportare l'energia dall'interno in oscillazione verso l'atmosfera esterna.

Lo stesso Babcock ⁽⁶⁾ ha accennato alla possibilità che nel ciclo solare di 22 anni si debba vedere una leggera oscillazione magnetica residua di piccola ampiezza del Sole, portando a dimostrazione la variazione ciclica della forma e della polarità della corona solare (pennacchi) e l'inversione di polarità delle coppie delle macchie solari. Ma ci sembra che prova ben più importante di queste « pulsazioni » meccanico-magnetiche del Sole si dovrebbe trovare nelle accertate variazioni del diametro fotosferico del Sole quali risultano dalle misure romane. L'importanza di tale prova non è sfuggita del resto a qualche altro astronomo, come il Grotrian ⁽⁷⁾ che ne ha fatto esplicitamente cenno.

Aggiungiamo infine che - basandosi sulla teoria di M. Schwarzschild - ci sembra possibile ricavare dall'osservato periodo delle pulsazioni solari il valore del campo magnetico che le genererebbe. Secondo questa teoria infatti il periodo P delle pulsazioni è legato all'intensità H_0 del campo dalla formula:

$$P = \frac{2\pi R}{s} \cdot \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{H_0}$$

in cui R è il raggio solare ($R = 7 \cdot 10^{10}$ cm), ρ la densità ($\rho = 1,41$ g/cm³) ed s un coefficiente numerico che ha il valore:

$$s = \sqrt{\frac{140}{27}} = 2,3.$$

Fatti i calcoli, con $P = 22$ anni (e cioè $6,95 \cdot 10^8$ secondi), si troverebbe un campo magnetico di circa 1000 gauss, cioè molto inferiore a quello misurato nelle macchie solari.

Tuttavia questo valore, tanto superiore a quello comunemente ammesso per il campo magnetico generale del Sole, potrebbe far dubitare della connessione tra pulsazioni solari e variazioni di campo magnetico. Da parte mia crederei anche che il campo magnetico solare possa essere eventualmente mascherato da altre cause, come è sostenuto da alcuni autori secondo quanto abbiamo già visto.

(6) H. W. BABCOCK, « Publ. Astr. Soc. Pacif. », 60, 244 (1948).

(7) W. GROTRIAN, *Ueber den derzeitigen Stand der Deutung des Sonnenfleckenphänomens*. « Zeitschrift f. angew. Physik », 2, 376 (1950).

Astronomia (Astrofisica). — *Area ed intensità della perturbazione solare del maggio 1951* (*). Nota di MARGHERITA HACK, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

Come è noto l'attività undecennale del Sole, dopo il massimo raggiunto nel 1947.5 è stata rapidamente decrescente nel 1950. All'inizio della primavera di quest'anno e precisamente il 19 marzo 1951, al bordo est del Sole, alla latitudine 15° nord compariva un gruppo costituito da una sola grande macchia,

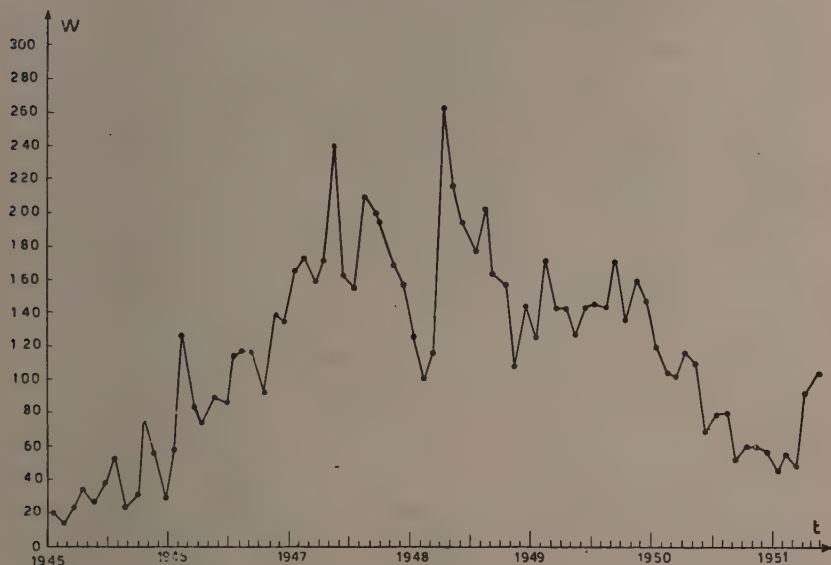


Fig. 1.

seguito da un altro gruppo a latitudine 7° nord formato pure da una sola macchia più piccola. Il 22 marzo, all'epoca del passaggio al meridiano della macchia antecedente, questa era accompagnata da qualche altra piccola macchia, e il nucleo centrale tendeva a scindersi in due.

Il 13 aprile, in seconda rotazione, ricompariva al bordo est, a latitudine 10° nord, un unico gruppo, che mostrava un'estesa zona di penombra e numerose piccole macchie; il 19 aprile, un giorno dopo il passaggio al meridiano, si potevano contare 86 macchie, e l'area occupata dal gruppo (misurata sul disegno

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio di Arcetri e Centro di astrofisica del C. N. R.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

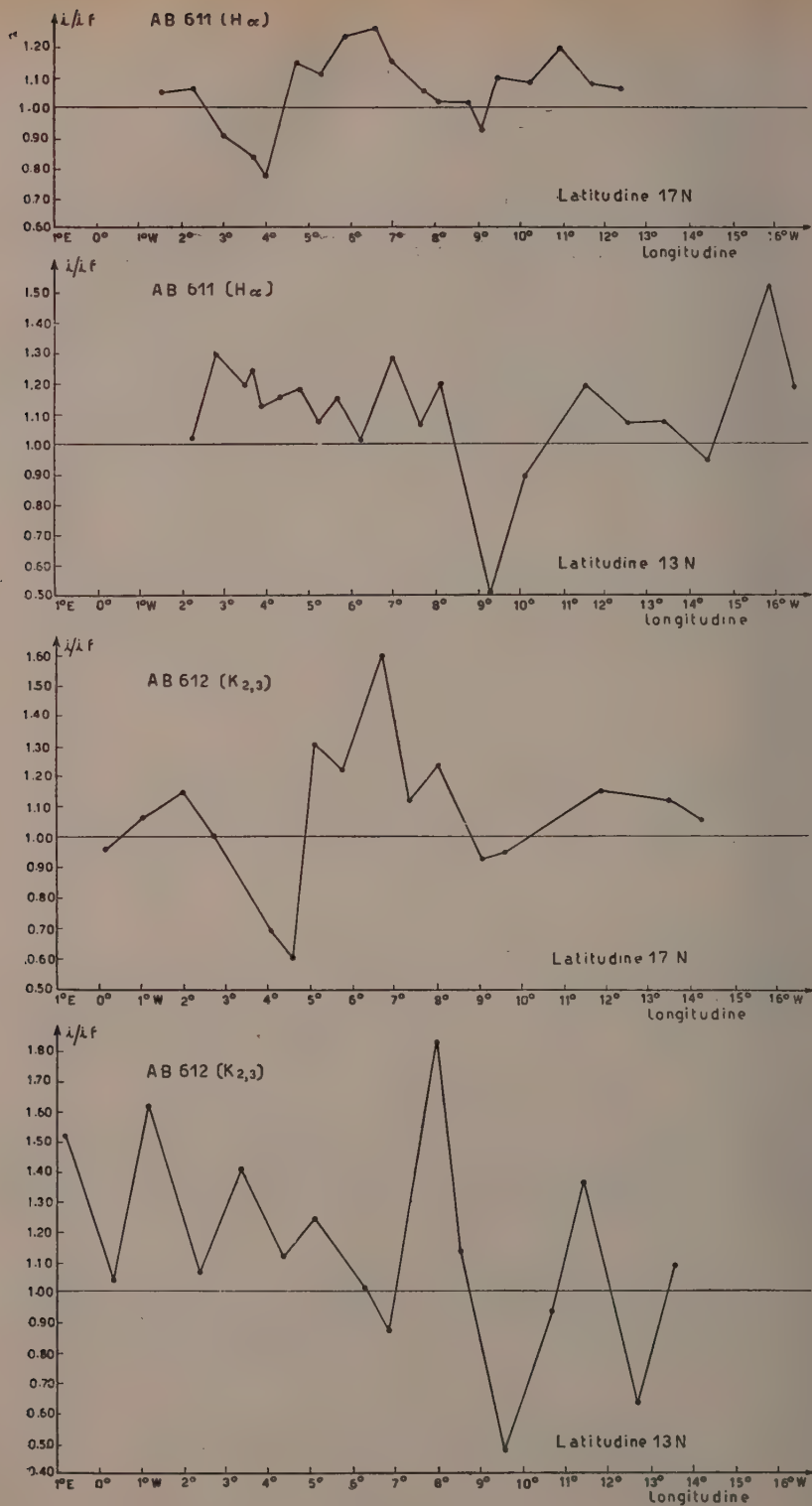


Fig. 2.

fatto ad Arcetri, all'equatoriale di Amici) era di circa 4000 milionesimi del disco solare.

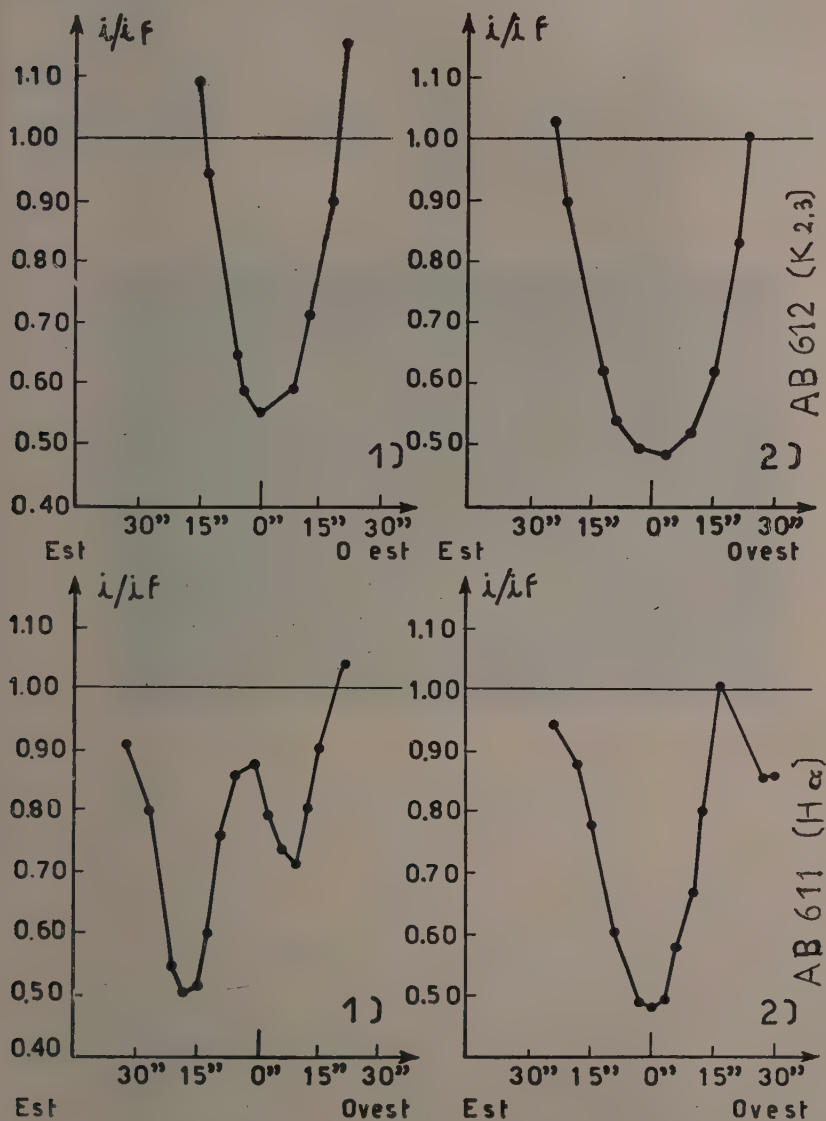


Fig. 3.

L'11 maggio, in terza rotazione, a latitudine 12° nord ricompariva al bordo est il solito gruppo, mostrando oltre alla già notata estensione della penombra e al gran numero di piccole macchie, due grandi macchie. Il 16 maggio, epoca del passaggio al meridiano, l'area del gruppo era di circa 5400 milionesimi del

disco solare. In tale occasione sono state segnalate interruzioni delle comunicazioni radio. La comparsa e lo sviluppo di questo gruppo, paragonabile per dimensioni a quello del giugno-luglio 1947, è tanto più notevole in quanto il Sole si trova attualmente quasi in periodo di minima attività.

L'influenza del gruppo sull'andamento dei numeri di Wolf, può vedersi osservando il grafico della fig. 1, in cui sono date le medie mensili dei numeri di Wolf, ricavati dalle osservazioni eseguite giornalmente ad Arcetri all'equatoriale di Amici, dal gennaio 1945 al maggio 1951. Da un valore per il numero

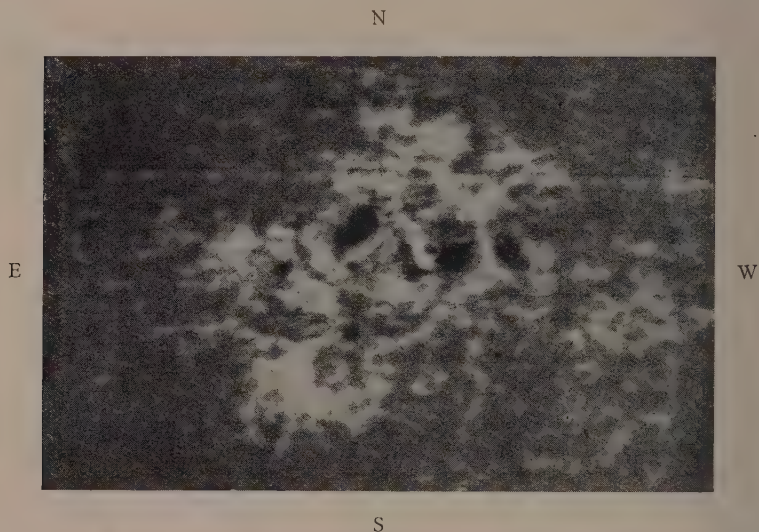


Fig. 4. - Spettroeliogramma in $K_{2,3}$ preso alla torre solare di Arcetri
(1951 maggio 16^d 9^h 55^m T. U.).

di Wolf (W) uguale a 48 per il mese di marzo 1951, si passa infatti a 92 in aprile ed a 103 in maggio.

Poichè alla torre solare di Arcetri sono stati presi spettroeliogrammi nelle radiazioni della H_{α} e della $K_{2,3}$, secondo il normale programma di osservazioni, nei giorni 17, 19 e 21 aprile e nei giorni 12 e 16 maggio, si è misurata su queste lastre l'area di tutta la zona perturbata intorno al gruppo. L'area misurata è stata corretta per l'effetto di proiezione sul disco, dividendola per $\cos \beta$, dove β è l'angolo sotto cui dal centro del Sole è vista la terra e la macchia, dato da $\cos \beta = \sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos (\alpha - L)$, dove D ed L sono la latitudine e longitudine eliografica del centro del disco solare e δ e α le corrispondenti quantità per la macchia. Le aree così corrette sono date in tabella I, esprimendole in decimillesimi dell'emisfero solare.

Sulla stessa lastra si sono fatte misure di intensità dei brillamenti determinando il rapporto $r = i_b/i_f$ fra l'intensità del brillamento (i_b) e quella delle zone

non perturbate immediatamente vicine (i_f), secondo il metodo descritto da M. C. Ballario ⁽¹⁾.

TABELLA I.

1951	Lastre in H_{α}	Area corretta	Lastre in $K_{2,3}$	Area corretta	Osservatore
17 aprile	AB 598	86	AB 599	150	Ballario M. C.
19 aprile	AB 600	117	AB 601	185	» »
21 aprile	AB 602	102	AB 603	164	» »
12 maggio	AB 609	169	AB 610	208	Hack M.
16 maggio	AB 611	175	AB 612	281	»

In tabella II sono dati i valori di r trovati per i singoli brillamenti e l'importanza del brillamento nella scala internazionale da 1 a 3.

TABELLA II.

1951	Lastre in H_{α}	r	Imp.	Lastre in $K_{2,3}$	r	Imp.
17 aprile	AB 598	1.50	1	AB 599	—	—
19 aprile	AB 600	1.55	1	AB 601	3.02	1
		1.65	1			
21 aprile	AB 602	—	—	AB 603	—	—
12 maggio	AB 609	2.04	3	AB 610	—	—
		1.55	1			
16 maggio	AB 611	1.50	1	AB 612	—	—
		1.50	1			
		1.55	1			

Va notata la presenza di un brillamento di importanza tre in radiazione della H_{α} , nella lastra 609 e l'assenza completa di brillamenti nella corrispondente lastra 610, in radiazione della $K_{2,3}$, presa 10 minuti dopo.

È sembrato interessante esaminare le variazioni di intensità attraverso tutta la perturbazione cromosferica e fotosferica in luce di idrogeno e di calcio, rispetto alla zona circostante non perturbata. In fig. 2 è dato l'andamento fotometrico

(1) M. C. BALLARIO, *Misure fotometriche dei brillamenti cromosferici in luce d'idrogeno*. «Memorie S. A. I.», XIX, 235 e «Osservazioni e memorie dell'Osservatorio astrofisico di Arcetri», 65, 29; *Misure fotometriche dei brillamenti in luce di calcio*. «Memorie S. A. I.», XXI, 21 e «Osservazioni e memorie dell'Osservatorio astrofisico di Arcetri», 66, 13.

di tutta la zona perturbata circostante la macchia, ricavata dalle lastre AB 611 e AB 612 rispettivamente in luce dell'idrogeno e del calcio. Le misure della densità sono state fatte al microfotometro di Hartmann ogni 4 o 5 decimi di millimetro, misurando la zona da est verso ovest a due latitudini, rispettivamente a 17° nord e a 13° nord. Poichè le lastre in questione sono calibrate per mezzo di un cono a gradini, si è potuto ricavare dalle densità il rapporto i/i_f fra l'intensità della zona perturbata e l'intensità della zona non perturbata immedia-

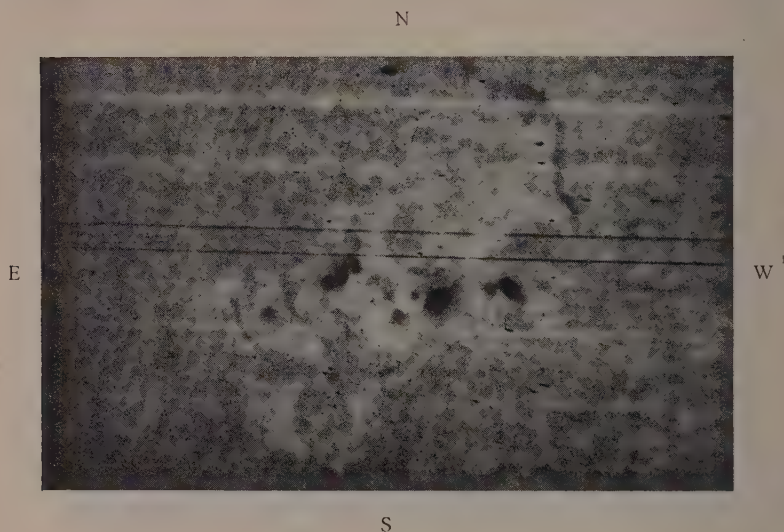


Fig. 5. - Spettroeliogramma in H_α preso alla torre solare di Arcetri
(1951 maggio 16^d 9^h 36^m T. U.).

tamente vicina. Questa è stata determinata misurando il valore di i_f in parecchi punti attorno alla zona perturbata e prendendone il valore medio.

In fig. 3 è dato l'andamento fotometrico dei nuclei delle due macchie principali del gruppo, con procedimento identico a quello descritto sopra, soltanto eseguendo le misure delle densità di decimo in decimo di millimetro, per ottenere una più dettagliata determinazione dell'andamento fotometrico lungo la sezione diametrale est-ovest della macchia. Da notare che la macchia 1 (che è quella più a ovest del gruppo) presenta un ponte luminoso in luce dell'idrogeno, completamente assente invece in luce del calcio. L'intensità dei nuclei al fondo della riga è circa la stessa in H_α e in $K_{2,3}$.

Geodesia. — *Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes.* Nota di GIOVAN BATTISTA PACELLA, presentata (*) dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. Quando si connetta il problema di Stokes — che, come è ben noto, consiste nel determinare la funzione potenziale esterna di un pianeta, data che sia una superficie d'equilibrio esterna S , e data la massa M e la velocità angolare ω — con la teoria dei pianeti fluidi rotanti, si rileva l'apparente contraddizione esistente tra la soluzione del problema di Stokes che esclude (almeno in via generale) una distribuzione uniforme di massa e le soluzioni di Mac Laurin, Jacobi, Poincaré ecc. che questa uniformità invece ammettono *a priori*. Ciò dipende dal fatto che queste ultime soluzioni introducono delle condizioni che non esistono nel problema di Stokes, e rendono così possibile l'equilibrio di masse uniformi in casi speciali. Quale differenza esista fra la funzione potenziale del problema di Stokes e la funzione potenziale di una massa omogenea rotante è stata studiata dal Somigliana⁽¹⁾. È rappresentata dalla funzione potenziale di una speciale distribuzione superficiale di una massa fittizia globalmente nulla; e lo stesso autore ha dato l'espressione analitica della densità di questa distribuzione superficiale. Nei casi classici d'equilibrio delle masse fluide rotanti questa distribuzione manca, l'equilibrio è assicurato da condizioni speciali fra la forma della massa rotante e la velocità di rotazione.

Ci ripromettiamo di ritornare prossimamente sulla materia della contraddizione enunciata in precedenza. Che abbia luogo e che generi confusione può rilevarsi anche dal fatto che recentemente il Lejay⁽²⁾ ha riportato che per calcolare i valori della gravità alla superficie dell'ellissoide (assai prossimo al geoide) il Pizzetti e poi il Somigliana assumono l'ellissoide come superficie di livello e potendo, in virtù del teorema di Stokes, modificare a piacimento la disposizione delle masse interne, a condizione di lasciare inalterata la superficie di livello esteriore e perciò imperturbato il campo, i geodeti italiani considerano allora l'ellissoide omogeneo. Ora è noto che la disposizione delle masse interne, pur presentando una indeterminazione per così dire infinita — secondo una felice espressione di Brillouin — non è totalmente arbitraria, e che il Pizzetti ed il Somigliana non considerano affatto omogeneo l'ellissoide.

Chiarito questo punto, non ha ragione d'essere la seconda ipotesi (dell'omogeneità) citata e lamentata dal Lejay nella presentazione della formula della gravità normale internazionale.

2. Passiamo ora ad esaminare un altro aspetto della relazione tra il problema di Stokes e la teoria dei pianeti fluidi rotanti.

(*) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) C. SOMIGLIANA, *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*. «Memorie della Società Astronomica Italiana», 1929.

(2) P. LEJAY, *Développements modernes de la gravimétrie*. Gauthier Villars, Paris, 1947.

Quella parte dei *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti* del Pizzetti dedicata al problema di Stokes nel caso ellissoidico, alla quale si riallacciano i successivi studi del Somigliana⁽¹⁾ che ampliano i risultati del Pizzetti e li mettono in valore, a prima vista sembra un'immediata applicazione di cose note se non forse una tautologia. Sembra cioè che prescindendo da quegli studi sia assai agevole concludere il problema di Stokes per l'ellissoide basandosi sui risultati delle illustri ricerche riguardanti gli ellissoidi di equilibrio. Non può negarsi che porti a questa congettura la parte formale della trattazione del Pizzetti e che vi concorra la disposizione data alla materia - pur essendo questa egregiamente presentata in una ricerca originale dell'Autore sin dal 1894⁽¹⁾ - disposizione del resto che non sembra del tutto impeccabile anche per altri argomenti del libro; e che vi concorra anche la conoscenza preventiva della teoria degli ellissoidi di equilibrio posseduta in generale da chi studi i « Principi » del Pizzetti.

Vogliamo attenerci alla trattazione del problema di Stokes in sè (caso ellissoidico) fatta dal Pizzetti, ma cade acconcio accennare al fatto che il nostro Autore tratta anche la teoria degli ellissoidi di equilibrio deducendoli dal problema di Stokes pel caso ellissoidico, ed è da ritenersi che questa parte - pur rigorosa - non abbia riscosso tutti i consensi talchè i « Principi » del Pizzetti non sono citati né nella *Mécanique rationnelle* di Appell (1921), né nella *Physikalische Geodäsie* dell'Hopfnér (1933).

Il Pizzetti si serve di alcuni integrali:

$$K = \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{R_s}} \quad A = \int_a^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R_s}} \quad B = \int_a^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{R_s}} \quad C = \int_a^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\sqrt{R_s}}$$

$$R_s = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)$$

e non vi è chi non veda questi ultimi tratti della classica teoria degli ellissoidi di Maclaurin e di Jacobi per cui, chi non si fermi sulla questione, può pensare di raggiungere i risultati del Pizzetti in base ad una immediata applicazione della teoria degli ellissoidi di equilibrio, tanto più che non sembra che sia stato messo in luce il vero motivo per cui non è possibile servirsi dei risultati raggiunti da tempo a cui abbiamo accennato.

La fallacia di questo ragionamento sta intanto nel fatto che la serie degli ellissoidi di Mac Laurin, caratterizzata dalle due equazioni

$$a^2 = c^2 (1 + l^2)$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{(3 + l^2) \operatorname{arctg} l - 3l}{l^3}$$

è di ellissoidi omogenei, e la prima di queste equazioni, che determina il rapporto degli assi, per la Terra, in base ai valori noti di ρ , f , ω , assegna allo schiacc-

(1) P. PIZZETTI, *Sulla espressione della gravità alla superficie del geode, supposto ellissoidico*. « Atti della R. Acc. dei Lincei », 1894.

ciamento il valore di $1/234$ che è assai diverso da quello ritenuto in Geodesia. Bisogna dunque concludere che se la Terra è un ellissoide di rivoluzione, e se è stata fluida una volta, essa non è omogenea⁽⁴⁾, come del resto si desume dai risultati sperimentali di geofisica.

Assegnata quindi una superficie equipotenziale esterna del campo determinato dalla Terra (per attenerci ad un caso concreto), note altresì massa e velocità angolare, è il teorema di Stokes che assicura l'esistenza e l'unicità del campo, e non vi è che il problema di Stokes per descrivere il campo stesso. Questa via prescinde infatti dalla omogeneità del pianeta ed è valida per una distribuzione interna di masse che, se non è del tutto arbitraria, è subordinata ad un vincolo piuttosto labile⁽⁵⁾.

In base a ciò, per quanto riguarda il problema geodetico, si sfugge all'intricata questione della distribuzione della massa nell'interno terrestre, il che è assai comodo. Vi è peraltro l'assunzione di una superficie equipotenziale, e ciò è possibile perchè l'ellissoide gode buona fama, e quello internazionale, determinato secondo i moderni calcoli sull'ampio territorio degli Stati Uniti, si presenta con buoni titoli; nè, d'altra parte, il diverso orientamento di tale ellissoide fuori del territorio americano può far temere forti divari per la g calcolata, perchè la deviazione di verticale di un primo di latitudine provoca un effetto che appena supera il milligal.

Prendendo da qui le mosse, il Somigliana ed il Silva⁽⁶⁾ pervennero ad una formula della gravità normale che, proposta poi dal Cassinis⁽⁷⁾ anche a nome del Somigliana, all'Assemblea generale della Unione Geodetica e Geofisica Internazionale di Stoccolma, prese il nome di « formula normale internazionale della gravità » (1930).

Confrontando questa formula con i risultati degli studi dello Heiskanen, si trova una perfetta coincidenza per la gravità equatoriale ed un divario di $1 \cdot 10^{-6}$ per il primo coefficiente β .

Mostriamo ora con una breve trattazione analitica come non sia possibile risolvere il problema di Stokes per l'ellissoide (di rotazione per brevità) ricorrendo direttamente al potenziale dell'ellissoide omogeneo rotante.

La funzione potenziale newtoniana esterna dovuta ad un ellissoide di rotazione fisso omogeneo, di densità ρ e di semiassi a, a, c , è

$$V = \pi a^2 c \rho \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{V\varphi(s)}$$

con

$$\varphi(s) = (a^2 + s)^2 (c^2 + s);$$

(4) P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, IV, Paris, 1921, p. 53.

(5) C. SOMIGLIANA, loc. cit.

(6) G. SILVA, *Sulla formula della gravità normale*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », aprile 1930 ed anche *Sulla definizione della gravità normale*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », dicembre 1928.

(7) G. CASSINIS, *Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur*. « Bulletin géodésique », 1930.

dove riterremo noto il significato del limite inferiore λ dell'integrale e nota altresì la teoria che è a sostegno delle formule citate. Pertanto l'usuale espressione della V è la seguente

$$V = \pi a^2 c \rho [K - A(x^2 + y^2) - Cz^2],$$

dove K, A, C sono funzioni di λ come risulta dagli integrali definiti da cui sono dedotte e, attraverso λ , funzioni di x, y, z per la definizione di λ . Supposto poi l'ellissoide dato rotante con velocità angolare ω , il potenziale risulta:

$$W = \pi a^2 c \rho f [K - A(x^2 + y^2) - Cz^2] + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2),$$

(f costante di gravitazione), quando W sia riferita allo stesso sistema d'assi di dianzi e questo rotante con l'ellissoide.

Volendo ora che per un valore costante opportuno di W la superficie equipotenziale $W(x, y, z) = W$ coincida con l'ellissoide a, a, c , indicando con K_0, A_0, B_0 , i valori sulla superficie dell'ellissoide dei corrispondenti integrali K, A, B , deve verificarsi:

$$\frac{\pi a^2 c \rho f A_0 - (1/2) \omega^2}{\pi a c^2 \rho f K_0 - W} = \frac{1}{a^2};$$

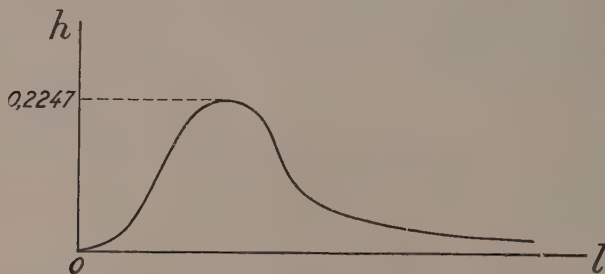
$$\frac{\pi a^2 c \rho f C_0}{\pi a^2 c \rho f K_0 - W} = \frac{1}{c^2};$$

le quali determinano W ed ω .

Ritorniamo alle due equazioni precedenti. Sorvolando sul valore di W , per quanto concerne ω^2 risulta:

$$\frac{\omega^2}{2 \pi f \rho} = a^2 c \left(A_0 - \frac{c^2}{a^2} C_0 \right).$$

Non è quindi possibile determinare il potenziale esterno all'ellissoide d'equilibrio a, a, c omogeneo, di massa $m = (4/3) \pi a^2 c \rho$ assegnata, associando a questi



dati una velocità angolare arbitraria come si conviene al problema di Stokes, perchè per lo stesso ellissoide d'equilibrio la ω risulta predeterminata dall'equazione precedente, anzi è richiesta la condizione $A_0 - (c^2/a^2) C_0 > 0$, che è invero soddisfatta per l'ellissoide schiacciato.

Del resto l'equazione precedente coincide con la condizione ben nota degli ellissoidi di Mac Laurin, che si compendia nel diagramma che si riporta.

In esso è reso evidente il limite di Simpson

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} \leq 0.2247$$

oltre il quale non esistono ellissoidi di equilibrio. Di passata ricordiamo che quando non si particolarizzi in ellissoide la figura d'equilibrio, il limite superiore cresce, e fu valutato uno dal Poincaré e, sotto certe condizioni, 0,5 dal Crudeli.

Fisica. — *Alcune osservazioni sulle nuove particelle instabili pesanti.* Nota di BRUNO ROSSI, HERBERT BRIDGE e MARTIN ANNIS, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

Come è noto, le osservazioni di Rochester e Butler ⁽¹⁾ e di altri sperimentatori ⁽²⁾ ⁽³⁾ hanno rivelato l'esistenza nella radiazione cosmica di particelle instabili, più pesanti dei mesoni, che si disintegrano spontaneamente con vita media dell'ordine, sembra, di 10^{-10} secondi. Queste particelle sono state chiamate provvisoriamente particelle V. Esistono particelle V neutre che si disintegrano in coppie di particelle cariche, e particelle V cariche, ciascuna delle quali si disintegra in una particella secondaria carica ed una particella secondaria neutra.

Fra le particelle cariche che risultano dalla disintegrazione delle particelle V vi sono sicuramente particelle di massa intermedia fra la massa dell'elettrone e quella del protone, ma sembrano esservi pure particelle di massa protonica ⁽³⁾.

La natura delle particelle V è tuttora incerta e, neppure si sa se tutte le particelle V siano o meno dello stesso tipo. Perciò ogni nuovo esempio di particella V merita di essere studiato e catalogato accuratamente.

In una serie di fotografie ottenute con una camera di Wilson ad Echo Lake (Colorado), abbiamo osservato un certo numero di particelle che presentano le caratteristiche di particelle V. Vogliamo qui discutere in dettaglio il comportamento di due di esse.

La fotografia riprodotta in fig. 1 mostra diverse particelle penetranti che entrano nella camera dall'alto; esse sono probabilmente le particelle secondarie

(*) Nella seduta del 14 aprile 1951.

(1) G. D. ROCHESTER and C. C. BUTLER, «Nature», 160, 855 (1947).

(2) A. J. SERIFF, R. B. LEIGHTON, C. HSIAO, E. W. COWAN and C. D. ANDERSON, «Phys. Rev.», 78, 290 (1950).

(3) R. ARMENTEROS, K. H. BARKER, C. C. BUTLER, A. CACHON and A. H. CHAPMAN, «Nature», 167, 501 (1951).

di una interazione nucleare avvenuta in un blocco di piombo posto al di sopra della camera. La camera contiene, alternate, lastre di piombo spesse 0.63 cm e lastre di alluminio spesse 0.8 cm. Una delle particelle penetranti interagisce nella

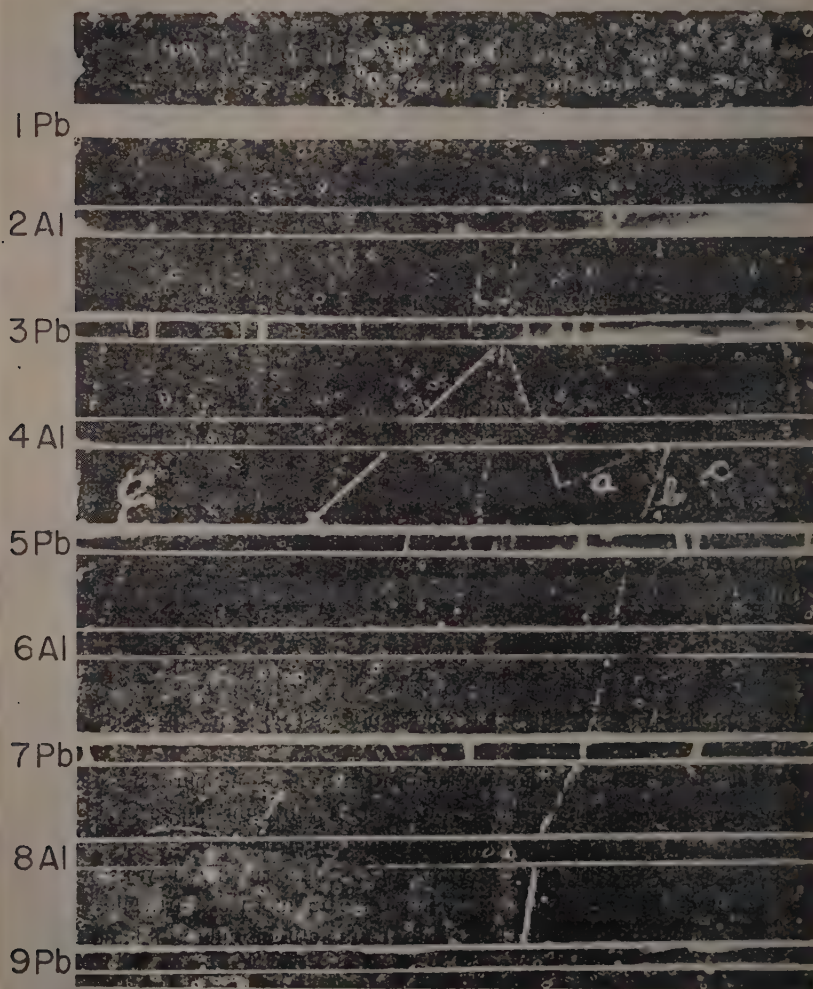


Fig. 1.

terza lastra (Pb). Fra i prodotti dell'interazione vi è una particella (l'ultima a destra) di ionizzazione alquanto superiore al minimo, la cui traiettoria attraversa una lastra di alluminio e quindi (a metà strada fra le lastre n. 4 e n. 5) sembra cambiare bruscamente di direzione. Si interpreta questo fenomeno coll'ipotesi

che la particella in questione sia una particella V carica, la quale si disintegra in volo producendo una particella secondaria carica (*a*) ed una particella secondaria neutra (e quindi invisibile). La particella secondaria (*a*) rientra nella lastra

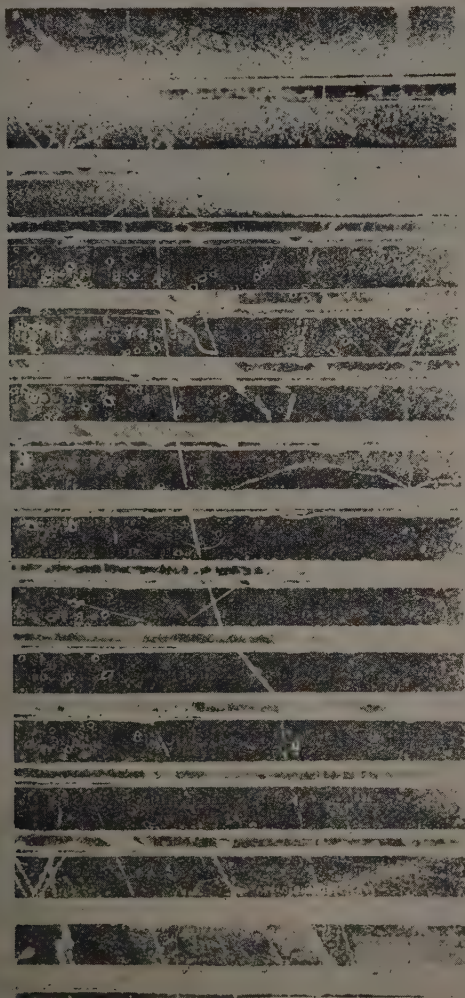


Fig. 2.

di alluminio n. 4 dove sembra subire un urto nucleare che la rinvia verso il basso (traccia *b*; si noti che la traccia *c* non ha nulla a che fare col processo in questione; dall'esame stereoscopico dell'evento, essa risulta appartenere ad un elettrone, parte di una coppia generata da un fotone nella lastra di piombo n. 3).

La particella secondaria attraversa due lastre di piombo, due lastre di alluminio ed infine si arresta in una lastra di piombo (n. 9). Dalla deflessione che la sua traiettoria subisce nell'attraversare le varie lastre e dal graduale aumento di ionizzazione risulta che la particella in questione è un mesone. Il fatto che essa subisce un urto nucleare nella lastra n. 4 esclude la possibilità che essa sia un mesone μ (come è noto i mesoni μ interagiscono assai debolmente coi nuclei). La particella secondaria $a-b$ è quindi quasi sicuramente un mesone π .

Dal suo percorso nella materia, e nell'ipotesi che l'urto nucleare nella lastra n. 4 sia elastico, si deduce che la sua energia cinetica al momento della produzione è di 60 MeV. L'angolo fra la traiettoria della particella primaria (particella V) e quella della particella secondaria è di 90° .

La fotografia descritta è particolarmente interessante: 1° perchè mostra una particella V carica proveniente direttamente da una interazione nucleare; 2° perchè permette di identificare uno dei prodotti della disintegrazione con un mesone π ; 3° perchè permette di ottenere abbastanza accuratamente l'energia di questo mesone.

Per determinare la massa della particella V occorrerebbe conoscere la natura della particella neutra di disintegrazione e la velocità della particella primaria.

Dalla ionizzazione specifica di quest'ultima particella risulta che la sua velocità è compresa fra 0.4 e 0.7 volte la velocità della luce. Se ne conclude che, se la particella neutra di disintegrazione è un neutrone, la particella V ha una massa compresa fra 2300 e 2500 masse elettroniche; e che se la particella neutra di disintegrazione è un mesone π^0 , la massa della particella V è compresa fra 850 e 1100 masse elettroniche.

La fotografia riprodotta in fig. 2 mostra una particella che entra nella camera di Wilson dal di sopra, attraversa 9 lastre di piombo (0.63 cm) diminuendo gradualmente di velocità (come attesta la ionizzazione specifica e le deflessioni della sua traiettoria nelle successive lastre di piombo) ed infine si arresta nella decima lastra di piombo. Dopo essersi arrestata, la particella sembra subire un processo di disintegrazione spontanea, da cui nasce una particella secondaria di velocità relativistica che attraversa 35 g cm^{-2} di piombo senza diminuire visibilmente di velocità. Il fenomeno osservato non può rappresentare un processo di disintegrazione $\pi \rightarrow \mu$, perchè quando il mesone π è a riposo, il mesone μ ha una energia di soli 4 MeV ed un percorso nel piombo inferiore al millimetro. Non può neppure rappresentare un processo di disintegrazione $\mu \rightarrow e$ perchè quando il mesone μ è a riposo la massima energia dell'elettrone secondario è di circa 50 MeV, ed un elettrone di 50 MeV viene arrestato in assai meno di 35 g cm^{-2} di piombo dalla perdita di energia per radiazione. Si tratta quindi presumibilmente, della disintegrazione di una particella V carica a riposo. Bisogna notare tuttavia che questa particella è visibile nella camera di Wilson per un tempo dell'ordine di 10^{-9} secondi (tempo misurato nel sistema di riferimento delle particelle in moto), il che indicherebbe che la vita media delle particelle V non è molto più breve di 10^{-9} secondi.

Fisica. — *Risonanza paramagnetica a bassissima temperatura nel cloruro idrato di praseodimio.* Nota di CHARLES F. DAVIS, ARTHUR F. KIP, RENATO MALVANO (*), presentata (**) dal SOCIO E. PERUCCA.

1. GENERALITÀ. — Il fenomeno della risonanza paramagnetica è stato utilizzato recentemente nello studio di alcuni sali delle terre rare, e precisamente il Gadolinio ed il Neodimio (1).

Con la presente comunicazione si vuole dare notizia di alcuni risultati sperimentali ottenuti nei Laboratori del Massachusetts Institute of Technology verso la fine dello scorso anno studiando il cloruro idrato di Praseodimio: $(\text{PrCl}_3 \cdot 7 \text{H}_2\text{O})$.

2. DISPOSIZIONE SPERIMENTALE. — Il metodo sperimentale consiste nell'assoggettare contemporaneamente la sostanza paramagnetica, contenuta in una opportuna cavità risonante, ad un campo magnetico \mathcal{H} alternativo, generato da una sorgente di energia a microonde di data frequenza ν e ad un campo magnetico \mathcal{H}_0 statico avente le linee di forza normali al piano di vibrazione del campo magnetico alternativo. Al variare del campo magnetico \mathcal{H}_0 si misura l'assorbimento relativo di energia elettro-magnetica da parte della sostanza in esame. Nella disposizione sperimentale usata la cavità risonante è disposta nell'interno di un vaso Dewar, che permette di raffreddare la sostanza paramagnetica in esame a bassa temperatura.

La misura del campo magnetico viene eseguita a mezzo di una bobina rotante a velocità costante, e si è potuta garantire una misura del campo con una precisione relativa non inferiore all'1% (2).

3. RISULTATI SPERIMENTALI. — Il cloruro idrato di Praseodimio cristallizza nel sistema triclino, in monocristalli di color verde, leggermente deliquescenti (3). Nella presente ricerca si è presa come direzione di riferimento la normale alla faccia di pinacoide secondo la quale il cristallo ha avuto il massimo accrescimento. Si sono eseguite due serie di misure con varie inclinazioni del cristallo rispetto al campo magnetico esterno \mathcal{H}_0 ruotando il cristallo stesso intorno a due assi, ortogonali fra loro ed alla normale alla faccia di pinacoide (fig. 1). Lo stato spettroscopico dello ione libero trivalente Pr^{+++} risulta $4f^2 5s^2 p^4, {}^3\text{H}_4$: si ha un numero pari di elettroni; il momento risultante di spin S vale 1, quello orbitale

(*) C. F. Davis, «Graduate Student» in Fisica presso il M. I. T.; A. F. Kip, professore al M. I. T.; R. Malvano, Assistente di Fisica presso il Politecnico di Torino e membro del Centro Studi di Elettrofisica del C. N. R.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) B. BLEANEY, H. E. D. SCOVIL, «Proc. Phys. Soc.», in corso di pubblicazione.

(2) Per maggiori dettagli sulla disposizione sperimentale vedi, *Risonanza paramagnetica in alcuni alluri di Cromo a varie temperature* in corso di pubblicazione sulla «Ricerca Scientifica».

(3) Questi monocristalli, spettroscopicamente puri, ci furono appositamente preparati, sotto la direzione del prof. Spedding, dal dott. Buell Ayres.

5 ed il momento angolare totale J vale 4. In queste condizioni il fattore g di Landé sarebbe $4/5$.

Lo spettro a risonanza magnetica di questo sale alla lunghezza d'onda nel vuoto di 3,2 cm. è costituito da due righe di assorbimento la cui posizione relativa ed assoluta, nonché la forma, varia al variare dell'orientazione del cristallo rispetto al campo magnetico esterno. Tale spettro è osservabile soltanto a temperatura molto bassa. Le misure furono eseguite alla temperatura di 4 K° circa; a temperatura superiore, probabilmente ad una ventina di K°, cessa ogni assorbimento: indicazione questa che il tempo di rilasciamento spin-orbita è molto piccolo alla temperatura ambiente.

La presenza di due righe distinte di assorbimento è quasi certamente dovuta al fatto che in ogni cella elementare si trovano almeno 2 ioni Pr^{+++} . Per

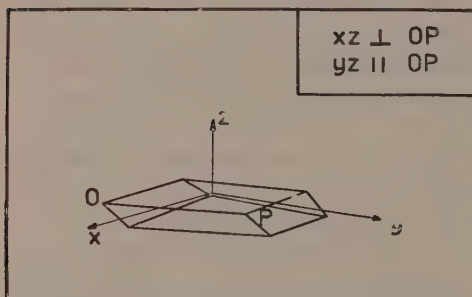


Fig. 1. - Rappresentazione del cristallo usato.

qualche orientazione si ha la sovrapposizione delle due righe di assorbimento. Queste però, anche in posizione di quasi ricoprimento, non hanno la stessa intensità.

Questo fatto è quindi certamente imputabile all'esistenza di più di due ioni per cella elementare, di cui alcuni legati ad una certa orientazione, gli altri ad un'altra. Dai rapporti dell'intensità delle due righe si è potuto dedurre che il rapporto tra i due gruppi è $3/1$.

Calcolando il valore di g dalla posizione dei picchi di assorbimento con la ben nota relazione

$$(1) \quad h\nu = g\beta \mathcal{H}_0$$

dove β è il magnetone di Bohr ed h la costante di Planck, si è ricavato un valore di g variabile con l'orientazione e compreso fra 2 e 3. Dalle misure eseguite per varie orientazioni, in base a semplici considerazioni di geometria e nell'ipotesi dell'equivalenza tra i vari ioni della cella elementare, si può dedurre che il valore di g dipende solo dall'angolo θ tra il campo magnetico esterno ed una particolare direzione relativa a ciascun ione (direzione di simmetria assiale in cui lo ione è immerso); la relazione di dipendenza risulta

$$(2) \quad \begin{cases} g^2 = g_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + g_{\perp}^2 \sin^2 \theta \\ \text{con } g_{\parallel} = 3,02 \quad g_{\perp} = 2,23. \end{cases}$$

Ciascuna riga di assorbimento presenta inoltre una evidente struttura iperfine.

Per certe orientazioni si può osservare la riga suddivisa in sei piccole frastagliature (fig. 2) quasi ugualmente spaziate, dovute alle varie orientazioni della nube elettronica rispetto alla direzione del momento magnetico nucleare.

Nella situazione riportata in fig. 2 si ha l'effetto Back-Goudsmit completo; infatti i picchi quasi ugualmente spaziatati sono 6, cioè $2I + 1$, dove I è il momento

meccanico nucleare, che per altra via si conosce essere $5/2$ ⁽⁴⁾. La distanza tra i picchi della struttura iperfine (una decina di oersted) varia al variare della orientazione del cristallo. Questo fatto è dovuto alla distorsione della nube elettronica per effetto del campo elettrico cristallino a simmetria assiale. Per certi valori dell'angolo θ si è però notato che cambia il numero dei picchi e questi non risultano più ugualmente spaziati: cessa quindi di valere il semplice effetto Back-Goudsmit. Si è necessariamente condotti ad ammettere, come conseguenza, che intervenga anche una interazione diretta tra nucleo e campo elettrico cristallino, cioè che il nucleo possieda un momento elettrico di quadrupolo.

4. CONCLUSIONI. — La descrizione che sopra si è data della risonanza paramagnetica nel cloruro idrato di Praseodimio fa trarre le seguenti conclusioni:

a) lo stato fondamentale del cloruro idrato di Praseodimio è almeno doppiamente degenere e risulta certamente diverso dallo stato fondamentale del solfato idrato di Pr. In questo ultimo sale, infatti, misure di suscettività a bassissima temperatura lasciano prevedere l'esistenza di uno stato fondamentale non degenere separato dallo stato più vicino da una quarantina di cm^{-1} . Un tale stato di cose non darebbe luogo

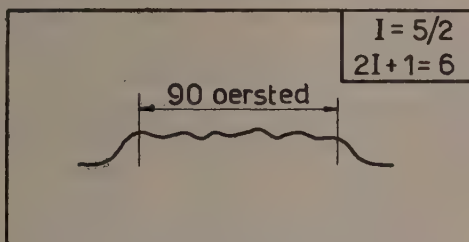


Fig. 2. — Uno dei picchi di risonanza che mostra chiaramente la struttura iperfine.

ad alcun assorbimento paramagnetico alla temperatura dell'Elio liquido (4 K°).

b) Il campo elettrico più semplice che occorre introdurre onde interpretare i dati sperimentali di cui sopra, ed in special modo la anisotropia, deve avere simmetria assiale; cioè non può essere semplicemente cubico: misure di suscettività a bassa temperatura ed a temperatura ambiente relative al solfato di Praseodimio eseguite su monocristalli hanno suggerito che anche in questo campo il semplice campo cubico non rende conto dei dati sperimentali, ed in particolare dell'anisotropia magnetica che si riscontra in questo sale specialmente a bassa temperatura. La trattazione di Shlapp Penney (« Phys. Rev. », *41*, 194 (1932)) non serve quindi a spiegare il comportamento magnetico nè del cloruro, nè del solfato idrato di Praseodimio ⁽⁵⁾.

c) La riga di risonanza presenta una struttura iperfine che lascia prevedere, in accordo con altre esperienze, un momento meccanico nucleare del Praseodimio di $5/2$ ⁽⁶⁾.

(4) J. E. MACK, « Rev. Mod. Phys. », *22*, 64 (1950).

(5) Van den Handel ha trovato d'altra parte che la suscettività dell'etilsolfato di Praseodimio lascia prevedere l'esistenza di uno stato fondamentale doppiamente degenere: Leiden Comm. 263 a.

(6) Si ritiene doveroso ringraziare il Dipartimento di Fisica del M. I. T. ed il Research Lab. of Electronics, mercé il cui aiuto si è potuto condurre a termine questa ricerca.

In particolare Malvano tiene a ringraziare il M.I.T. per l'ospitalità avuta e il Consiglio Nazionale delle Ricerche che, assegnandogli una borsa di studio, gli ha reso possibile il suo soggiorno negli Stati Uniti.

Chimica. — *Su una apparecchiatura a funzionamento continuo ed automatico per la separazione e per la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare in miscela, mediante resine scambiatrici di ioni* (*). Nota di LUIGI MAZZA, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

La separazione degli elementi delle terre rare ha costituito fino ad oggi uno dei problemi più ardui della chimica, specialmente quando le miscele da separare sono in piccola quantità. I metodi classici, basati sulla cristallizzazione frazionata o sulla precipitazione basica ripetuta, sono molto laboriosi, richiedono notevoli quantità di materiali di partenza e non permettono inoltre di isolare quantitativamente i vari elementi contenuti nella miscela (1).

La separazione per via chimica può essere effettuata solo per gruppi di elementi. Così ad esempio il lantanio, cerio, praseodimio, neodimio e samario (gruppo cerico) possono essere precipitati e separati dalle terre ittriche per aggiunta di succinato di ammonio; oppure l'europio, gadolinio, terbio, disprosio, olmio, erbio, tulio, itterbio e lutezio possono essere separati dagli elementi del gruppo del cerio mediante precipitazione con acido α lattico.

Le reazioni specifiche del lantanio (iodio), del cerio (acido antranilico; o-toluidina; p-fenetidina) e dell'europio (cacotelina e zinco), mentre sono idonee per il riconoscimento di questi elementi anche in miscele complesse, non sono utilizzabili per una loro separazione quantitativa.

I metodi di separazione del cerio, dell'itterbio e del samario basati sull'ossidazione del catione Ce^{3+} Ce^{4+} o sulla riduzione dei cationi Eu^{3+} , Yb^{3+} , Sm^{3+} a ioni bivalenti richiedono trattamenti ripetuti e, mentre permettono di ottenere questi elementi, specialmente l'europio, allo stato di grande purezza, non si prestano bene per la loro determinazione quantitativa (2). In questa categoria rientra il procedimento di estrazione del Ce^{4+} con etere da soluzioni acquose di nitrati in presenza di acido nitrico (3).

Per quanto concerne la determinazione degli elementi delle terre rare in miscela, soltanto i metodi röntgenspettroscopici di emissione e di assorbimento hanno un carattere assolutamente generale, ed offrono il vantaggio di possedere una notevole ed uniforme sensibilità (4). La spettroscopia di emissione nel visibile

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale e di Elettrochimica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) URBAIN e collaboratori, ROLLA e collaboratori, JAMES, HOPKINS e collaboratori: numerose pubblicazioni nella letteratura.

(2) HOPKINS e collaboratori, numerose pubblicazioni nella letteratura; J. MARSH, « J. Chem. Soc. », 1367 (1937); 398, 523 (1942); 8, 531 (1943); H. N. MC COY, numerose pubblicazioni nella letteratura.

(3) R. BOCK u. E. BOCK, « Zeit. f. anorg. u. allgem. Chem. » 263, 146 (1950).

(4) L. MAZZA, « Gazz. Chim. Ital. », 65, 724, (1935); 65, 730 (1935); « Physikal. Method. d. anal. Chemie », 3°, 126, Akadem. Verlags., Leipzig (1939).

e nell'ultravioletto presenta grandi difficoltà sperimentali a causa del grandissimo numero di righe e della piccola intensità delle righe analitiche.

I metodi spettrofotometrici di assorbimento sono certamente da considerare tra i più pratici, ma non sono utilizzabili per tutti gli elementi delle terre rare e presentano inoltre una sensibilità che differisce moltissimo da elemento a elemento.

La misura della suscettività magnetica dà la possibilità di eseguire determinazioni quantitative limitatamente a miscele binarie e con certe restrizioni⁽⁵⁾; la sua sensibilità varia molto da elemento ad elemento; nei casi favorevoli si possono ottenere delle approssimazioni nella concentrazione che raggiungono l'1%–2%.

Infine i metodi potenziometrico e polarografico⁽⁶⁾ sono attualmente applicabili solo alla determinazione quantitativa del cerio.

Fin dal 1947 è stata iniziata una serie di ricerche tendenti a realizzare le condizioni più opportune per la separazione e la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare in miscela.

Gli studi di Boyd, Adamson, Harris, Ketelle, Mayer, Tompkins⁽⁷⁾ sui prodotti di fissione e quelli di Lange e Nagel⁽⁸⁾, Sahama e Kamula⁽⁹⁾, Croatto⁽¹⁰⁾, Russell e Pearce⁽¹¹⁾ e specialmente di Spedding e collaboratori⁽¹²⁾ sulla separazione delle terre rare hanno portato alla conoscenza, seppure parziale, di molte delle numerose variabili che intervengono e condizionano il funzionamento delle colonne a resine scambiatrici di ioni.

In mancanza di una teoria generale applicabile in un vasto campo di condizioni, è necessario estendere quanto più possibile la ricerca sistematica per avere dati sicuri sull'influenza dei vari fattori che regolano l'efficienza della separazione.

Poichè durante tutto il tempo necessario per effettuare una completa operazione di scambio ionico di una miscela di terre rare, che di regola ha la durata di molti giorni, è spesso indispensabile che tutte le condizioni che regolano l'interazione fra resina e ioni delle terre rimangano immutate, ho ideato la colonia a funzionamento continuo ed automatico illustrata nella figura 1.

L'apparecchiatura consiste in un tubo D accuratamente riempito di resina scambiatrice (Amberlite, Dowex), la quale è sostenuta in basso da uno strato di lana di vetro e da un disco poroso E; le dimensioni delle colonne impiegate in queste ricerche sono di circa cm. 130 di altezza e cm. 3 di diametro. È ovvio che le dimensioni possono essere notevolmente ridotte nelle ricerche con isotopi radioattivi o molto aumentate quando si tratti di separare e purificare quantità rilevanti di terre rare. Il tubo F serve a mantenere costante il livello

(5) L. MAZZA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 21, 813, (1935); L. MAZZA e E. BOTTI, «Gaz. Chim. Ital.», 66, 19 (1936).

(6) G. CANNERI e G. COZZI, «Gazz. Chim. Ital.», 71, 311 (1941).

(7) Numerose pubblicazioni nella letteratura.

(8) E. LANGE u. K. NAGEL, «Z. f. Elektrochem.», 42, 210 (1936).

(9) G. SAHAMA, V. KAMULA, «Ann. Acad. Sci. Fennicae A», 57, n. 3, 5 (1941).

(10) U. CROATTO, «Ricerca Sci.», 12, 157 (1941).

(11) R. G. RUSSEL a. D. W. PEARCE, «J. Amer. Chem. Soc.», 65, 595 (1943).

(12) F. H. SPEDDING e collaboratori, numerose pubblicazioni nella letteratura.

del liquido nella colonna e ad impedirne lo svuotamento. La grossa bottiglia di Mariotte A, il filtro B, il tubo di gomma munito di pinze di Hoffmann C, servono a contenere, filtrare e regolare la velocità del liquido (eluente, rigenerante) che entra nella colonna. La velocità del liquido può essere regolata sia variando l'altezza del recipiente A, sia stringendo gradualmente le tre pinze, una delle quali è destinata alla regolazione grossa, l'altra a quella media e la terza alla regolazione fina. Con questo dispositivo è possibile ottenere un movimento del liquido attraverso la colonna rigorosamente uniforme.

La soluzione che effluisce dalla colonna scambiatrice (« effluente ») passa attraverso il tubo di gomma G ed entra nella « rampa » H destinata a racco-

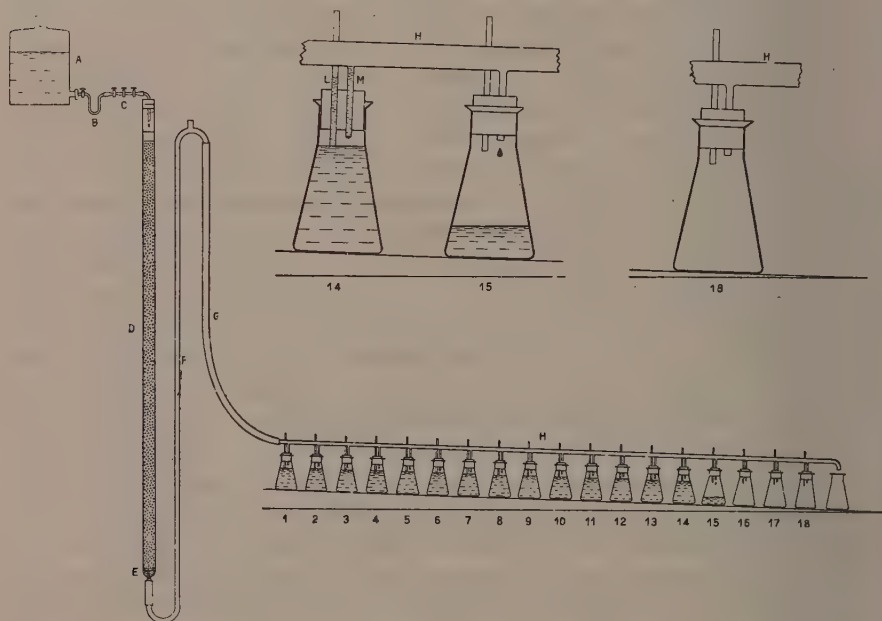


Fig. 1.

gliere periodicamente i successivi campioni di liquido in modo automatico. Essa è costituita da un tubo di vetro della lunghezza di circa 180 cm. e del diametro di circa 14 mm. al quale sono saldati in posizione equidistante 18 piccoli tubi M diretti verso il basso congiunti, mediante tappi di gomma a due fori a perfetta tenuta, ad altrettanti matracci di Erlenmeyer a collo largo e rinforzato. Ogni tappo è munito di un tubicino di vetro L passante per il secondo foro, lungo circa 10 cm. ed aperto alle due estremità: spostando in altezza la posizione di questo tubicino è possibile far defluire in ciascun matraccio un volume prefissato di « effluente » (ad esempio 100 ml.).

Il funzionamento della « rampa » è reso evidente dal particolare riportato in alto nella fig. 1. Quando il primo matraccio è pieno di liquido fino a lambire l'estremità inferiore del tubicino L questo, e simultaneamente il tubicino M, si

riempiono a loro volta, dopodiché, per l'inclinazione della rampa H, il nuovo liquido defluisce nel secondo matraccio, e così di seguito successivamente. In questo modo i matracci si riempiono uno dopo l'altro automaticamente, ed è ovvio che il loro volume ed il loro numero sarà scelto in relazione alla autonomia che si desidera. Questo dispositivo permette il funzionamento continuo anche durante la notte in modo completamente automatico. Le successive frazioni di soluzione non risultano in alcun modo inquinate di liquido che scorre nel tubo inclinato H e ciò si può facilmente verificare. Se infatti si fa passare una soluzione intensamente colorata quando già molti matracci sono riempiti di una soluzione incolore, questi non si colorano affatto, mentre i matracci successivi si riempiono della soluzione colorata.

Due apparecchiature simili a quella descritta, una con colonna riempita con « Amberlite IR 100 » l'altra con « Dowex 50 » sono entrate in funzione a cominciare dall'anno 1948 ed hanno permesso di svolgere un lavoro intenso e continuativo. Fino ad oggi si è potuto studiare: l'influenza del pH^+ delle soluzioni adoperate per l'eluzione; l'influenza della concentrazione dell'eluente, i procedimenti più efficaci per la rigenerazione ed il perfezionamento dell'azione scambiatrice della resina; i mezzi per prevenire la formazione delle muffe sui letti di resina; i limiti di carico normale delle colonne in relazione alle loro dimensioni, al tipo di resina scambiatrice ed alle dimensioni dei suoi grani; le modalità che determinano la massima regolarità nel passaggio del liquido attraverso la resina, ed evitano la formazione di vie di minore resistenza.

In relazione a tutti questi fattori è stata studiata la forma delle curve di eluzione allo scopo di determinare le condizioni sperimentali optimum di separazione. I risultati fin qui ottenuti sono notevoli: è stato possibile confermare e perfezionare molti dei risultati ottenuti da Spedding e sono stati acquisiti inoltre nuovi ed importanti dati che saranno resi noti in successive pubblicazioni.

Sono stati fra l'altro risolti in breve tempo problemi che con i metodi classici avrebbero richiesto lungo tempo, oppure addirittura non avrebbero trovato alcuna possibilità di soluzione. Fra questi la purificazione fino ad un estremo grado di alcuni elementi delle terre precedentemente ottenuti allo stato di quasi completa purezza per cristallizzazione frazionata, la determinazione quantitativa a scopo analitico di miscele di terre rare provenienti da precedenti frazionamenti, l'isolamento di elementi allo stato puro a partire da frazioni contigue o da termini impuri di frazionamento, il dosaggio di elementi delle terre in leghe binarie, la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare nei minerali.

Riportiamo qui a titolo di esemplificazione due di queste ricerche seguite con l'apparecchiatura descritta.

Nella fig. 2 è riportata la curva di eluzione eseguita a scopo analitico per determinare la composizione di una lega La-Gd ottenuta per elettrolisi di cloruri anidri delle due terre in miscela con alogenuri alcalini allo stato fuso. La lega era stata preparata seguendo il procedimento elettrometallurgico precedentemente studiato per la preparazione del lantanio, cerio e praseodimio puri⁽¹³⁾.

(13) L. MAZZA, « Atti X Congr. Intern. Chim. », vol. 3°, 604 (1938).

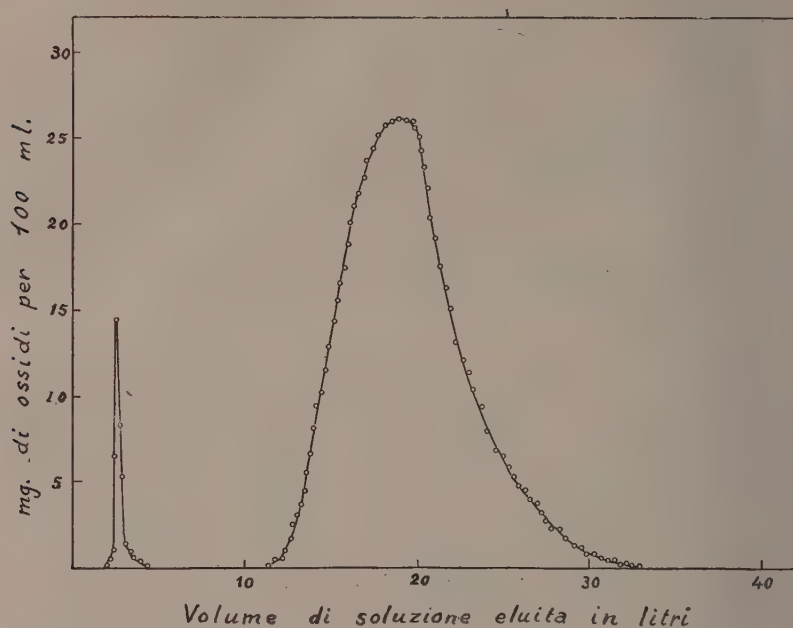


Fig. 2. - Resina Amberlite IR 100. Soluzione di citrato 1% a pH 3,5 e velocità lineare di 0,4 cm/min.

Il cloruro di lantanio adoperato per l'elettrolisi aveva una purezza per rapporto al La del 99,9 % mentre il cloruro di Gd era puro al 99,5 % ed era stato ottenuto per cristallizzazione frazionata dei benzensulfonati⁽¹⁴⁾. Nel bagno fuso la percentuale relativa delle terre rare era di 97,3 % La e di 2,7 % Gd,

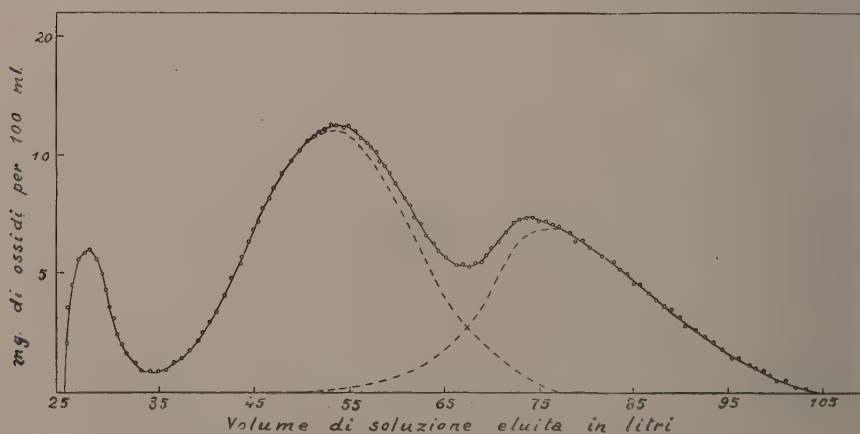


Fig. 3. - Resina: Dowex 50; soluzione di citrato 1% a pH 3,6 e velocità lineare di 0,4 cm/min.

(14) L. MAZZA, lavoro non pubblicato.

mentre nella lega è risultata in base alla separazione eseguita per scambio ionico 97,05 La e 2,95 Gd: la lega risulta cioè più ricca di Gd (+ 0,25 %) in confronto alla miscela di sali fusi di partenza.

La curva di eluzione della fig. 3 riguarda la separazione di una frazione praseodimio-neodimifera contenente piccole quantità di samario.

Dall'esame della curva risulta evidente che la separazione del Samario è stata quasi completa e la sua determinazione è assai precisa, mentre per il Neodimio ed il Praseodimio le bande relative tratteggiate in figura e determinate per via spettrofotometrica si sovrappongono parzialmente.

Mi auguro che se i mezzi di lavoro potranno essere accresciuti sia possibile perfezionare l'apparecchiatura in modo da poter studiare rigorosamente anche l'influenza della temperatura mediante un opportuno condizionamento di essa ed ho viva fiducia altresì che possano essere ottenute sul piano E. R. P. le apparecchiature röntgenspettrografiche ed ottiche già da tempo richieste ed indispensabili per queste ricerche sulle terre rare.

Esprimo la mia viva gratitudine al mio illustre Maestro prof. L. Rolla per la generosa ospitalità nel suo Istituto ed un vivo ringraziamento ai miei collaboratori dott. E. Scapaticci, G. B. Tagliafico, L. Copelli, M. A. Mor, F. Staccione e M. Valenti.

Chimica inorganica. — *Le amalgame del lantanio* (*). Nota di ALDO IANDELLI e RICCARDO FERRO, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Le prime ricerche sulle amalgame delle terre rare rimontano al 1891, con un lavoro di Winkler ⁽¹⁾, nel quale si riferiva che il cerio si scioglie nel mercurio. Successivamente, Muthmann e Beck ⁽²⁾ esaminarono le leghe del cerio col mercurio, ottenute introducendo il primo nel mercurio bollente, ed arrivando così a preparare delle amalgame fino al 16,55 % Ce. Uno studio più completo del sistema Ce-Hg fu fatto nel 1928 da Biltz ⁽³⁾, il quale da misure di tensione di vapore arrivò alla conclusione che nel sistema esiste un solo composto di formula CeHg₄, che fu ritrovato per il lantanio, praseodimio e neodimio da Daniltchenko ⁽⁴⁾. In varie altre occasioni sono state preparate da vari Autori amalgame di terre rare ricche di mercurio, ma l'unica ricerca completa esistente attualmente rimane quella di Biltz.

Abbiamo ripreso in esame queste amalgame per completare la ricerca sistematica del comportamento delle terre rare con gli altri metalli; ed abbiamo

(*) Lavoro eseguito col contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) C. WINKLER, «Ber. dtsch. chem. Ges.», 24, 883 (1891).

(2) W. MUTHMANN, H. BECK, «Liebigs Ann.», 331, 56 (1904).

(3) W. BILTZ, F. MEYER, «Z. anorg. allgem. Chem.», 176, 32 (1928).

(4) P. T. DANILTCHENKO, rif. in «J. Inst. Met.», 50, 540 (1932).

scelto il lantanio, invece del cerio, al quale si riferiscono la massima parte degli altri lavori, per la maggiore alterabilità che presentano le leghe di quest'ultimo. Il comportamento del cerio, praseodimio e neodimio è da prevedere, per quanto si conosce, che sarà uguale a quello del lantanio.

I risultati ottenuti da Biltz si riferiscono a leghe preparate a temperatura non superiore al punto di ebollizione del mercurio, alla quale verosimilmente non si raggiungono le condizioni di equilibrio per le diverse composizioni. Un aumento di temperatura porta in questo caso ad avere pressioni che crescono molto rapidamente; e questo costituisce la difficoltà maggiore per uno studio completo del sistema. L'analisi termica delle leghe La-Hg, che dovrebbero esser preparate in ambiente di gas inerte, in un forno a pressione resistente a parecchie centinaia di atmosfere, essendo difficilmente realizzabile, ci siamo limitati alla loro preparazione ed al loro esame per via röntgenografica. Nella zona ricca di mercurio (più dell'85 %) l'analisi termica è invece possibile, e contiamo di effettuarla successivamente, mentre attualmente riferiremo sui risultati ottenuti nell'intervallo La-85 % Hg.

Le amalgame sono state preparate per reazione dei due metalli in un recipiente di ferro a pareti spesse, chiuso con un coperchio dello stesso materiale saldato. Le leghe con percentuale maggiore del 40 % Hg reagiscono poco col ferro, che si ritrova poi nella lega in quantità mai superiore allo 0,5 %, e possono quindi essere ottenute direttamente, mentre per le altre i due metalli devono essere isolati dalle pareti con un crogiolo di allumina. Lo spazio che resta occupato dall'aria nell'interno del recipiente era tenuto più piccolo possibile, in modo che la quantità di ossido e azoturo che si forma risultasse trascurabile rispetto alla massa della lega.

Per ogni composizione esaminata, i due metalli chiusi nella bomba di ferro venivano scaldati a 1200° per le leghe fino al 60 % Hg, ed a temperature progressivamente più basse per quelle più ricche; e poi raffreddate molto lentamente (per vari giorni) fino a 200°-300°. Dopo la preparazione, il crogiolo di ferro veniva aperto in corrente di CO₂, per evitare l'ossidazione, e lo stesso gas veniva usato per tutte le operazioni da compiere sui campioni. Sono state così preparate ed esaminate 30 amalgame di composizione regolarmente crescenti dal La al 90 % Hg.

Le leghe così preparate si presentano come masse ottenute per fusione, con piccole cavità in qualche caso, abbastanza fragili dal 50 % Hg in su, ed estremamente ossidabili all'aria. La loro alterabilità aumenta con la percentuale di mercurio, per diminuire di nuovo quando quest'ultima diviene altissima. Tutte quante sono state analizzate, attaccandole con HCl diluito o HNO₃ (per quelle con % Hg maggiore) e dosando rispettivamente il mercurio come tale o come solfuro, ed il lantanio come ossido, dopo precipitazione dell'ossalato.

La polvere per l'esame röntgenografico veniva preparata fresando o frantumando i campioni in corrente di CO₂, e saldandola in capillari di vetro, per evitare anche la minima ossidazione, che produce fotogrammi illeggibili. La loro nettezza diminuisce con l'aumentare della percentuale di La. In tutti i casi è usata la radiazione K del rame.

Nelle nostre condizioni di preparazione, il lantanio forma col mercurio quattro composti di formula: LaHg , LaHg_2 , LaHg_3 , LaHg_4 , nella regione fra il 60 e l'85 % Hg. Le composizioni intermedie forniscono fotogrammi che contengono le righe dell'una o dell'altra delle fasi precedenti, il che permette di escludere la presenza di altre.

Nella porzione del sistema fra il lantanio e il 59,8 % Hg (LaHg), si hanno dei fotogrammi che, fino al 40 % Hg mostrano soltanto le righe di LaHg ; mentre per composizioni più ricche di lantanio ne compaiono altre, diverse da quelle del lantanio. In questa regione le leghe hanno una struttura diversa a seconda del modo con cui è stato fatto il raffreddamento: quelle raffreddate rapidamente da 600°–700° danno dei fotogrammi che presentano soltanto le righe di LaHg , fino al 31,6 % Hg. Esiste quindi un'altra fase fra La ed LaHg , corrispondente probabilmente ad un massimo nascosto nel diagramma di stato, e la cui composizione appare assai difficile a stabilire, specialmente per la scarsissima nettezza delle righe sui fotogrammi, che non può essere eliminata nemmeno con ricotture prolungate. Su queste leghe si è tentato di fare qualche osservazione micrografica, pulendo i campioni a secco ed esaminandoli in corrente di CO_2 . Le leghe appaiono formate da due fasi, ma non si può valutare esattamente la loro quantità per la rapidità grandissima con la quale si alterano. Da tutte le osservazioni fatte, questa fase intermedia dovrebbe trovarsi circa a mezza strada fra LaHg ed La, e potrebbe corrispondere alla formula La_2Hg , che si trova del resto anche in molti altri diagrammi di leghe del lantanio.

Fra il composto 1:4 ed il Hg, i dati di Biltz escludevano l'esistenza di qualsiasi altra fase. Questa regione è stata esaminata, preparando varie amalgame ricche di Hg, e scaldandole in modo da eliminare per distillazione l'eccesso di mercurio. Per fare questo, esse venivano saldate nel vuoto in tubetti di vetro a forma di V rovesciato. La lega che si trovava in uno dei rami veniva riscaldata a 280°, mentre l'altro ramo era mantenuto a temperatura leggermente inferiore (30°–40° di meno). In queste condizioni il mercurio distilla nel ramo più freddo, lasciando un residuo che in tutti i casi ha la composizione corrispondente alla formula LaHg_4 . Si può quindi escludere che esistano nel sistema fasi più ricche di Hg di LaHg_4 , per temperature non inferiori a 280°, e pressioni non superiori a 150 Torr. Effettuando però la distillazione a temperatura più bassa (170°–180°), che richiede naturalmente un tempo assai maggiore, i campioni danno dei fotogrammi diversi da quelli della fase 1:4, indicando così la presenza di altre fasi, stabili a temperature inferiori, più ricche di mercurio. Come abbiamo già detto, ci proponiamo di esaminare termicamente la porzione del sistema fra 85 e 100 % Hg, e di riferire successivamente i risultati.

In conclusione, il lantanio forma col mercurio i composti La_2Hg (?), LaHg , LaHg_2 , LaHg_3 , LaHg_4 , ed uno o più altri con % maggiore di Hg. Dei quattro composti LaHg , LaHg_2 , LaHg_3 ed LaHg_4 , è stata studiata la struttura, usando i fotogrammi delle polveri, per la difficoltà che presenta l'isolamento di cristalli unici.

Composto LaHg. - Del composto LaHg è stata già descritta la struttura⁽⁵⁾, che, come avviene per parecchi altri composti intermetallici, è cubica centrata, con un lato della cella elementare di 3,837 Å.

Composto LaHg₂. - Le righe dei fotogrammi delle polveri dei campioni di LaHg₂ (composizione teorica 25,72 % La, 74,28 % Hg; trovato: 25,6 %, 25,85 % La, 74,15 %, 74,4 % Hg) corrispondono a quelle di un reticolo esagonale con $a_0 = 4,948$, $c = 3,633$, $c/a = 0,734$. Nella tabella I sono riportati gli indici ed i valori corrispondenti di $\text{sen}^2 \theta$ calcolati ed osservati.

TABELLA I.
LaHg₂ fotogramma delle polveri K_α Cu.

hkl	$\text{sen}^2 \theta$ oss.	$\text{sen}^2 \theta$ calc.	hkl	$\text{sen}^2 \theta$ oss.	$\text{sen}^2 \theta$ calc.
101	0,0780	0,0771	401	0,5603	0,5609
110	0,1010	0,0967	222	0,5671	0,5666
111	0,1421	0,1416	213	0,6297	0,6298
201	0,1735	0,1738	321	0,6567	0,6576
002	0,1798	0,1795	410	0,6767	0,6772
211	0,2702	0,2706	303	0,6951	0,6943
112	0,2765	0,2763	411	0,6218	0,6221
300	0,2903	0,2903	223	sfumata	0,7906
301	0,3344	0,3351	114	0,8153	0,8150
220	0,3873	0,3870	313	0,8235	0,8232
221	0,4328	0,4318	501	0,8507	0,8511
103		0,4372	412	0,8570	0,8568
311	0,4633	0,4641	330	0,8714	0,8707
302	0,4698	0,4698	331	0,9144	0,9156
113	0,4999	0,5007	403	0,9209	0,9200
203	0,5345	0,5330	421	0,9483	0,9479

$$\text{sen}^2 \theta = 0,032249 \cdot (h^2 + k^2 + hk) + 0,044845 \cdot l^2$$

$$a = 4,948 \quad c = 3,633 \quad c/a = 0,734$$

La densità, ottenuta distillando nel vuoto su campioni del composto del benzolo anidro, risulta di 12,45 corrispondente ad 1,05 molecole di LaHg₂ per cella elementare. Ponendo 1 La in: 000,2 Hg in: 1/3 2/3 1/2, 2/3 1/3 1/2 (tipo C 32 dello Strukturbericht), si calcolano intensità delle righe che sono in buon accordo con quelle trovate, come si vede dalla tabella II.

(5) A. IANDELLI, R. FERRO, « Questa Rivista », ser. VIII, X, 48 (1951).

TABELLA II.
LaHg₂ Intensità osservate e calcolate.

<i>hkl</i>	I calc.	I oss.	<i>hkl</i>	I calc.	I oss.	<i>hkl</i>	I calc.	I oss.
100	0,23	—	310	0,15	—	411	6,2	<i>mf</i>
001	1,3	—	221	5,7	<i>md</i>	104	0,2	—
101	10,0	<i>f</i>	103			223	3,9	sfumata
110	10,6	<i>f</i>	311	7,0	<i>mf</i>	322	0,5	—
200	0,1	—	302	8,8	<i>mf-f</i>	500	0,1	—
111	4,2	<i>md</i>	113	2,2	<i>dd</i>	114	17,3	<i>ff</i>
201	6,05	<i>m</i>	400	0,07	—	313	13,8	<i>f-ff</i>
002	2,4	<i>d</i>	203	3,35	<i>d</i>	204	0,3	—
102	0,2	—	401	3,5	<i>d</i>	501	8,2	<i>mf</i>
210	0,2	—	222	8,95	<i>mf-f</i>	412	42,65	<i>fff</i>
211	9,0	<i>f</i>	312	0,3	—	330	11,7	<i>f</i>
112	11,5	<i>mf</i>	320	0,15	—	420	0,5	—
300	5,4	<i>m</i>	213	7,7	<i>mf</i>	403	12,3	<i>f</i>
202	0,15	—	321	8,3	<i>mf-f</i>	331	8,3	<i>mf-f</i>
301	2,45	<i>d</i>	410	11,0	<i>f</i>	214	1,2	—
220	4,6	<i>md-m</i>	303	2,8	<i>d</i>	421	34,4	<i>fff</i>
003	0,4	—	402	0,2	—	502	0,1	—
212	0,3	—	004	2,0	—			

La struttura del composto LaHg₂, risulta quindi uguale a quella di PrGa₂, già descritta⁽⁶⁾. Gli atomi di Hg sono disposti in strati esagonali analoghi a quelli che si hanno nel reticolo della grafite, mentre quelli di La si trovano negli strati intermedi, disposti ciascuno al centro di un prisma a base esagonale di atomi Hg. Le distanze fra atomi sono: in uno strato Hg-Hg 2,86 Å, La-La 4,95 Å; fra uno strato e l'altro: La-Hg 3,39, La-La 3,63, Hg-Hg 3,63 Å. Rispetto alle dimensioni dei due atomi nei reticoli corrispondenti, risultano diminuite le distanze Hg-Hg su ogni piano, e quelle La-La fra uno strato e l'altro, circa invariate quelle La-Hg. Un tentativo di calcolo delle distanze secondo Pauling⁽⁷⁾, ammettendo cioè in tutto il reticolo un legame puramente metallico, porta a delle distanze Hg-Hg in accordo con quelle trovate (2,89 invece di 2,86), mentre fornisce valori superiori per quelle La-Hg. Uno scambio di elettroni fra gli atomi di La e quelli di Hg, che dia luogo ad una carica negativa agli strati di Hg e positiva a quelli di La appare quindi anche in questo caso assai verosimile.

(6) A. IANDELLI, «Gazz. chim. ital.», 79, 70 (1949).

(7) L. PAULING, «Journ. de Chim. phys.», 46, 276 (1949).

Composto LaHg_3 . - I fotogrammi dei campioni di La-Hg, (composizione teorica: La 18,75 %, Hg 81,25 %; trovato: La 18,9 e 18,92 %, Hg 81,1 e 81,0 %) forniscono delle righe che sono in accordo con quelle di un reticolo esagonale con $a_0 = 3,404$, $c = 4,951$, $c/a = 1,454$ (vedi tabella III).

TABELLA III.

LaHg_3 , fotogramma delle polveri $\text{K}_\alpha \text{Cu}$.

hkl	$\text{sen}^2 \theta$ oss.	$\text{sen}^2 \theta$ calc.	hkl	$\text{sen}^2 \theta$ oss.	$\text{sen}^2 \theta$ calc.
101	0,0919	0,0923	211	0,5011	0,5012
002	0,0963	0,0966	212	0,5729	0,5736
102	0,1650	0,1648	114	0,5898	0,5909
110	0,2042	0,2044	300	0,6118	0,6133
200	0,2722	0,2725	204	0,6587	0,6591
103	0,2852	0,2855	105	0,6720	0,6721
201	0,2964	0,2967	213	0,6943	0,6944
112	0,3010	0,3010	302	0,7094	0,7099
202	0,3688	0,3692	220	sfumata	0,8177
004	0,3861	0,3865	214	sfumata	0,8636
104	0,4549	0,4547	205	0,8759	0,8765
210	0,4779	0,4771	310	—	0,8859
203	0,4905	0,4900	311	0,9099	0,9100

$$\text{sen}^2 \theta = 0,068144 \cdot (h^2 + k^2 + hk) + 0,024156 \cdot l^2$$

$$a = 3,404 \quad c = 4,951 \quad c/a = 1,454$$

La densità del composto è assai difficile a determinare con esattezza, per la sua grandissima ossidabilità; il valore ottenuto è di 11,41, corrispondente ad un numero di $0,46 \cong 1/2$ molecola per cella elementare. Questo si potrebbe accordare con una disposizione delle due specie atomiche, nelle posizioni di un reticolo esagonale compatto, completamente disordinata; che fornisce infatti valori delle intensità abbastanza in accordo con quelli trovati (ved. Tabella IV, colonna A).

Una struttura completamente disordinata appare però assai improbabile, per il fatto che in tal caso essendo gli atomi completamente equivalenti fra loro, il rapporto assiale dovrebbe avere un valore vicino ad 1,63; mentre quello trovato (1,45) è molto più basso, indicando nettamente una differenza fra piani reticolari successivi. Purtroppo la determinazione delle posizioni degli atomi di La ed Hg,

non è possibile, per la piccola differenza dei due fattori atomici. Così, per esempio, il calcolo delle intensità delle righe fatto per una disposizione tipo Mg_3Cd (ordinata) porta agli stessi valori per le righe trovate, ed a valori per quelle di soprastruttura che arrivano al massimo ad $1/10$ delle più deboli trovate. Questa disposizione, del resto, non spiega nemmeno lei il rapporto assiale molto più piccolo di 1,63 (Mg_3Cd ha $c/a = 1,62$).

TABELLA IV.

LaHg₃, Intensità osservate e calcolate.

<i>hkl</i>	I oss.	I calcolate		<i>hkl</i>	I oss.	I calcolate	
		A	B			A	B
001	—	0	0,5	211	<i>f</i>	30,0	30,3
100	—	21,1	21,4	212	<i>md</i>	10,0	10,1
101	<i>ff</i>	100,0	100,0	114	<i>m</i>	19,6	19,7
002	<i>m</i>	21,6	21,6	005	—	0	0,02
102	<i>m</i>	18,8	18,9	300	<i>d</i>	9,9	9,9
110	<i>m</i>	26,4	26,5	301	—	0	0,12
003	—	0	0,05	204	<i>d</i>	5,1	5,2
111	—	0	0,28	105	<i>m</i>	15,7	15,7
200	<i>dd</i>	4,6	4,7	213	<i>f</i>	32,0	32,5
103	<i>mf</i>	26,2	26,2	302	<i>m</i>	22,1	22,2
201	<i>m</i>	25,1	25,1	115	—	0	0,17
112	<i>f</i>	33,0	33,2	220	<i>md</i>	15,1	15,1
202	<i>d</i>	6,5	6,6	303	—	0	0,18
004	<i>d</i>	4,1	4,1	221	—	0	0,19
113	—	0	0,14	214	<i>m</i>	17,2	17,4
104	<i>d</i>	5,3	5,4	205	<i>mf</i>	27,2	27,2
210	<i>d</i>	5,2	5,3	310	<i>dd</i>	9,5	9,6
203	<i>md</i>	15,3	15,3	311	<i>ff</i>	65,0	65,9

La disposizione più probabile appare, da ragioni puramente dimensionali, invece di quella completamente disordinata, un'altra parzialmente disordinata, con le posizioni 000 della cella esagonale occupate da atomi Hg, e quelle $1/3 \ 2/3 \ 1/2$ occupate statisticamente da atomi La e Hg in numero uguale. Dai raggi atomici dei due elementi si calcola così un valore di $a_0 = 3,36 \text{ \AA}$ e di $c/a = 1,49$, assai vicini a quelli sperimentali. Nella tabella IV sono riportati nella colonna B i valori delle intensità così calcolate, che non si distinguono sensibilmente da quelli per la disposizione completamente disordinata.

TABELLA V.

LaHg₄ fotogramma delle polveri (asimmetrico) K_α Cu.

I	d/n	$h^2+k^2+l^2$	a_0	I	d/n	$h^2+k^2+l^2$	a_0
<i>md</i>	2,624	14	10,780	<i>d-dd</i>	0,9578	130	10,943
<i>ff</i>	2,543	18	10,793	<i>d</i>	0,9452	134	10,945
<i>mf</i>	2,181	25	10,839	<i>md</i>	0,9241	140	10,947
<i>dd</i>	1,817	36	10,879	<i>md-d</i>	0,9112	144	10,949
<i>ddd</i>	1,664	43	10,892	<i>mf</i>	0,8955	150	10,953
<i>dd</i>	1,573	48	10,900	<i>d·sf</i>	0,8825	154	10,955
<i>dd</i>	1,538	50	10,909	<i>d·sf</i>	0,8744	157	10,956
<i>ff</i>	1,485	54	10,911	<i>d-md</i>	0,8648	160	10,959
<i>d-md</i>	1,402	61	10,914	<i>d</i>	0,8611	162	10,960
<i>d</i>	1,381	62	10,915	<i>d-md</i>	0,8429	169	10,964
<i>d-md</i>	1,340	66	10,916	<i>d-md</i>	0,8387	171	10,964
<i>d</i>	1,314	69	10,918	<i>md</i>	0,8319	174	10,965
<i>f</i>	1,287	72	10,920	<i>ddd</i>	0,8253	176	10,966
<i>dd</i>	1,234	78	10,921	<i>m</i>	0,8219	178	10,967
<i>mf-f</i>	1,151	90	10,926	<i>m</i>	0,8173	180	10,968
<i>d</i>	1,103	98	10,930	<i>f</i>	0,8128	182	10,966
<i>dd</i>	1,069	104	10,932	<i>m</i>	0,8081	184	10,962
<i>dd</i>	1,051	108	10,934	<i>f-ff</i>	0,8039	186	10,965
<i>mf·sf</i>	1,025	114	10,936	<i>mf-f</i>	0,7978	189	10,969
<i>dd</i>	1,011	117	10,938	<i>ff</i>	0,7913	192	10,967
<i>dd</i>	0,9984	120	10,938	<i>ff</i>	0,7873	194	10,967
<i>dd</i>	0,9894	122	10,940	<i>m·sf</i>	0,7832	196	10,965
<i>f·sf</i>	0,9763	126	10,941	<i>fff·sf</i>	0,7794	198	10,966

 a_0 estrapolata per $\theta = 90^\circ$: 10,968

Composto LaHg₄. - La massima parte delle righe più intense fornite dal composto LaHg₄, è in accordo con una struttura cubica centrata, con $a_0 = 3,656$ Å. Dalla densità sperimentale di 12,7 si ricava un numero di molecole di LaHg₄ per cella elementare di $0,397 \cong 2/5$. Si potrebbe pensare quindi ad una struttura cubica centrata con disposizione disordinata delle due specie atomiche. La presenza di numerose altre righe, alcune delle quali di intensità comparabile con le precedenti, porta ad escludere tale struttura ed a cercare una cella cubica di

dimensioni maggiori. Si riesce a rendere conto completamente di tutte le righe trovate, con una cella elementare cubica di lato triplo del precedente, come si vede dalla tabella V, nella quale sono riportate le righe che compaiono nel fotogramma. Come si osserva, la massima parte di esse hanno indici che si accordano con quelli permessi per un reticolo cubico centrato (Σh^2 pari) e quelle che fanno eccezione sono deboli o debolissime. Si ha così una cella cubica, di lato 10,968 Å, che contiene 54 atomi, se tutte le posizioni reticolari sono occupate, e che deve avere una struttura derivante da un reticolo cubico centrato. Tutto ciò porta a ritenere che si tratti di una struttura tipo ottone γ , della quale, come è noto, si conoscono numerosi rappresentanti. Per una disposizione ordinata, la formula dovrebbe essere diversa da quella 1:4, il che è possibile con differenze nella composizione di pochi $\%$. Questo non sarebbe in contrasto con i risultati analitici per i vari campioni di LaHg_4 , che variano fra 14,5 e 15,30 $\%$ La.

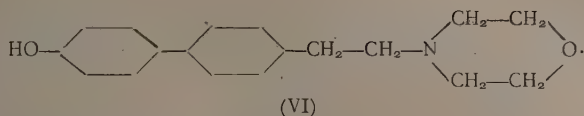
In un recente lavoro di Rundle⁽⁸⁾ sono riferite le strutture di tre amalgame di composizione UHg_2 , UHg_3 , UHg_4 , ed è interessante il fatto che esse siano isomorfe con i composti corrispondenti del lantanio. Rundle trova per UHg_2 la stessa struttura di LaHg_2 , per UHg_3 un reticolo esagonale compatto completamente disordinato, e per UHg_4 un reticolo « in prima approssimazione cubico centrato », ma con varie righe in più. Le osservazioni fatte per la struttura dei composti del lantanio si applicano anche a quelle dell'uranio; e la somiglianza più stretta si rileva dai valori numerici delle costanti, riportate nella tabella VI, nella quale il valore di a_0 di UHg_4 di Rundle è stato moltiplicato per 3.

TABELLA VI.
Amalgame dell'uranio e del lantanio.

Fasi	Struttura	Costanti reticolari	
		Me=La	Me=U
MeHg	Cubico centrato	$a_0 = 3,837$	—
MeHg_2	Esagonale, tipo C 32	$a_0 = 4,948$	$a_0 = 4,98$
		$c/a = 0,734$	$c/a = 0,646$
MeHg_3	Esagonale compatto	$a_0 = 3,404$	$a_0 = 3,320$
		$c/a = 1,454$	$c/a = 1,468$
MeHg_4	Cubico centrato, tipo ottone γ	$a_0 = 10,968$	$a_0 = 10,86$

Anche per qualche altro composto intermetallico finora esaminato si trova lo stesso comportamento; e sembra quindi che l'analogia fra le terre rare e l'uranio sia ancora più stretta nei composti intermetallici che in quelli ordinari.

(8) R. E. RUNDLE, « Acta Crystall. », 2, 148 (1949).

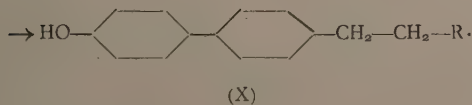
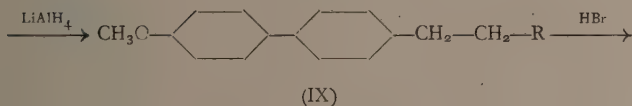
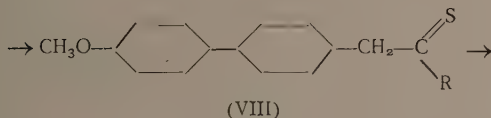
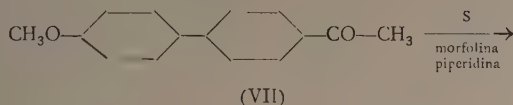


Lo scopo della ricerca era duplice:

1° accertare l'assenza di proprietà simpaticomimetiche in composti strutturalmente affini al sympathol bifenilico;

2° indagare l'eventuale azione broncodilatatrice in relazione alla natura dei gruppi uniti all'atomo di azoto.

Per sintetizzare i suddetti composti siamo partiti dal 4-ossibifenile che è stato trasformato in 4-metossibifenile e successivamente in 4 metossi-4'-acetilbifenile secondo procedimenti noti (4). I termini (IV), (V) e (VI) furono ottenuti tramite la reazione di Willgerodt-Kindler applicata al 4-metossi-4'-acetilbifenile, usando come basi la morfolina e la piperidina, e riducendo le relative tioammidi con LiAlH_4 in etere assoluto:



La reazione di Kindler, applicata per la prima volta al nucleo bifenilico metossisostituito, procede con rese elevate nel caso della morfolina (85-90 %), minori nel caso della piperidina (35%). La riduzione delle tioammidi, da noi tentata invano con zinco e acido acetico, con lega nichel-alluminio, con amalgama d'alluminio in ambiente idralcoolico (Kindler (5)) non ha condotto a risultati soddisfacenti neppure con nichel Raney (6), evidentemente per la scarsissima solubilità

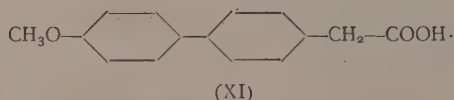
(4) FUSCO e RENIERI, loc. cit.; FIESER e BRADSHAW, « J. Am. Chem. Soc. », 58, 1741 (1936).

(5) KINDLER, « Ber. », 54, 1080 (1921).

(6) KORNFIELD, « J. Org. Chem. », 16, 131 (1951).

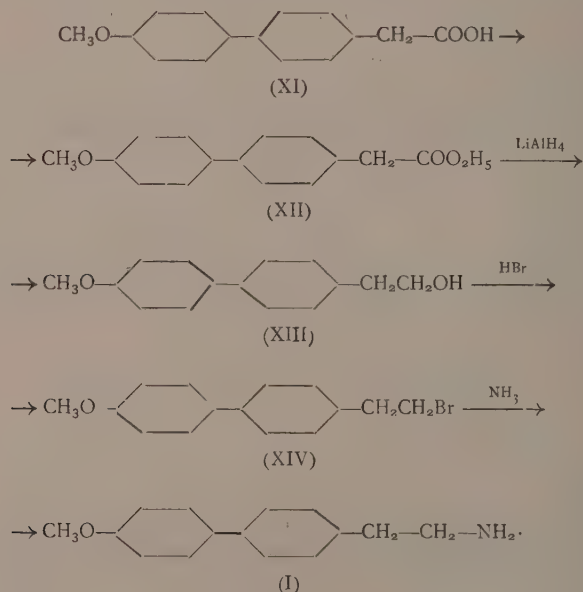
delle tioammidi stesse. Ottimo esito ha avuto invece la riduzione con idruro di litio e alluminio, applicata per la prima volta a questo tipo di composti sulla scorta delle esperienze condotte da Uffer e Schlittler⁽⁷⁾ nel caso delle ammidi. La tiomorfolide dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico viene ridotta con resa pressochè teorica; altissima anche la resa del termine piperidico.

Essendosi rivelata inattuabile la reazione di Willgerodt-Kindler con dimetilamina e dietilamina, i termini (II) e (III) sono stati ottenuti per altra via. La tiomorfolide, saponificata in ambiente acido, porta con alte rese (85-90%) all'acido corrispondente



Dal cloruro di tale acido abbiamo preparato l'amide, la dimetilammide e la dietilammide. La riduzione di queste ultime ha condotto con buoni rendimenti alle ammine (II) e (III), mentre l'amide si è dimostrata pressochè inerte all'azione di LiAlH_4 .

Pertanto il termine (I) ha dovuto essere preparato con un cammino di sintesi più lungo:



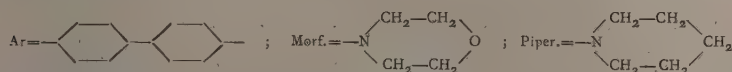
Oltre ai 6 prodotti finali sono stati sintetizzati 8 intermedi; e poichè la purificazione dei termini (II), (III) e (IV) attraverso i cloridrati corrispondenti si presentava difficile e il risultato dell'analisi era insoddisfacente, ne abbiamo

(7) UFFER e SCHLITTLER, «Helvetica chim. Acta», XXXI, 1397 (1948).

preparato a scopo analitico gli iodometilati. Sono complessivamente 17 nuovi termini della serie bifenilica (vedi in proposito la tabella riassuntiva).

L'esame farmacologico delle ammine arilalifatiche succitate è attualmente in corso.

Tabella riassuntiva dei nuovi derivati bifenilici ottenuti nel presente lavoro.



N. form.	Formula di struttura	Id. grezza	p. f.	Analisi	
				calc. %	trov. %
VIII a	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CS—Morf.	C ₁₉ H ₂₁ O ₂ NS	151°	S 9,79	9,70
IV	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —Morf.HCl	C ₁₉ H ₂₄ O ₂ NCl	248-52°	N 4,19	3,81
XV	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —Morf.CH ₃ I	C ₂₀ H ₂₆ O ₂ NI	232°	N 3,19	3,20
VI	HO—Ar—CH ₂ —CH ₂ —Morf.HCl	C ₁₈ H ₂₂ O ₂ NCl	252-55°	N 4,38	4,51
VIII b	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CS—Piper.	C ₂₀ H ₂₃ ONS	127°	S 9,85	9,89
V	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —Piper.HCl	C ₂₀ H ₂₆ ONCl	238-40°	N 4,22	4,40
XI	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —COOH	C ₁₅ H ₁₄ O ₃	184-5°	C 74,36 H 5,82	C 74,45 H 5,79
XVI	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CO—N(CH ₃) ₂	C ₁₇ H ₁₉ O ₂ N	75-6°	—	—
II	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —N(CH ₃) ₂ HCl	C ₁₇ H ₂₂ O ₂ NCl	229-31°	N 4,56	4,28
XVIII	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —N(CH ₃) ₃ I	C ₁₈ H ₂₄ O ₂ NI	245-7°	N 3,52	3,48
XVII	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CO—N(C ₂ H ₅) ₂	C ₁₉ H ₂₃ O ₂ N	58-59°	—	—
III	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —N(C ₂ H ₅) ₂	C ₁₉ H ₂₅ ON	55-57°	N 4,94	4,50
XIX	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —N(CH ₃)(C ₂ H ₅) ₂ I	C ₂₀ H ₂₈ ONI	205-6°	N 3,29	3,18
XII	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —COOC ₂ H ₅	C ₁₇ H ₁₈ O ₃	68-69°	C 75,53 H 6,71	C 75,71 H 6,73
VIII	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —OH	C ₁₅ H ₁₆ O ₂	139-40°	C 78,97 H 7,07	C 78,90 H 7,30
XIV	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ Br	C ₁₅ H ₁₅ OBr	139-41°	Br 27,45	27,29
I	CH ₃ O—Ar—CH ₂ —CH ₂ —NH ₂ ·HCl	C ₁₅ H ₁₈ ONCl	290-92°	N 5,22	5,03

PARTE SPERIMENTALE.

RELAZIONI DI WILLGERODT-KINDLER SUL 4-METOSSI-4'-ACETILBIFENILE.

Tiomorfolidi dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico (form. VIII a). - In palloncino a smeriglio con refrigerante a ricadere si fanno bollire per 14-15 ore 20 g di 4-metossi-4'-acetilbifenile (1 mole), 4,4 g di zolfo in fiori (1,5 moli) e 25 g di morfolina (5 moli). Ultimata la reazione si versa la massa in 40-50 cm³ di metanolo, agitando; dopo raffreddamento si filtra la pappa cristallina e si lava due volte con poco metanolo. Il grezzo, giallo e grigiastro, fonde a 138-40 °C e può essere usato per le ulteriori reazioni. La tiomorfolide pura può essere ottenuta per ripetute cristallizzazioni da acetato d'etile con aggiunta di carbone animale; si ottiene in tal modo in scagliette incolori che fondono a 151 °C. È solubile in acetone, poco in metanolo ed etanolo anche a caldo; insolubile in acqua. Resa 85-90 % in grezzo. (Analisi in tabella).

Tiopiiperidide dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico (form. VIII b). - Falliti i tentativi di operare a pressione ambiente, si è ritenuto opportuno procedere come segue: in tubo Carius si trattano 5 g di 4-metossi-4'-acetilbifenile (1 mole) con 5 g di piperidina (4 moli) e 1,1 g di zolfo (1,5 moli), a 120-150° per 5 ore. Si scarica in 20 cm³ di metanolo; dopo 15-30 minuti si decanta dalle peci e si lascia in frigorifero. Entro 2-3 ore cristallizza un prodotto ancora notevolmente impuro, che per ricristallizzazione da metanolo con nero animale può essere ottenuto in fiocchetti incolori a p. f. 127 °C. Resa 35 % (in grezzo fondente a 118-20°). Il prodotto è solubile in acetone e acetato d'etile freddi, in metanolo ed etanolo caldi; insolubile in acqua. (Analisi in tabella).

4-metossi-4'-(β)-N-morfolinoetil-bifenile (form. IV). - In 200 cm³ di etere assoluto (distillato prima su sodio, poi su CaH₂) si sospendono 10 g di tiomorfolidi (VIII a); vi si aggiungono cautamente 2 g di LiAlH₄ (rapporto molare 3 : 5) e si mantiene a lieve ebollizione per 12-15 ore. Al termine di tale periodo, dopo raffreddamento, si aggiungono cautamente dall'alto del ricadere 150 cm³ di HCl diluito (1 : 5). Evaporato l'etere si scalda all'ebollizione e si filtra per filtro a pieghe: per raffreddamento cristallizza il cloridrato della base (IV), perfettamente incolore, pochissimo solubile in H₂O, solubile in etanolo e acetone; p. f. 248-52 °C. Resa 95 %.

Iodometilato (form. XV). - Dal cloridrato sospeso in H₂O si libera con NaOH la base che viene estratta con etere. Per evaporazione del medesimo si ottiene la base libera come polvere colorata in giallo a p. f. 92-95° che viene sciolta nel minimo di acetone e bollita a ricadere per 30' con CH₃I in eccesso: fin dall'inizio tendono a separarsi dei cristalli giallochiari che, raccolti e ricristallizzati da H₂O, fondono a 232 °C. (Analisi in tabella).

4-ossi-4'-(β)-N-morfolinoetil-bifenile (form. VI). - 2 g di cloridrato (IV) vengono bolliti per 4 ore con 7,5 cc. di HBr 48 % (densità 1,49) addizionati di 20 cm³ di acido acetico glaciale. Al termine della reazione si versa in 40 cm³

di H_2O , si filtra il bromidrato, lo si scioglie in acqua calda, si alcalinizza debolmente con NaOH e si filtra all'ebollizione con nero animale. Per raffreddamento cristallizza il sale sodico sotto forma di scaglette incolori; dalla soluzione calda si può precipitare il cloridrato, puro, che fonde a $252-55^\circ\text{C}$ (VI) e che come tutti i cloridrati di questa serie è solubile in acqua solo a caldo. (Analisi in tabella). La resa di smetilazione non supera il 50%.

4-metossi-4'-(β)-N-piperidino-etil-bifenile (form. V). - Si procede allo stesso modo del termine morfolinico (IV). Con le stesse modalità di separazione si isola un cloridrato insol. a freddo in H_2O , poco sol. in etanolo, sol. in acetone; p. f. $238-40^\circ$. Resa 80%. (Analisi in tabella).

Acido 4-metossibifenilil-4'-acetico (form. XI). - La saponificazione della tiomorfolide (III a) si effettua con H_2SO_4 in ambiente acetico. Una miscela di g 10 di tiomorfolide, 15 cm^3 di acido acetico, $2,5\text{ cm}^3$ di H_2SO_4 e 4 cm^3 di H_2O viene bollita a ricadere fino a che è cessata la formazione di idrogeno solforato (cartina all'acetato di piombo); occorrono 8-10 ore. È necessaria una buona agitazione per evitare le incrostazioni di acido via via formantisi. Si versa la miscela calda in 100 cm^3 di H_2O , si filtra e si lava con molta acqua; si spappola il precipitato in 200 cm^3 di ammoniaca 1:10. Si filtra all'ebollizione per filtro a pieghe e si acidifica a caldo con HCl : l'acido precipita immediatamente. Lo si asciuga alla pompa e lo si secca in stufa a 100° . Il grezzo così ottenuto fonde a $175-178^\circ\text{C}$ e serve per le ulteriori operazioni. Dopo 2-3 cristallizzazioni da acetato d'etile con nero animale si presenta in foglioline incolori, sol. in alcali solo a caldo; p. f. $184-5^\circ\text{C}$. Resa di saponificazione 85%. (Analisi in tabella).

Cloruro dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico. - Pesi uguali di acido (XI) e di PCl_5 vengono scaldati a b. m. fino a che la reazione si innesca; si sospende il riscaldamento e poi lo si riprende fino a totale limpidezza della soluzione. Alla pompa ad acqua, a 50° , si allontana il POCl_3 . Il residuo, giallo chiaro, non è distillabile neppure a vuoto spinto, e non è cristallizzabile. Lo si purifica sommariamente per lavaggio con etere di petrolio. Abbastanza solubile in benzolo. Resa 95%.

Dimetilammide (form. XVI) e *dietilammide* (form. XVII) *dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico*. - Alla soluzione del cloruro in benzolo ass. si aggiunge una soluzione di dimetilammina (risp. dietilammina) in etere o benzolo ass.; si allontana l'eccesso di ammina con HCl dil., si svaporano i solventi e si ottengono prodotti semisolidi, di purificazione assai difficile.

Discreti risultati si ottengono sciogliendo le ammidi in etere di petrolio + acetato d'etile caldi e lasciando raffreddare: precipitano degli oli che lasciati a sè cristallizzano.

La dimetilammide, in scaglette giallastre, fonde a $75-76^\circ\text{C}$; la dietilammide a $58-59^\circ\text{C}$.

4-metossi-4'-(β)-dimetilaminoetil-bifenile (form. II). - La riduzione della dimetilammide (XVI) con LiAlH_4 si effettua in etere ass. secondo le modalità

già descritte per i termini (IV) e (V); rapporto molare ammidici: riducente = 3 : 5; ebollizione a ricadere per 15-20 ore. Si tratta poi con HCl dil., si svapora l'etere e si filtra all'ebollizione. Il cloridrato cristallizzato per raffreddamento è bianco, solubile in acetone, in etanolo e metanolo. Resa 65 %.

Iodometilato (XVIII). - Dalla sospensione del cloridrato in H_2O si libera la base con NaOH, la si estrae con etere e si evapora quest'ultimo. Si scioglie la base in acetone, si bolle a ricadere per 30' con eccesso di CH_3I e si cristallizza da H_2O ; p. f. 245-7 °C. (Analisi in tabella).

4-metossi-4'-(β)-dietilaminoetil-bifenile (form. III). - Si procede come nel caso della dimetilamide II; tuttavia, poichè il cloridrato non è facilmente filtrabile, conviene liberare direttamente la base dopo averlo lavato per decantazione, ed estrarre con etere. Per evaporazione di quest'ultimo si ottiene un prodotto cristallino, debolmente colorato in giallo, a p. f. 55-57 °C, solubile in etanolo e acetone.

Iodometilato (XIX). - Si procede come per lo iodometilato (XVIII); p. f. 205-6 °C. (Analisi in tabella).

Etere etilico dell'acido 4-metossibifenilil-4'-acetico (form. XII). - 38 g di acido (XI) vengono fatti ricadere per 4 ore con 400 cm³ di etanolo ass. e 4 cm³ di H_2SO_4 conc. Dopo distillazione di circa 200 cm³ d'alcool si versa in acqua (800 cm³) e si estrae 2-3 volte con etere; si lava l'estratto eterico con soluzione di Na_2CO_3 , e poi con acqua, si secca su cloruro di calcio e si evapora l'etere. Il residuo (38,5 g: resa 91 %) rondea a 65-66 °C; una piccola porzione viene sublimata per analisi a 2 mm. Si ottiene in tal modo a p. f. 68-69 °C. L'estere è solubile in etere, poco sol. in metanolo, etanolo, acetone e CCl_4 ; ins. in etere di petrolio. È giallo e untuoso al tatto. (Analisi in tabella).

4-metossi-4'-(β)-ossietil-bifenile (form. XIII). - In pallone a 3 colli con imbuto separatore e ricadere efficace si pongono 5 g di $LiAlH_4$ in 200 cm³ di etere ass.; dall'imbuto separatore vengono aggiunti lentamente alla soluzione del riducente 33 g di estere (XII) (precedentemente fuso sotto vuoto per disidratarlo totalmente) sciolti in 150 cc di etere ass. Rapporto molare estere: idruro = 1 : 1⁽⁸⁾. Il deflusso della soluzione dell'estere viene regolato in base alla vivacità della reazione. Ultimata l'aggiunta si bolle a ricadere per 8 ore e si idrolizza con 200 cm³ di HCl diluito (1 : 5). Parte dell'alcool formatosi rimane sciolto nello strato eterico; parte precipita direttamente allo stato solido. Si filtra il solido e si decanta la soluzione eterica; per evaporazione del solvente residua una massa cristallina giallognola, fondente a 135-36 °C. La parte solida filtrata viene invece ripresa con 100 cm³ di acetone caldo; si filtra e si allontana l'acetone. Questa seconda porzione fonde a 137,5-138 °C. Si ottengono in totale 28,5 g di alcool; resa teorica.

Cristallizzato due volte da acetato d'etile, l'alcool (XV) fonde a 139 °C. Si scioglie in acetone e cloroformio, discretamente in benzolo, poco in metanolo ed etanolo. (Analisi in tabella).

(8) Per la riduzione degli esteri con $LiAlH_4$ cfr. FINHOLT, BOND e SCHLESINGER, « J. Am. Chem. Soc. », 69, 1197 (1947). Abbiamo usato un eccesso del 100 % di riducente rispetto al teorico.

4-metossi-4'-(β)-bromoetil-bifenile (form. XIV). — La reazione fra l'alcool (XIII) e PBr₃ conduce a un prodotto non caratterizzabile che, per reazione con NH₃, conduce a sostanze parimenti inidentificabili. Si procede allora in questo modo: 1 g di 4-metossi-4'-(β)-ossietil-bifenile viene bollito a ricadere con 40 cm³ di HBr 48 %. Dopo 4 ore di ebollizione si diluisce con acqua; si filtra il precipitato (costituito da scaglie rosa, di bell'aspetto; p. f. 127–28 °C) e lo si cristallizza, con nero animale, da acido acetico 75 %; p. f. del prodotto puro: 140–41 °C. Il prodotto è discretamente solubile in metanolo, cloroformio, tetracloruro di carbonio. (Analisi in tabella).

4-metossi-4'-(β)-aminoetil-bifenile (form. I). — 5 g di bromoderivato vengono scaldati in tubo Carius con 30 g di etanolo al 9 % in peso di NH₃, per 6 ore in stufa a 100–110 °C: dopo questo tempo si travasa il contenuto in un palloncino e si evapora tutto il solvente (pompa ad acqua). Si riprende il residuo con HCl 1 : 5, si bolle e si filtra a caldo. Il cloridrato separatosi a freddo viene filtrato e seccato; è scarsamente solubile in acqua, meglio in etanolo. L'ammina, liberata a caldo dal cloridrato, è poco solubile in etere. Per la purificazione del cloridrato si sospende il grezzo in poco etanolo e lo si scioglie a caldo; dopo filtrazione si diluisce con poco HCl 1 : 5. Il prodotto così ottenuto fonde a 290–92 °C con decomposizione. (Analisi in tabella).

Chimica metallorganica. — *Alofosfine per alchilazione degli alogenuri di fosforo.* Nota ^(*) di ADRIANO SACCO, presentata dal Socio L. CAMBI.

I metodi sinora noti per la preparazione delle alchilalofosfine non danno in genere buoni rendimenti. Quello descritto da Plets ⁽¹⁾, per esempio, della decomposizione termica delle alchilalofosfine secondo le reazioni:



pur essendo tra i migliori — esso dà luogo infatti a rendimenti sino al 50 % — richiede prodotti di partenza instabili e di difficile preparazione.

L'alchilazione del tricloruro di fosforo con i composti di dialchilmercurio ⁽²⁾ conduce a buone rese per le sole monoalchildiclorofosfine; in questo caso però la purificazione dal mercurio è laboriosa e il metodo è inoltre poco consigliabile per l'alta tossicità dei composti organomercurici alifatici.

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1951.

(1) G. M. KOSOLAPOFF, *Organophosphorus Compounds*, Ed. J. Wiley & Sons, New York, p. 47 (1950).

(2) G. M. KOSOLAPOFF, *Organophosphorus Compounds*, Ed. J. Wiley & Sons, New York, p. 42 (1950).

L'etildiclorofosfina si ottiene con ottimi rendimenti solo alchilando il tricloruro di fosforo con tetraetilpiombo⁽³⁾, secondo la reazione complessiva:



Le corrispondenti bromoalchilfosfine sono però poco note, nè esistono metodi di sintesi soddisfacenti.

Scopo di questa Nota è la descrizione della reazione fra tribromuro di fosforo e tetraetilpiombo, e, parallelamente, delle reazioni tra gli alogenuri di fosforo e tetraetilstagno.

Il tricloruro di fosforo, alla temperatura d'ebollizione, non reagisce con il tetraetilstagno; il tribromuro dà luogo invece alla monoetildibromofosfina con rese del 65-70 % secondo la reazione:



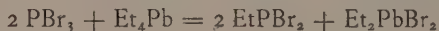
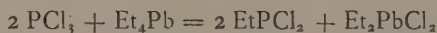
Non è stato possibile giungere per questa via alla monobromofosfina secondaria.

Il triioduro di fosforo si comporta in modo particolare, corrispondentemente alla seguente reazione:

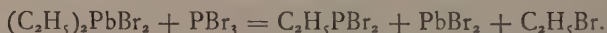
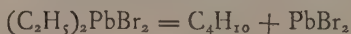


Il diioduro di fosforo che si forma è risultato, nelle condizioni sperimentali usate, inerte rispetto al tetraetilstagno aggiunto in eccesso.

Più complessa si presenta la reazione fra tribromuro di fosforo e tetraetilpiombo. Per la maggior reattività del tribromuro rispetto al tricloruro di fosforo la reazione procede assai più velocemente ed è praticamente completa in 3-4 ore, anzichè nelle 36 ore richieste nell'analoga reazione fra tricloruro di fosforo e tetraetilpiombo⁽³⁾. Inoltre, mentre in un primo stadio le due reazioni presentano il seguente andamento parallelo

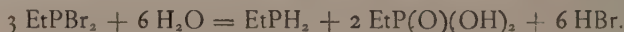


in uno stadio successivo il dibromuro di dietilpiombo, meno stabile del dicloruro di dietilpiombo, può reagire contemporaneamente secondo le due equazioni:



Infatti, sia operando in solvente alla temperatura di 70-75 °C che senza solvente, a temperature intorno ai 100 °C, si è sempre notato un abbondante sviluppo di butano accanto a una certa quantità di bromuro d'etile.

La monoetildibromofosfina ottenuta è un liquido chiaro, fumante all'aria, che trattato con acqua dà uno sgradevole odore di fosfina dovuto alla reazione di disproporzionamento:



(3) M. S. KHARASCH et al., « J. Org. Chem. », 14, 429 (1919).

I rendimenti migliori si ottengono trattando, in assenza di solvente e secondo le modalità descritte nella parte sperimentale, il tribromuro di fosforo con tetraetilpiombo nel rapporto $\text{Et}_4\text{Pb}/\text{PBr}_3 = 1 : 2,2$.

La maggiore reattività del tribromuro di fosforo rispetto al tricloruro si manifesta nel fatto che, mentre una miscela di tetraetilpiombo e tricloruro reagisce lentamente alla temperatura d'ebollizione, la reazione fra tribromuro e tetraetilpiombo si innesca da sola anche a temperatura ambiente e in pochi istanti diventa tumultuosa con notevole sviluppo di calore e abbondante formazione di fosforo rosso, fosfine e alogeno fosfine varie.

Con un eccesso di tetraetilpiombo rispetto ai rapporti indicati si ottengono notevoli quantità di sale di fosfonio quaternario accanto a prodotti che sono in corso di studio.

Dai risultati di queste ricerche si conferma che il tetraetilpiombo è un agente etilante molto più attivo del tetraetilstagno.

PARTE SPERIMENTALE. – Il tetraetilpiombo usato in questo lavoro fu il prodotto commerciale cortesemente fornitoci dalla Società Nobel.

Il tribromuro di fosforo venne preparato da bromo e fosforo rosso secondo J. F. Gay ⁽⁴⁾, e il tetraetilstagno secondo Krause da cloruro stannico e bromuro di etilmagnesio ⁽⁵⁾.

Reazione fra tricloruro di fosforo e tetraetilstagno. – A g. 13 di tetraetilstagno (1 mole) in palloncino munito di refrigerante a ricadere, valvola a mercurio e imbuto a rubinetto, vennero aggiunti g. 23 di tricloruro di fosforo (3 moli) e quindi si bollì a refluxo per 10 ore in corrente d'azoto. Dalla miscela distillata a pressione atmosferica con colonna di frazionamento si ottennero g. 20 di tricloruro di fosforo, p. e. $72-6^\circ\text{C}$ (ricupero: 87 %); dal residuo, distillato sotto vuoto, si ottennero g. 11 di tetraetilstagno, p. e. $80^\circ\text{C}/14\text{ mm.}$ (ricupero: 85 %).

Reazione fra tribromuro di fosforo e tetraetilstagno. – A g. 25 di tetraetilstagno (1 mole), nell'apparecchio descritto, vennero aggiunti g. 29 di tribromuro di fosforo (1 mole) e quindi scaldati a bagno d'olio a 150°C , in corrente d'azoto, per 16 ore. Dal prodotto di reazione, distillato a pressione atmosferica con colonna di frazionamento si ottennero g. 16 di liquido bollente a $160-64^\circ\text{C}$. Dal residuo, distillato a pressione ridotta, si ottennero g. 20 di bromuro di trietilstagno, p. e. $95-8^\circ\text{C}/13\text{ mm.}$

Analisi. – L'analisi del bromo venne effettuata idrolizzando il composto con acqua ossigenata ammoniacale e precipitando, dopo aver distrutto l'acqua ossigenata in eccesso per ebollizione e dopo acidificazione con acido nitrico, con nitrato d'argento.

(4) J. F. GAY et al., *Inorganic Syntheses*, Ed. McGraw-Hill, New York, vol. II, p. 147 (1946).

(5) E. KRAUSE e A. VON GROSSE, *Die Chemie der metallorganischen Verbindungen*, Ed. Borntraeger, Berlino, p. 315 (1937).

Il fosforo venne determinato per fusione con perossido di sodio nella bomba di Parr dopo aver cautamente ossidato con acqua ossigenata il composto assorbito in poco ossido di magnesio, nella bomba di Parr stessa, e portato a secchezza.

	trov. %	: Br = 73,10	; P = 13,40
per $C_2H_5PBr_2$	calc.	72,75	14,20.

Reazione fra triioduro di fosforo e tetraetilstagno. - A g. 2,1 di fosforo bianco (1 g. atomo) sciolti in cc. 50 di solfuro di carbonio, nel solito apparecchio, vennero aggiunti cautamente, raffreddando esternamente con acqua, g. 25,7 di iodio (1,5 moli) sciolti nella minima quantità di solfuro di carbonio. Al termine della reazione vennero aggiunti alla soluzione g. 16 di tetraetilstagno (1 mole) e si bollì a ricadere, in corrente di azoto, per 4 ore. Si allontanò quindi per distillazione il solfuro di carbonio e si continuò il riscaldamento per 1 ora a bagno maria: dal residuo venne infine separato per filtrazione e lavato con etere di petrolio anidro il precipitato rosso cristallino formatosi. Dal filtrato, dopo allontanamento dell'etere di petrolio, si ottennero per distillazione frazionata sotto vuoto due frazioni bollenti rispettivamente a 78-80 °C e 116-20 °C a 13-14 mm.

Residuo cristallino; p. f. 124 °C

(P_2J_4 : p. f. 124,5 °C)

Analisi. 1° frazione	trov. %	: Sn = 50,4
per $C_8H_{20}Sn$	calc.	50,6
2° »	trov. %	: J = 38,0
per $C_6H_{15}SnJ$	calc.	38,1.

Reazione fra tribromuro di fosforo e tetraetilpiombo. - I°) A g. 60 di tribromuro di fosforo (2,2 moli) in pallone a tre colli a smeriglio munito di agitatore a tenuta, imbuto a rubinetto, tubo d'efflusso dell'azoto, refrigerante a ricadere e valvola con acido solforico conc., scaldati a bagno maria, vennero aggiunti durante 1 ora g. 33 di tetraetilpiombo (1 mole). La miscela in reazione venne scaldata per altre 3 ore a bagno maria, quindi si distillò sotto vuoto direttamente dal pallone ottenendosi g. 44 di prodotto greggio (p. e. 45-55°/14 mm.).

Dopo rettificazione a pressione atmosferica, in corrente d'azoto, si ottennero g. 38 di monoetilbromofosfina (resa 78% rispetto al fosforo), p. e. 161 °C. $n_D^{20} = 1,8216$; $n_D^{15} = 1,5451$.

Analisi (eseguita come precedentemente):

	trov. %	: Br = 72,51	; P = 14,00
per $C_2H_5PBr_2$	calc.	72,75	14,20.

II°) A g. 50 di tribromuro di fosforo (3 moli) vennero aggiunti, secondo le modalità della reazione precedente, g. 20 di tetraetilpiombo (1 mole). I gas sviluppati durante la reazione vennero condensati in recipiente raffreddato con ghiaccio secco e acetone; si raccolsero g. 4 di liquido che per evaporazione a 1-2 °C diedero circa cc. 500 di gas e un residuo di bromuro d'etile, p. e. 36 °C.

La determinazione della densità del gas diede un valore di $0,0025 \text{ g./cm.}^3$ a 20°C e 750 mm. , in buon accordo con il valore dato dalla letteratura per il butano. ($2,703 \text{ Kg/Nm}^3$).

III°) A g. 126 di tribromuro di fosforo ($2,5 \text{ moli}$) in cc. 200 di etere isopropilico anidro, nell'apparecchio descritto precedentemente, vennero aggiunti a goccia a goccia, all'ebollizione dell'etere, g. 60 di tetraetilpiombo (1 mole). La miscela venne scaldata a ricadere in corrente d'azoto per 15 ore, quindi filtrata e il residuo lavato con etere isopropilico. Dal filtrato, dopo allontanamento dell'etere, si ottennero per distillazione frazionata g. 45 di liquido bollente a $158-63^\circ\text{C}$ (resa 44% rispetto al fosforo).

Analisi (eseguita come precedentemente):

	trov. % : Br = 72,00
per $\text{C}_2\text{H}_5\text{PBr}_2$ calc.	72,75.

Endocrinologia. — *Contributi intorno all'azione della temperatura e dell'ormone follicolostimolante sulla stasi spermatogenetica in «Rana temporaria»* L. Nota di MARIO GALGANO e BENEDETTO LANZA (*), presentata (**) dal Socio N. BECCARI.

INTRODUZIONE. — La spermatogenesi della *Rana temporaria* L. è stata descritta con particolare accuratezza da Witschi (1924) (1), il quale, in base allo studio di alcuni aspetti del comportamento sessuale della specie, ha potuto distinguere nell'ambito di essa delle «razze precoci» e delle «razze tardive». Alle prime apparterebbero le popolazioni di Basilea e della pianura germanica; alle seconde quelle delle pianure baltiche e di alta montagna (Alpi).

Nelle «razze precoci» la fregola ha luogo in febbraio-marzo e nel corso di essa viene espulsa la maggior parte degli spermatozoi; subito dopo ha inizio la fagocitosi degli spermatozoi residui e si ha una lenta ripresa della moltiplicazione protogoniale; questa si intensifica in maggio e diviene vivacissima in giugno, mese in cui si giunge alla formazione di un gran numero di gruppi isogeni spermatogoniali. Il periodo della formazione dei gruppi isogeni spermatogoniali si estende all'incirca fino alle prime settimane di luglio. In luglio iniziano le rapide fasi della maturazione, che portano alla formazione dei nuovi spermatozoi tra la seconda quindicina di agosto e la prima di settembre. Terminata la spermatogenesi, il testicolo entra in una fase di stasi assoluta, durante la quale sono presenti nelle ampolle solo protogoni quiescenti e spermatozoi. Nelle «razze tardive» l'accoppiamento ha luogo più tardi, all'incirca in maggio, per cui in esse l'espulsione degli spermatozoi viene a coincidere per un certo periodo di tempo con l'inizio della mol-

(*) Le esperienze sono state eseguite dall'autore più giovane (LANZA); il testo è stato elaborato insieme. Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia ed Embriologia dell'Università di Napoli e nella Clinica Medica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) E. WITSCHI, «Zeitschr. f. Zellen - u. Gewebelehre», 1, 523 (1924).

tiplicazione proto-spermatogoniale (maggio, giugno); nelle «razze tardive», inoltre, il processo spermatogenetico avrebbe in genere un ritmo più veloce, tanto che già in agosto sarebbe completata la formazione del nuovo lotto di spermatozoi e il periodo di stasi s'inizierebbe già ai primi di settembre.

Le brillanti ricerche di Cei (1942, 1943, 1944)^(2, 3, 4) sulle Rane rosse di Europa hanno chiarito che in *R. temporaria* la stasi spermatogenetica invernale non è influenzata o quasi da una temperatura di tipo estivo. Ciò a differenza di quanto fu riscontrato da Galgano (1934, 1936)^(5, 6) in *R. esculenta* e dallo stesso Cei⁽⁴⁾ in un'altra Rana rossa, la *R. graeca*, nelle quali specie si ottiene una rigogliosa ripresa dell'attività spermatogenetica con l'uso della serra calda d'inverno.

Secondo Galgano e Cei, mentre in *R. esculenta* e in *R. graeca* la spermatogenesi è di tipo potenzialmente continuo, con una stasi determinata essenzialmente dal fattore ambientale temperatura, in *R. temporaria* la spermatogenesi è di tipo veramente discontinuo, con una stasi invernale regolata soprattutto da fattori interni autonomi, per quanto modellata sulle variazioni stagionali della temperatura nell'*habitat* della specie. In *R. temporaria*, tuttavia, una temperatura elevata accelera fortemente la spermatogenesi, se applicata all'inizio del suo normale periodo di attività, per cui questo si conclude precocemente e subentra la stasi anche in piena estate.

Il Cei^(3, 4) ha per primo tentato di determinare se tale stasi in *R. temporaria* era causata da una incapacità periodica dell'ipofisi a secernere, per lo meno in quantità sufficiente, la gonadotropina adatta a sostenere la spermatogenesi. A tale scopo egli ha eseguito degli innesti di ipofisi di *R. esculenta* in piena gametogenesi (di ipofisi, perciò, secernenti attivamente FSH) su alcuni esemplari in stasi di *R. temporaria*, mantenuti in serra calda. Purtroppo i risultati ottenuti - positivi - vennero resi estremamente incerti da cause accidentali (infezione, deperimento organico), che alterarono il già scarso materiale a disposizione dell'Autore.

Recentemente Van Oordt, Creutzberg e Spronk (1949)⁽⁷⁾ hanno riferito di aver ottenuto, in inverno, una distinta ripresa dell'attività spermatogenetica in esemplari di *R. temporaria* iniettati con Gestyl, una gonadotropina serica prodotta dalla Casa Organon e dotata prevalentemente di azione follicolostimolante. Tali autori, però, evidentemente all'oscuro delle ricerche sopra ricordate, omettono di dirci in quali condizioni sperimentali abbiano tenuti gli animali, rendendo perciò impossibile una precisa interpretazione dei risultati da essi ottenuti.

ESPERIENZE. - Meritava quindi di controllare esperienze così interessanti.

A tale scopo abbiamo usato maschi adulti, uniformi per taglia, di *R. temporaria* (di «razza tardiva») provenienti dai dintorni di Andermatt (Uri; Svizzera);

(2) G. CEI, «Monit. Zool. Ital.», 53, 131 (1942).

(3) G. CEI, «Boll. di Zool.», 14, 105 (1943).

(4) G. CEI, «Monit. Zool. Ital.», 54 (supplemento), 1 (1944).

(5) M. GALGANO, «Monit. Zool. Ital.», 45 (supplemento), 82 (1934).

(6) M. GALGANO, «Arch. Ital. Anat. Embriol.», 35, 1 (1936).

(7) G. J. OORD (Van), CREUTZBERG F. e SPRONK N., «Konink. Nederland. Akad. van Wetenschappen», 52, 535 (1949).

m. 1500 circa s. l. m.)⁽⁸⁾ e mantenuti alla temperatura naturale di Firenze, dal giorno del loro arrivo (nel novembre 1950) a quello d'inizio delle esperienze (8 gennaio 1951), perchè nel frattempo non ne venisse alterata la stasi spermatogenetica. Quattordici esemplari furono passati l'8 gennaio 1951 in serra⁽⁸⁾, a una temperatura oscillante fra i $+20^{\circ}$ e i $+25^{\circ}$ C; di essi, sette esemplari servirono per controllare l'effetto della serra (2° lotto), mentre gli altri sette esemplari (3° lotto) furono iniettati all'incirca a giorni alterni con dosi variabili di Gestyl⁽⁸⁾ (da un minimo di 100 U. I. a un massimo di 133 U. I. pro dose e pro capite). Altri quattro esemplari furono lasciati alla temperatura invernale esterna (1° lotto). Prima e nel corso dell'esperienza gli animali furono tenuti in capaci terrari. Gli esemplari del 2° e del 3° lotto furono nutriti con lombrichi e vermi della farina; tutti si nutrono sufficientemente, eccezion fatta per un esemplare del 3° lotto. Non fu dato alcun nutrimento agli esemplari del 1° lotto, ibernanti.

Le rane furono sacrificate il 27 gennaio 1951, il 28 febbraio 1951 e il 9 marzo 1951, rispettivamente a distanza di 20 giorni (1 esemplare del 1° lotto; 3 esemplari del 2°; 3 esemplari del 3°), di 52 giorni (1 esemplare del 2° lotto; 1 esemplare del 3°) e di 61 giorni (3 esemplari di ciascun lotto) dal principio dell'esperienza. I testicoli furono fissati nel liquido di Sanfelice, inclusi in paraffina e colorati con ematossilina-eosina (quelli appartenenti alle rane uccise in 20^{ma} giornata) e con emallume-safranina-orange (tutti gli altri).

RISULTATI. — 1° lotto (temperatura naturale di Firenze).

a) *Esemplare ucciso il 27 gennaio.* — Testicolo in stasi spermatogenetica, cioè con cellule germinali rappresentate esclusivamente da protogoni quiescenti e da spermi; questi sono regolarmente disposti a fasci compatti nell'interno delle ampolle, che appaiono grandi e provviste di lume ampio. Canalicoli deferenti con lume modesto, vuoti.

b) *Esemplari uccisi il 9 marzo.* — I testicoli di tutti e tre gli esemplari appaiono in stasi spermatogenetica quasi completa essendovi solo una modesta ripresa dell'attività di moltiplicazione protogoniale. In un esemplare i canalicoli deferenti sono amplissimi e colmi di spermi, che peraltro permangono numerosissimi, a fasci compatti, anche nell'interno delle ampolle; negli altri esemplari i canalicoli sono solo discretamente dilatati e vuoti di spermi.

2° lotto (serra calda: $+20^{\circ}$ - 25° C.).

a) *Esemplari uccisi il 27 gennaio (20 giorni di serra).* — In tutti gli esemplari si è avuta ripresa dell'attività spermatogenetica — diffusa in tutto il testicolo,

(8) Porgiamo i nostri più vivi ringraziamenti al Sig. Fritz Ernst di Zurigo, cui dobbiamo le rane usate in questa esperienza, al Chiar.mo prof. Nello Beccari, che gentilmente ci ha concesso di usare la serra dell'Istituto di Anatomia Comparata di Firenze, e alle Case Organon e Ravasini, per aver messo a nostra disposizione il quantitativo di Gestyl occorrente.

ma molto scarsa in certe ampolle e più vivace in altre - fino ai primi rari gruppi isogeni di spermatociti I in stadio leptotene, alcuni dei quali sono in degenerazione; discreto il numero dei gruppi isogeni di spermatogoni, di cui un certo numero in mitosi e diversi in degenerazione picnotica. Nelle ampolle gli spermi appaiono smossi (disposti ancora parzialmente in fasci compatti si trovano solo in un esemplare) e una parte di essi ha raggiunto i canalicoli deferenti, un po' dilatati.

b) *Esemplare ucciso il 28 febbraio (52 giorni di serra).* - Nel testicolo sono presenti tutti gli stadi della spermatogenesi, sino a un notevole numero di fasci di nuovi spermi; l'attività gametogena è regolare, ma non mancano picnosi a carico di cellule ad ogni stadio, specialmente abbondanti in qualche rara ampolla. I canalicoli deferenti hanno lume ridottissimo.

c) *Esemplari uccisi il 9 marzo (61 giorno di serra).* - Nei testicoli di due esemplari vi è una notevole attività spermatogenetica, che in uno è giunta a dare un piccolo numero di spermatidi rotondi e nell'altro un gran numero di fasci di nuovi spermi; in ambedue appaiono numerose cellule germinali in degenerazione picnotica. Nel terzo esemplare un ciclo spermatogenetico si è già concluso, con formazione di numerosi fasci di spermi, e, per di più, vi è debolmente accennato l'inizio di un secondo ciclo, come è attestato dalla presenza di una scarsa attività di moltiplicazione protogonale.

3° lotto (serra calda + Gestyl).

a) *Esemplari uccisi il 27 gennaio (20 giorni di serra + 1.026 U. I. di Gestyl pro capite).* - In tutti e tre gli esemplari vi è stata una ripresa piuttosto vigorosa e all'incirca omogenea dell'attività spermatogenetica, fino a numerosi gruppi di spermatociti I in stadio leptotene; le degenerazioni tra gli spermatogoni e gli spermatociti, scarse in un esemplare, sono abbastanza numerose negli altri due. Le ampolle sono prive o quasi di spermi; i canalicoli, ora a lume virtuale ora a lume abbastanza ampio, contengono talvolta spermi.

b) *Esemplare ucciso il 28 febbraio (52 giorni di serra + 2.426 U. I. di Gestyl pro capite).* - I testicoli di questo esemplare sono caratterizzati dal fatto che la maggior parte delle cellule germinali, in stadi diversi di sviluppo, sono colpite da processi degenerativi; solo in poche ampolle sono visibili fasci di nuovi spermi di aspetto normale. Gli estesi e gravi fatti degenerativi riscontrati sono senza dubbio da attribuirsi allo stato patologico dell'esemplare, che infatti non si era nutrito o quasi durante tutto il lungo periodo trascorso in serra ed era diventato estremamente magro.

c) *Esemplari uccisi il 9 marzo (61 giorni di serra + 2.958 U. I. di Gestyl pro capite).* - Il testicolo di un esemplare è in piena attività spermatogenetica e in esso è già presente un numero piuttosto alto di fasci di nuovi spermi; un certo numero di cellule germinali, dagli spermatogoni compresi in poi, è in degenerazione picnotica. I canalicoli deferenti sono ridotti e contengono talvolta qualche spermio. Negli altri due esemplari un primo ciclo spermatogenetico si è già concluso, con la produzione di un notevole lotto di nuovi spermi, ed ha avuto

inizio un secondo ciclo; l'esistenza di questo nuovo ciclo è attestata dalla presenza di una modesta (ma in certi punti notevole) attività di moltiplicazione protogoniale, alla quale si aggiunge, in un es., una modestissima e localizzata ripresa di attività spermatogenetica, con parecchie picnosi, che giunge al massimo fino a qualche rara meta-telofase meiotica. Nei due es. i canalicoli deferenti hanno il lume abbastanza ampio e contengono pochi spermii.

DISCUSSIONE. — A) *Controlli tenuti al freddo invernale di Firenze.* — Il testicolo dell'esemplare ucciso il 27 gennaio era in completa stasi spermatogenetica e il suo aspetto non si scostava quindi per nulla da quello dei testicoli delle rane viventi nel loro *habitat* naturale. Nelle gonadi degli esemplari uccisi il 9 marzo vi era invece una debole ripresa dell'attività di moltiplicazione protogoniale, la quale in natura comincia circa due mesi più tardi; tale anticipo è con tutta probabilità da attribuire alla temperatura di Firenze, più mite di quella dell'*habitat* naturale (cfr. più sotto).

B) *Effetto della serra da sola.* — I risultati da noi ottenuti sono notevolmente differenti da quelli descritti da Cei^(2, 3, 4) nella stessa specie. Infatti noi abbiamo finito con l'ottenere una ripresa notevole e generalizzata a tutto il testicolo della spermatogenesi, fino alla conclusione, in un esemplare, di un ciclo. Negli esemplari del Cei, invece, la spermatogenesi o era rimasta in stasi, oppure, tutt'al più, presentava una ripresa modesta e sporadica, limitata a qualche ampolla o a ristrette zone del testicolo.

Dobbiamo subito dire che i risultati ottenuti da Cei sono inoppugnabili. Di ciò siamo certi, in quanto che il più anziano di noi ebbe agio di esaminare i preparati fatti da Cei, e le sue esperienze furono condotte nello stesso Istituto e all'incirca nelle stesse condizioni di allevamento delle nostre.

Le differenze esistenti fra i risultati del Cei e i nostri, d'altra parte, non ci sembrano imputabili a semplici variazioni individuali, perchè troppo forti, e neppure alla diversità di temperatura in sede di esperienza (16°–18° C, 18°–22° C e 18°–24° C nell'esperienze del Cei; 20°–25° C nelle nostre). Esse non dovrebbero nemmeno dipendere dalla diversa provenienza delle rane; infatti gli esemplari di « razza tardiva » del Cei erano stati catturati tra i 1300 e i 1862 metri s. l. m. nelle Alpi Orientali, mentre i nostri provenivano dalle Alpi Svizzere (m. 1500 s. l. m.). Del resto Cei ha ottenuto risultati concordanti anche usando rane di « razza precoce » provenienti dalla pianura germanica. Riteniamo quindi che la spiegazione di tali differenze sia piuttosto da ricercarsi altrove.

L'interpretazione più soddisfacente del caso in questione ci sembra la seguente. La diversità più importante che esiste fra le esperienze del Cei e le nostre consiste nel periodo in cui esse furono iniziate e condotte: quelle di Cei su esemplari di « razza tardiva » dalla prima metà di agosto al 1° ottobre, dal 1° e dal 20 settembre al 4 novembre, dal 1° ottobre al 2 dicembre e dal 14 novembre al 15 febbraio successivo; le nostre dall'8 gennaio al 27 gennaio, al 28 febbraio e al 9 marzo. Di qui, verosimilmente, l'origine delle differenze notate: gli esemplari del Cei erano ancora lontani dall'epoca della normale ripresa dell'attività spermatogenetica; i nostri più vicini. Vien fatto perciò di supporre che nei primi

sia stata più forte ed abbia prevalso la componente interna, i fattori autonomi determinatori della stasi, sulla componente esterna, la temperatura di serra, favorevole al ripristino della spermatogenesi. Nei secondi la componente interna si sarebbe attenuata e avrebbe prevalso l'azione favorevole della temperatura di serra.

L'ipotesi ci sembra verosimile, tanto più che trova qualche appoggio nelle osservazioni seguenti.

Un carattere fisiologico di tipo periodico, com'è la stasi spermatogenetica in *Rana temporaria*, dovrà pur presentare un massimo. Tale massimo verosimilmente si verifica durante uno stadio precoce del periodo di stasi: le esperienze condotte da Cei in questo stadio dimostrano che allora la stasi è fortissimamente determinata da fattori interni autonomi ed è inattaccabile o quasi da una temperatura elevata.

La fase culminante del periodo di stasi sarebbe preceduta da una fase ascendente, durante la quale l'attività spermatogenetica declinerebbe, perchè sempre più ostacolata dai fattori interni, anche se la temperatura è elevata, e sarebbe seguita da una fase discendente, in cui l'efficacia dei fattori interni diminuirebbe, e la stasi diventerebbe perciò sempre più labile di fronte ad una temperatura favorevole.

L'esistenza di una fase ascendente è a nostro parere chiaramente dimostrata dalla possibilità - che il Cei ha realizzata - di ottenere la chiusura del ciclo spermatogenetico in piena estate (cfr. Cei, 1944⁽⁴⁾, p. 58), cioè quando la temperatura esterna favorirebbe l'attività spermatogenetica. L'esistenza di una fase discendente sarebbe attestata dai risultati della nostra esperienza, nella quale gli esemplari, sottoposti ad una temperatura di tipo estivo durante uno stadio avanzato della stasi, hanno presentato un riattivamento notevole e diffuso in tutto il testicolo della spermatogenesi.

La bontà dell'ipotesi andrebbe controllata con nuove esperienze, e occorrerebbe anche vedere se dopo il breve e intensissimo periodo di fregola non intervenga un'altra fase, quella della « stanchezza ipofisaria », che sembra aver luogo nel *Triturus cristatus carnifex* (Laur.) (Galgano, 1947⁽⁹⁾). Tuttavia i dati già in nostro possesso la rendono, ci sembra, assai verosimile. Essa cerca di lumeggiare alcuni nuovi aspetti della stasi, quali apparirebbero dalle considerazioni intorno ai risultati della nostra esperienza e dal conseguente riesame dei risultati ottenuti dal Cei.

C) *Effetto combinato della serra e dell'ormone follicolostimolante.* - Abbiamo ritenuto inutile provare l'effetto del Gestyl su esemplari tenuti al freddo, perchè già l'A. più anziano (1941⁽¹⁰⁾) aveva dimostrato l'inefficacia del Preloban Bayer in Tritoni crestati tenuti d'inverno alla temperatura naturale: la spermatogenesi non può aver luogo al disotto di una certa temperatura.

Purtroppo il fatto inaspettato della notevole ripresa spermatogenetica anche nei controlli tenuti in serra (cfr. § B) ha deluse in buona parte le nostre aspettative. Ciò dimostra ancora una volta tutto il valore dell'accurata analisi dell'an-

(9) M. GALGANO, « Arch. Zool. Ital. », 32, 33 (1947).

(10) M. GALGANO, « Monit. Zool. Ital. », 52, 223 (1941).

damento dei fenomeni sessuali negli Anfibi di fronte all'azione dei fattori ambientali esterni, e soprattutto della temperatura, al fine d'impostare correttamente qualunque altra ricerca di fisiologia sessuale in questi animali⁽¹¹⁾. Da quanto abbiamo detto al §. precedente, risulta che converrà riprovare su esemplari al principio del periodo di stasi.

Malgrado le riserve avanzate, ci sembra di poter asserire che i risultati ottenuti dopo i primi 20 giorni di serra non siano del tutto trascurabili riguardo a un'azione positiva del Gestyl. Infatti negli esemplari sottoposti alla serra soltanto la spermatogenesi giunge solo ai primi rari gruppi isogeni di spermatociti I in stadio leptotene e presenta una ripresa non uniforme nelle varie ampolle. Invece negli esemplari sottoposti alla serra e all'iniezioni di Gestyl la spermatogenesi giunge fino a numerosi gruppi di spermatociti in stadio leptotene e presenta una ripresa all'incirca omogenea nelle varie ampolle.

Dopo 61 giorni di serra la forte ripresa della spermatogenesi anche negli esemplari sottoposti alla sola serra rende oscura l'eventuale azione positiva del Gestyl, tanto da renderla veramente incerta. Vero è che negli esemplari, i quali hanno avuto anche il Gestyl, lo stadio della spermatogenesi è in complesso un po' più avanzato rispetto a quello degli esemplari che hanno subita la serra soltanto; ma potrebbe trattarsi di variazioni individuali.

CONCLUSIONI. — Lo scopo originale del lavoro era di cercare di chiarire se la stasi spermatogenetica in *Rana temporaria* dipendeva da un'insufficienza ipofisaria, somministrando Gestyl ad esemplari tenuti in serra d'inverno.

Esso non è stato chiaramente raggiunto, perchè ci siamo trovati di fronte ad un fatto imprevisto: la ripresa notevole dell'attività spermatogenetica anche negli esemplari sottoposti alla sola serra.

Le considerazioni fatte in proposito ci hanno portato a concludere che verosimilmente il fenomeno della stasi spermatogenetica nella specie studiata presenta un massimo durante uno stadio precoce del periodo di stasi, con una fase ascendente durante il declino dell'attività spermatogenetica e una fase discendente durante uno stadio avanzato del periodo di stasi. Nella fase ascendente va sempre più prevalendo, e in quella culminante predomina, l'azione dei fattori interni autonomi; nella discendente va sempre più prendendo il sopravvento il fattore esterno temperatura. Durante quest'ultima fase, dunque, il perdurare della stasi, che si osserva in natura, sarebbe dovuto in principal modo al mantenersi di una rigida temperatura.

Le ricerche, che intendevamo compiere, andranno dunque eseguite durante uno stadio precoce del periodo di stasi.

(11) Per notizie estese sul ciclo sessuale degli Anfibi europei vedi: B. LANZA, *Notizie e ricerche sul ciclo sessuale maschile degli Anfibi europei in relazione al loro uso per la ricerca e il dosaggio delle gonadotropine*; « Arch. di Fisiol. », fasc. 1 e 2 (1951).

Fisiologia. — *Azione della florizina sulla deidrogenasi degli acidi grassi superiori a livello della mucosa intestinale e della sierosa peritoneale* (*). Nota di SANDRO PONTREMOLI e TULLIO MONTINI, presentata (**) dal Socio U. LOMBROSO.

La partecipazione di particolari reazioni enzimatiche che a livello della mucosa intestinale intervengano nel favorire l'assorbimento dei lipidi è stato già da qualche Autore prospettato⁽¹⁾.

Una delle teorie che a questo riguardo ha avuto per un certo periodo di tempo maggior credito è quella di Verzar.

Secondo tale Autore l'assorbimento dei lipidi sarebbe condizionato da un processo di fosforilazione degli acidi grassi con successivo inserimento nella molecola fosfolipidica. Sempre secondo tale concezione la florizina, l'acido monoiodoacetico, e la surrenectomia totale determinerebbero un rallentamento nei fenomeni di assorbimento intestinale lipidico attraverso un blocco dei processi di fosforilazione a livello della mucosa intestinale.

Senza affrontare la vasta letteratura su questo problema e gli argomenti a favore o a sfavore di tale concezione, ci limitiamo a riportare i dati relativi all'intervento della florizina sull'assorbimento del grasso.

Nel 1935 il Sarzana⁽²⁾ aveva osservato, nei colombi, durante il trattamento con florizina ad alte dosi, un aumento del contenuto in grasso delle feci che, benchè non molto pronunciato, si manifestava in modo costante. Essendo tale aumento così scarsamente pronunciato, la stearra poteva interpretarsi come dovuta al periodo prolungato di sperimentazione, che poteva permettere un assorbimento avvenuto in più lungo periodo di tempo.

Successivamente Bellini e Filippin⁽³⁾ osservarono che l'assorbimento di trioleina, che nell'Ansa alla Vella di cani normali raggiungeva valori del 50%, durante l'avvelenamento con florizina si riduceva notevolmente (del 40%) fino a valori inferiori al 30%.

Nel nostro laboratorio una serie di ricerche condotte sia su cani portatori di Ansa alla Vella⁽⁴⁾, sia iniettando emulsioni di grasso nel peritoneo di cavia⁽⁵⁾, ha rivelato che al fenomeno dell'assorbimento lipidico si associa costantemente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) U. LOMBROSO e V. MARTINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 12, 581 (1937); F. VERZAR, *Absorption from the Intestine*. Longmans Green, London 1936; W. R. BLOOR, «J. Biol. Chem.», 25, 577 (1916); «Physiol. Rev.», 2, 92 (1922); «Ann. Rev. Biochem.», 1, 267 (1932).

(2) G. SARZANA, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», X, 197 (1935).

(3) S. FILIPPIN e L. BELLINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», XIII, 178 (1938).

(4) L. ARRIGO e T. MONTINI, in corso di stampa su «Atti Riunione S. I. P. S.», 1950.

(5) S. PONTREMOLI e L. ARRIGO, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», XXVI, 253 (1950); L. ARRIGO e S. PONTREMOLI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», XXVI, 255 (1950).

una modificazione del punto di Jodio del grasso recuperato, e che l'aumento dei doppi legami maggiormente si evidenzia dopo incubazione a 37° C. di tale materiale.

Val quanto dire che durante l'assorbimento la mucosa intestinale o la sierosa peritoneale intervengono con la loro attività deidrogenante⁽⁶⁻⁷⁾ sulla catena degli acidi grassi, modificandone la loro costituzione chimica.

Parallelamente è stato osservato che condizioni sperimentali quali la pancreasectomia totale⁽⁸⁾, la surrenectomia⁽⁹⁾ e nel caso specifico l'avvelenamento con florizina⁽¹⁰⁾, condizioni tutte che intervengono nel rallentare o abolire l'assorbimento dei grassi, intervengono pure nell'abolire tale attività deidrogenante nelle stesse condizioni sperimentali.

Nel caso della florizina tale fenomeno era stato osservato nell'assorbimento per via peritoneale⁽¹⁰⁾.

TABELLA I.

Frammenti di peritoneo o intestino, prelevati da ratti o da cavie iniettati con florizina, in emulsione di olio di cocco 10% in H₂O (5:1). Incubazione a 37°C. I valori indicano il punto di Jodio dell'emulsione a vario periodo di tempo.

	Assorbimento %	Peritoneo		Intestino	
		12 h	24 h	12 h	24 h
Ratti iniettati (media 6 animali)	9 %	10	10	16	18
Ratti normali (media 6 animali)	48 %	30	44	38	49
Cavie iniettate (media 6 animali)	11 %	11	11	13	16
Cavie normali (media 6 animali)	54 %	28	40	30	46

Valore del punto di jodio dell'emulsione di olio di cocco: 9 ± 2 .

Scopo delle presenti ricerche era appunto quello di estendere in vitro le osservazioni precedentemente condotte in vivo e questo per meglio indagare l'effetto della florizina sul fenomeno dell'assorbimento lipidico in relazione alla deidrogenasi degli acidi grassi superiori, che, da quanto abbiamo osservato, sembra

(6) S. PONTREMOLI e C. RICCI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», XXVI, 1454 (1950).

(7) H. D. CREMER, «Z. Physiol. Chem.», 263, 240 (1940).

(8) U. LOMBROSO, L. ARRIGO e T. MONTINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», in corso di stampa.

(9) S. PONTREMOLI e T. MONTINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», in corso di stampa; T. MONTINI e S. PONTREMOLI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», in corso di stampa.

(10) U. LOMBROSO e S. POTREMOLI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», XXVI, 1475 (1950).

accompagnare con la sua attività sempre tale fenomeno. Dobbiamo precisare che la quantità di florizina da noi impiegata negli animali, cavia e ratti, è superiore a quella necessaria per determinare la glicosuria in questi animali, e precisamente pari ad una quantità di mg. 100 per 200 gr. di peso corporeo in due iniezioni giornaliere (la sostanza veniva sciolta in Na_2CO_3).

Dopo un paio di giorni gli animali, che del resto non avevano dimostrato particolari sofferenze, riprendevano il loro normale assorbimento, e parallelamente si ripristinavano le modificazioni del punto di Jodio del materiale grasso recuperato.

Le nostre ricerche sono state condotte su cavia e ratti di sesso maschile appartenenti allo stesso ceppo ed alimentati precedentemente con dieta mista equilibrata. La tecnica da noi adottata è stata quella della valutazione del punto di Jodio di emulsioni di olio di cocco poste a contatto con frammenti di intestino e di sierosa peritoneale, dotati appunto della capacità di modificare il numero dei doppi legami dell'emulsione. Il materiale veniva prelevato da animali normali e animali trattati con florizina. Alle prove in vitro eseguite con materiale proveniente da animale normale venivano aggiunti oltre alla florizina alcuni bloccatori a controllo dell'attività enzimatica.

TABELLA II.

Frammenti di peritoneo di bovini, cavia o ratti, o di intestino di cavia o ratti, in emulsione di olio di cocco al 10% in H_2O (5:1). Incubazione a 37°C . I valori indicano il punto di jodio della emulsione a vario periodo di tempo.

Composizione delle prove	Frammenti di intestino			Frammenti di peritoneo		
	Inizio	12 h	24 h	Inizio	12 h	24 h
Emulsione di olio di cocco	9	48	56	9	35	56
id. id. + KCN 1%	9	10	10	9	11	12
id. id. + NaF 2‰	9	10	11	9	11	11,8
id. id. + florizina 0,5‰	9	12	12,7	9	9,7	10,5
id. id. per 3' a temp. di ebollizione	9	9	9,5	9	10	10

Dai dati riportati nelle tabelle emerge:

1° una ulteriore conferma alla presenza di una deidrogenasi degli acidi grassi nella sierosa peritoneale da uno di noi precedentemente dimostrata⁽⁶⁾;

2° che la somministrazione di florizina in animali da laboratorio annulla questa attività enzimatica, e che questo stesso fenomeno si osserva quando la florizina viene aggiunta alle prove in vitro eseguite con materiale proveniente da animale normale.

Negli animali trattati abbiamo seguito l'assorbimento per via peritoneale per poter meglio controllare il parallelismo dei due fenomeni.

Questi risultati ci permettono di formulare un quesito, e cioè quello relativo ai meccanismi che condizionano nell'animale normale l'assorbimento dei grassi per via intestinale o per via peritoneale.

Infatti la associazione di questa attività deidrogenante al processo di assorbimento dei grassi da parte dell'intestino e del peritoneo, e l'assenza di tale attività quando per via ormonica o per altra via si abolisce l'assorbimento, dati molto suggestivi, che conducono alla persuasione di una interdipendenza tra questi due fenomeni.

Vorremmo a questo punto ricordare che il Lombroso per il primo nel 1938 aveva osservato la presenza nel succo enterico di una attività deidrogenante che, presente nell'animale normale, mancava quando il succo veniva prelevato da animale spancrato⁽¹⁾: egli ne aveva tratto il sospetto appunto di tale interdipendenza. Si prospettavano con tali risultati nuovi indirizzi sul problema dell'assorbimento dei grassi, a cui queste ed altre osservazioni portano nuovo contributo.

Ritornando al presente lavoro, resterebbe da risolvere il quesito sull'eventuale intervento della florizina quale agente bloccatore della deidrogenasi. In base a ricerche precedenti, condotte con esperienze in vitro, Autori americani e tedeschi hanno negato l'intervento sia della florizina come del fluoruro di Na quali sistemi bloccatori specifici della deidrogenasi presente nel tessuto epatico ed in quello sottocutaneo⁽¹¹⁾. Però recentemente alcuni Autori francesi ed altri, a successiva conferma, avrebbero dimostrato che per ottenere l'inserimento del doppio legame nella catena dell'acido grasso sarebbe necessario un processo di fosforilazione specifico anche come requisito coenzimatico⁽¹²⁾. Secondo questi Autori la florizina ed il fluoruro di Na si dimostrerebbero bloccatori specifici della deidrogenasi, in via secondaria, in quanto inibitori della reazione di fosforilazione.

L'argomento è tuttora oggetto di studio. Noi prospettiamo solo una certa analogia tra i nostri risultati e quelli degli Autori francesi. Vogliamo pertanto finora rimanere ai semplici dati di fatto da noi messi in luce, che cioè il tessuto intestinale e la sierosa peritoneale di animale normale sono capaci di deidrogenare un acido grasso saturo; che la somministrazione di florizina in vivo o la sua addizione nei preparati in vitro annulla tale fenomeno, e che l'insieme di questa reazione si associa a quello dell'assorbimento, nel senso che, quando questo si manifesta, tale attività agisce sul materiale iniettato aumentando il numero dei doppi legami, e che invece tale aumento viene a mancare quando anche il materiale lipidico non viene assorbito.

Si prospetta quindi l'ipotesi se il cosiddetto «fattore limitante» che ha adombrato Verzar nelle sue ricerche a che l'Autore identificava con i processi di fosforilazione non si debba invece attribuire ad interventi di questa attività deidrogenante.

(11) B. SHAPIRO e E. WERTHEIMER, «*Bioch. J.*», 37, 102 (1942); K. LANG, «*Z. Physiol. Chem.*», 261, 240 (1940); K. LANG e H. MAYER, «*Z. Physiol. Chem.*», 261, 249 (1940); E. ANNAU, A. EPERJESSY e O. FELSZEGHY, «*Z. Physiol. Chem.*», 277, 58 (1942).

(12) E. LE BRÉTON et J. CHAMPOUGNY, «*C. R. S. B.*», 141, 45 (1947); A. JACOB e M. PASCAUD, «*C. R. S. B.*», 143, 1476 (1949).

Fisiologia. — *Sul fattore nutritivo specifico per lo sviluppo sessuale del pollo* (*). Nota di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

È noto come il latte, pur rappresentando una importantissima sorgente di principi nutritivi necessari per l'accrescimento e lo sviluppo, sia tuttavia povero di alcuni fattori essenziali quali ad esempio il ferro e la Vitamina E.

Nel 1933 Martino ⁽¹⁾ dimostrò che polli in accrescimento alimentati esclusivamente con latte per la durata di 79 giorni presentano un arresto dello sviluppo sessuale. Il fenomeno appariva interessante anche perchè il Mazzei ⁽²⁾ aveva prece-



Fig. 1. — Pollo maschio alimentato con sola polvere di latte intero. Fotografia eseguita al 90° giorno di esperimento.

dentemente dimostrato che il gallo adulto, sottoposto ad esclusiva dieta lattea per un periodo di 92 giorni, conserva normali tanto il peso che la capacità riproduttiva.

Una esauriente analisi del fenomeno osservato da Martino è dovuta soprattutto alle ricerche di A. Alibrandi ^(3,4), che, facendo uso di opportune tecniche, dimostrò anzitutto il suddetto fenomeno non essere dovuto alla carenza nel latte di elementi minerali e di vitamina E. L'aggiunta di elementi minerali e di varie vitamine, compresa la E, alla polvere di latte, all'incirca nella proporzione in cui queste sostanze sono contenute nel

grano di frumento, non si dimostra capace di abolire questa caratteristica azione dell'alimentazione lattea esclusiva nei polli in accrescimento.

Colle suaccennate ricerche A. Alibrandi ha pure dimostrato che questa tipica castrazione alimentare si verifica tanto nel maschio che nella femmina del « gallus domesticus » ed è accompagnata da un aumento in peso ⁽⁵⁾ anche superiore a quello dei controlli alimentati con solo grano. È pertanto da escludere che alla cattiva utilizzazione di un alimento non tradizionale per la specie debba attribuirsi l'effetto suddetto.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) G. MARTINO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 9, 217 (1934).

(2) MAZZEI, « Rev. Soc. Med. Argentina », 1931.

(3) A. ALIBRANDI, « Rend. R. Acc. d'Italia », clas. Sc. fis. mat. e nat., 1, 67 (1939).

(4) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 44, 163 (1945).

(5) Questo aumento di peso è accompagnato da uno sviluppo scheletrico notevolmente maggiore di quello dei controlli.

Appariva necessario ricercare la natura di questo sconosciuto fattore alimentare che, almeno nel pollo, si dimostra indispensabile per lo sviluppo sessuale. Si cominciò pertanto col procedere alla ricerca di una ricca fonte naturale di esso.

Partendo dalla considerazione che questo fattore è certamente contenuto nel grano di frumento e che assai probabilmente esso dovesse trovarsi nel germe, sede come è noto delle sostanze fisiologicamente più nobili dell'intero chicco, alimentammo polli in accrescimento, a partire dal ventesimo giorno di età, per un periodo di cento giorni, mediante polvere di latte intero (preparato a bassa



Fig. 2. — Pollo (proveniente dal medesimo ceppo e dalla medesima covata del pollo riprodotto nella fig. 1) alimentato con polvere di latte intero cui veniva aggiunto il 9% in peso di farina di germe di grano. Fotografia eseguita al 90° giorno di esperimento.

temperatura col sistema Krause) cui veniva aggiunta in proporzione del 9% farina di germe di grano preparata anch'essa a bassa temperatura e privata quasi completamente, mediante solventi, della frazione lipidica ⁽⁶⁾.

Le figure 1 e 2 dimostrano chiaramente la differenza tra lo sviluppo sessuale raggiunto al novantesimo giorno di esperimento, dai polli alimentati con polvere di latte integrata da farina di germe e lo sviluppo sessuale dei polli controllo, della medesima razza e provenienti dalla medesima covata, alimentati con sola polvere di latte ⁽⁷⁾. Che l'effetto della farina di germe non sia dovuto alla vita-

(6) Abbiamo usato il preparato messo in commercio dalla ditta IREA sotto il nome di Blastina B. La composizione di questo preparato è all'incirca la seguente: protidi 40%, glicidi 54%, sostanze minerali 4,4%, lipidi 0,14%.

(7) Le differenze di peso fra i due gruppi di animali furono invece poco rilevanti e in ogni caso a vantaggio degli animali alimentati con solo latte o con latte più vitamina E.

mina E risulta non solamente dal fatto che questo principio era stato quasi completamente estratto durante il processo di preparazione, ma anche dal fatto che la somministrazione di dl- α -tocoferolo, a dosi molto più elevate che nelle precedenti esperienze dal genere (4 mg. *pro die* per Kg. di peso) non valse a preservare polli alimentati con solo latte dall'arresto dello sviluppo sessuale così come dimostrò anche l'esame istologico dei testicoli.

Ulteriori ricerche sono in corso in questo Istituto intese a chiarire la natura del fattore nutritivo responsabile di una così favorevole azione sullo sviluppo sessuale ed il suo meccanismo di azione.

Citologia. — *Osservazioni sulle variazioni volumetriche nucleari nella mitosi e nella meiosi*^(*). Nota^(**) di GIUSEPPE COLOMBO, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

L'accrescimento nucleare profasico è un fatto noto (Flemming⁽¹⁾) studiato quantitativamente (Popoff⁽²⁾) da gran tempo; l'accrescimento nucleare durante l'auxocitosi è pure un fatto notissimo, ma osservazioni accurate e quantitative sono relativamente poche (Levi e Terni⁽³⁾, Katsuki⁽⁴⁾); generalmente i lavori cariometrici anche sulle cellule germinali sono legati all'ipotesi dell'accrescimento della cromatina per divisione interna (Spühler⁽⁵⁾, Schreiber G.⁽⁶⁾).

In questa Nota vengono riportate osservazioni cariometriche su cellule germinali maschili di *Anacridium aegyptium*, (Acrididae, Orthoptera) in vari stadi e fasi del ciclo di maturazione.

Questo materiale si presta molto bene per tal genere di ricerche perchè le cellule sono relativamente grandi: in un solo preparato di follicolo testicolare adulto si hanno tutti gli stadi di maturazione, ed inoltre sono facilmente riconoscibili i vari tempi della profase della prima divisione meiotica.

Le misure sono state prese su preparati per sezione, di follicoli testicolari di un solo individuo adulto di *Anacridium aegyptium* allevato in laboratorio. I follicoli sono stati fissati in Carnoy, disidratati in alcool, inclusi in paraffina, sezionati a 10 micron, colorati colla reazione di Feulgen e montati in balsamo. Le misure sono state limitate a soli quattro vetrini preparati contemporaneamente

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della Università di Padova diretto dal prof. U. D'Ancona.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1951.

(1) W. FLEMMING, *Zellsubstanz, Kern und Zellteilung*, Leipzig, 1882.

(2) M. POPOFF, *Experimentelle Zellstudien*. « Archiv für Zellforschung », vol. I, 245-380 (1908).

(3) G. LEVI e T. TERNI, *Studi sulla grandezza delle cellule*. — II. *Le variazioni dell'indice plasmatico durante l'intercinesi*. « Arch. It. d'Anat. e d'Embriologia », vol. 10, 545-554 (1911).

(4) K. KATSUKI, *Materialien zur Kenntnis der quantitativen Wandlungen des Chromatins in den Geschlechtzellen von Ascaris*. « Arch. f. Zellforschung », vol. 13, 92-117 (1915).

(5) O. SPÜHLER, *Genitalzyklus und Spermiogenese des Mausmaki « Microcebus murinus Miller »*. « Zeit. f. Zellforschung u. Mikr. Anat. », vol. 23, 442-463 (1935).

(6) G. SCHREIBER, *O crescimento interfásico do núcleo - Pasquisa cariometricas sobre a espermatogenese - dos Ofídios*. « Memórias do Instituto Butantan », vol. 20, 113-180 (1947).

in modo da eliminare il più possibile le variazioni dovute alla tecnica usata; naturalmente non si possono evitare nè le differenze dovute alla variabilità individuale nè quelle dovute al probabile diverso grado di contrazione delle cellule in differente stato funzionale di fronte allo stesso fissativo.

TABELLA I.

STADI	<i>n</i>	\bar{x}	<i>s</i>	$s_{\bar{x}}$	$\pm 0,05 s_{\bar{x}}$	R_1	R_2
<i>Spermatogoni I</i>							
Interfasici	30	550	37,15	6,78	14,00	—	3,41
<i>Spermatogoni II</i>							
Interfasici	128	347	31,96	2,82	5,58	1,00	2,15
Profasici	21	441	14,59	3,18	6,60	1,27	2,73
Telofasici	22	261	4,98	1,06	2,20	0,75	1,62
Ultima Telofase	26	312	7,87	1,54	3,17	0,89	1,93
<i>Spermatociti I</i>							
Preleptotene	64	376	123	15,37	30,75	1,00	2,33
Leptotene	71	492	115	13,64	27,14	1,30	3,05
Leptozigotene	275	647	133	8,02	15,81	1,72	4,01
Zigotene	116	962	232	21,54	42,66	2,55	6,00
Pachitene	249	1204	228	14,44	28,44	3,20	7,70
Diplotene	109	1042	190	18,20	36,10	2,77	6,47
<i>Spermatociti II</i>							
Interfasici	28	298	83	15,66	32,10	1,00	1,85
Profasici	17	335	133	32,01	67,54	1,13	2,08
Telofasici	27	114	25	4,81	9,88	0,38	0,70
<i>Spermatidi</i>	16	161	42	10,50	22,20	0,53	1,00

n = numero di cellule misurate.

\bar{x} = media dei volumi in 10^3 micron cubici.

s = deviazione standard.

$s_{\bar{x}}$ = errore standard.

$\pm 0,05 s_{\bar{x}}$ = semintervallo di fiducia delle medie (\pm).

R_1 = rapporti tra i volumi delle diverse fasi entro i singoli cicli cariocinetici.

R_2 = rapporti tra i volumi dei diversi stadi della maturazione germinale sul volume dello spermatidio.

Sono stati misurati i due diametri ortogonali delle sezioni di proiezione dei nuclei, disegnati coll'aiuto della camera lucida, ad ingrandimenti di 1125 diametri per gli spermatogoni e gli spermatociti I, e di 2125 per gli spermatociti II e gli spermatidi. Le misure sulle proiezioni sono state fatte con l'approssimazione di

mezzo mm., ed i valori sono stati riportati al valore reale e ridotti in micron. Sono stati disegnati solo quei nuclei che focchettando risultavano essere compresi quasi completamente nella sezione; pressochè tutti avevano la forma di ellissi abbastanza regolari. È stato trovato quindi il volume applicando la formula dell'elissoide regolare, $V = ab(a + b/2) \cdot (\pi/6)$ dove a e b sono i due diametri misurati.

I valori trovati sono stati raggruppati secondo gli stadi di differenziazione e secondo le fasi mitotiche e meiotiche. È stato trovato il valore medio per ogni gruppo, la deviazione standard, l'errore standard, e gli intervalli di fiducia per ciascuna media, calcolati questi dal prodotto dell'errore standard per il valore t_0 (indicato nelle tabelle di Fischer) corrispondente a $P = 0.05$ per $n - 1$ gradi di libertà (Snedecor⁽⁷⁾).

È stata fatta una completa elaborazione statistica perchè specialmente per le fasi della auxocitosi le medie non rappresentano i valori di un gruppo di cellule omogenee, ma gradi di un processo continuo; il raggruppamento delle misure rappresenta quindi una suddivisione artificiale.

I risultati delle misure sono riuniti nella tabella I.

I dati sono significativi per sè stessi, esclusi quelli riguardanti le differenze tra interfase e profase nella seconda divisione meiotica; cellule a questo stadio erano piuttosto rare e non è facile distinguere (nei preparati per sezione) i nuclei interfasici da quelli profasici perchè anche i primi presentano i cromosomi visibili e pressochè simili a quelli profasici.

Tenuti presenti i limiti di validità dell'indagine cariometrica noi possiamo inquadrare i dati su esposti sulle seguenti ipotesi (di Boveri, di Hertwig, di Levi), cioè che il volume nucleare è:

a) in rapporto diretto con la quantità di cromatina che può essere espressa dal numero e volume dei cromosomi. (È sempre necessario però che questo dato sia controllato direttamente prima di ammettere tale relazione);

b) in rapporto alle caratteristiche specifiche, embriogenetiche ed istologiche della cellula;

c) in rapporto allo stato funzionale della cellula considerata; cioè allo stato metabolico, nel periodo intercinetico, ed alla fase cariocinetica.

Dalla tabella riportata risulta evidente che tra i volumi degli spermatociti II e quello degli spermatidi esiste il rapporto 2/1 corrispondente al rapporto cromosomico $2n/n$; tale rapporto esiste anche tra spermatogoni II e spermatidi e tra spermatociti I, prima della profase meiotica, e spermatidi (cfr. colonna 7 R_2).

Questi dati concordano perfettamente con quelli di Jacobj⁽⁸⁾, Hertwig G.⁽⁹⁾, Freerksen⁽¹⁰⁾, Sphüler⁽⁵⁾, Schreiber G.⁽⁶⁾, i quali però interpretano il complesso

(7) G. W. SNEDECOR, *Statistical Methods*. «The Iowa College», IV Ed. (1948).

(8) W. JACOB, *Ueber das rhythmische Wachstum der Zellen durch Verdopplung ihre Volumens*, «Arch. f. Entw.-mech.», vol. 106, 124 (1925).

(9) G. HERTWIG, *Die dritte Reifeteilung in der Spermiogenese des Menschen und der Katze und ihre experimentelle Auslösung durch Prolan im jugendlichen Rattenboden*. «Zeitsch. f. mikr. Anat. Forschung», vol. 33, 373-400 (1933).

(10) E. FREERKSEN, *Ein neuer Beweis für das rhythmische Wachstum der Kerne durch vergleichende volumetrische Untersuchungen an den Zellkernen vom Meerschweinchen und Kaninchen*. «Zeitsch. f. Zellf. u. mikr. Anat.», vol. 18, 362-399 (1933).

andamento dell'accrescimento volumetrico in base a relazioni fondate, a parer mio, più su ipotesi che su fatti accertati.

Nelle cellule germinali le variazioni volumetriche sono certamente dovute a variazioni della ploidia che si possono controllare direttamente; altre variazioni per esempio fra spermatogoni I e II forse possono essere legate a modificazioni quantitative della cromatina espressa dal volume dei cromosomi come è stato osservato nel corso della segmentazione (Erdman⁽¹¹⁾, Colombo⁽¹²⁾).

Nella auxocitosi però la questione è molto più complessa.

I dati riportati in queste ricerche concordano con quelli di Levi e Terni⁽³⁾ nella spermatogenesi degli Anfibi, di Popoff⁽²⁾ sulla spermatogenesi di *Ascaris mystax*, e con quelli di Katsuki⁽⁴⁾. Popoff spiega il fenomeno con le variazioni delle caratteristiche fisiche e chimiche (osmotiche) del nucleo; secondo Levi e Terni invece durante l'auxocitosi vi sarebbe una concentrazione di basicromatina nel nucleo, con scambi nucleo-plasmatici caratteristici di questo processo.

Si può ammettere che nella profase meiotica si abbia un raddoppiamento delle unità cromonemiche da $2n$ a $4n$, ma non credo che ciò avvenga quando il volume nucleare raggiunge il valore quadruplo di quello dello spermatidio; la quantità di acido desossiribonucleico (DNA) è nello spermatocita I il quadruplo che nello spermatidio (Lison e Pasteels⁽¹³⁾); l'evoluzione del DNA è però molto complessa (Pasteels e Lison⁽¹⁴⁾). Oltre che queste variazioni quantitative della cromatina io credo che anche per l'auxocitosi si tratti in parte degli stessi fenomeni che provocano l'aumento volumetrico profasico che è considerato come espressione delle modificazioni dei colloidi nucleari, che caratterizzano la comparsa della visibilità dei cromosomi nella cariocinesi (Della Valle⁽¹⁵⁾); tenendo anche presente che nella profase mitotica non si avrebbe un aumento della cromatina (come DNA), secondo le ricerche di Lison e Pasteels le quali con le limitazioni della tecnica usata sono a parer mio senz'altro probative.

I dati sulle variazioni dello stato fisico e chimico del nucleo profasico (e meiotico) benchè relativamente numerosi sono poco conclusivi (cfr. Milovidov⁽¹⁶⁾), perciò induzioni solo in base all'aumento di volume sarebbero molto ipotetiche; senza entrare in discussioni che si baserebbero su dati incompleti e frammentari, credo si possa, come ipotesi di lavoro, ammettere che le variazioni volumetriche qui riportate siano dovute ad un rigonfiamento colloidale del carioplasma legato principalmente a variazioni dell'equilibrio ionico, che accompagna la visualizzazione dei cromosomi e l'orientamento delle nucleoproteine nei cromosomi stessi.

(11) R. ERDMAN, *Experimentelle Untersuchung der Massenverhältnisse von Plasma, Kern und Chromosomen in dem sichentwickelnden Seeigeli*. « Arch. f. Entw.-mech. », vol. 2, 76-136 (1908).

(12) G. COLOMBO, *Le variazioni della struttura del nucleo nello sviluppo embrionale degli Anfibi*. « Atti Cong. Soc. It. d'Anat. » (in corso di stampa) (1950).

(13) L. LISSON e J. PASTEELS, *Sur l'évolution quantitative de l'acide thymonucleique pendant la spermatogenèse chez Talpa*. « C. R. Soc. Biol. », vol. 143, 1607-1608 (1949).

(14) J. PASTEELS e L. LISSON, *Recherche histophotométriques sur la teneur en acide desoxyribonucleiques au cours des mitoses somatiques*. « Arch. de Biol. », vol. 61, 445-474 (1950).

(15) T. DELLA VALLE, *La morfologia della cromatina dal punto di vista fisico*. « Arch. Zool. It. », vol. 6, 37-322 (1911).

(16) P. F. MILOVIDOV, *Physik und Chemie des Zellkernes*. « Protoplasma Monographie ». vol. 20 (1949).

Biologia. (Medicina). — *Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nella febbre* (*). Nota (**) di PAOLO BUFFA, presentata dal Socio G. VERNONI.

Nel corso dei numerosi studi sugli effetti fisiologici e patologici del caldo e del freddo compiuti in questi ultimi anni (Ladell⁽¹⁾, Lee⁽²⁾, List⁽³⁾, Bazett⁽⁴⁾, Robison⁽⁵⁾, Hardy⁽⁶⁾, Grant⁽⁷⁾), è stato accertato che, in condizioni di riposo, l'uomo comincia a sudare quando la pelle ha una temperatura superiore ai 31° e che la sudorazione aumenta moltissimo per ogni piccolo incremento della temperatura cutanea oltre i 34,5°. Tuttavia, se la temperatura interna è inferiore al normale la sudorazione non avviene, anche se si riscalda la pelle ad una temperatura notevolmente superiore alla soglia. D'altra parte basta un aumento di 0,2° della temperatura rettale perchè si abbia sudorazione profusa.

Ora è ben noto che in certe febbri, come per esempio, la malarica e la tifoidea, che si possono considerare come tipici esempi di ipertermia febbrile, la temperatura rettale aumenta di 3 o 4 gradi centigradi e quella cutanea supera di molto il valore soglia, pure la sudorazione manca totalmente e la pelle rimane asciutissima, malgrado vi sia vasodilatazione. Soltanto quando la temperatura cade avviene la sudorazione⁽⁸⁾ ed i meccanismi della termoregolazione riprendono a funzionare.

Vernoni⁽⁹⁾, ha emesso l'ipotesi che questo fenomeno dell'inibizione della sudorazione nella febbre dipenda « da influenze umorali attraverso variazioni della pressione osmotica del sangue indotte dalla iperattività ossidativa muscolare », richiamandosi a certe esperienze di Montuori⁽¹⁰⁾, il quale ha dimostrato che la secrezione del sudore nel gatto riscaldato coincide con un abbassamento della pressione osmotica del sangue e che si può inibire la sudorazione aumentando la concentrazione salina del sangue o provocarla diluendo i cristalloidi ematici.

Allo scopo di saggiare l'ipotesi su esposta che investe uno dei più importanti problemi della patogenesi dell'ipertermia febbrile, è stata misurata la presen-

(*) Dal Centro di studio per la fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1951.

(1) W. S. S. LADELL, « Brit. M. Bull. », 3, 175 (1945).

(2) D. H. K. LEE, « Ann. Rev. Physiol. », 10, 365 (1948).

(3) C. F. LIST, « Ann. Rev. Physiol. », 10, 387 (1948).

(4) H. C. BAZETT in NEWBURG, *Physiology of heat regulation*, p. 123 (1949).

(5) SID ROBISON in NEWBURG, *Physiology of heat regulation*, p. 208 (1949).

(6) J. D. HARDY, « Ann. Rev. Physiol. », 12, 119 (1950).

(7) R. GRANT, « Ann. Rev. Physiol. », 13, 75 (1951).

(8) Naturalmente non è detto che la sudorazione avvenga perchè cade la temperatura, se mai è più probabile il contrario.

(9) G. VERNONI, « Rec. Progr. Med. », 5, 289 (1948).

(10) A. MONTUORI, Arch. Fisiol., 9, 439 (1911).

sione osmotica del sangue umano nella febbre durante l'incremento termico, corrispondente all'inibizione della secrezione sudorale, e a sudorazione in atto nella defervescenza. I risultati ottenuti indicano che anche nella febbre la sudorazione si accompagna di norma ad un abbassamento della pressione osmotica del sangue, tuttavia non è sicuro che i due fenomeni, pur essendo collegati, siano interdipendenti.

METODI E TECNICA. — Furono usati pazienti sottoposti a malarioterapia per varie forme di sifilide nervosa. La malaria veniva provocata per inoculazione di sangue infetto da *Pl. vivax* e quando gli attacchi febbrili avevano assunto l'andamento tipico si iniziavano le prove. Al termine del periodo del brivido si prelevava un primo campione (a) di circa 15 ml di sangue dalle vene dell'avambraccio; un secondo campione (b) veniva preso durante la defervescenza, dopo un tempo variabile dall'inizio della sudorazione. Il sangue veniva raccolto in siringa di vetro unta con olio di vaselina e trasferito in un tubo da centrifuga che veniva immediatamente chiuso con un tappo di gomma. Dopo una permanenza di qualche ora a temperatura ambiente i tubi, sempre tappati, erano centrifugati per 15-20 min. a circa 3000 giri al min. e quindi raffreddati a 0°; essi venivano quindi aperti ed il siero rapidamente trasferito nel tubo da determinazione che si conservava tappato e a 0°. Non fu presa alcuna particolare precauzione per evitare le perdite di anidride carbonica trattandosi di determinazioni di valori relativi; però si ebbe cura di manipolare tutti i campioni allo stesso modo così da distribuire uniformemente tra essi le eventuali perdite. La determinazione del punto crioscopico veniva fatta sempre il giorno stesso del prelevamento usando un termometro di Beckmann graduato a 0,01° secondo la tecnica corrente. Lo zero veniva sempre determinato prima di ogni prova. Poiché le quantità disponibili di siero erano scarse il recipiente per la soluzione fu sostituito con una provetta di 18 mm di diametro che consentiva misurazioni accurate impiegando 6 ml di liquido. L'agitazione sia del liquido sia della miscela frigorifera veniva fatta a mano. La soluzione non veniva inseminata con ghiaccio; il superraffreddamento del siero era dell'ordine di 0,4-0,8°. La temperatura del bagno ⁽¹¹⁾ era di norma tra -2,5° e -4,5°. I valori delle temperature non sono stati corretti poiché si trattava di misurazioni comparative e la temperatura dell'ambiente durante ogni prova era abbastanza costante. Su ciascun campione furono fatte almeno due determinazioni; la differenza media ha le due determinazioni in 34 prove fu <0,005°. Le temperature sono espresse in °C.

RISULTATI. — Nella tabella I sono riportati i risultati ottenuti da dieci determinazioni su sieri provenienti da 6 pazienti, una donna (caso I) e cinque uomini, non scelti, di età variabile dai 29 ai 56 anni ed in condizioni fisiche molto diverse.

Da questi risultati appare che la sudorazione nella febbre si accompagna ad una diminuzione della pressione osmotica del sangue; questa diminuzione è però in genere piuttosto piccola e pertanto si pone la questione se essa sia significativa. Il calcolo della probabilità ⁽¹²⁾, desunta dal *t* di Fisher ⁽¹³⁾, che le differenze osservate quando vi fu sudorazione siano casuali, dà un valore dell'ordine di 0,01 e ciò indica che è estremamente improbabile che esse non siano significative.

(11) Con 700 ml di acqua a 0°, 300 g di ghiaccio a circa -0,5° spezzettato e 100 g di sale da cucina grosso, si otteneva una miscela che, nel recipiente cilindrico di vetro da 1200 ml, ricoperto con una fodera di panno spesso, rimaneva tra -4° e -2° per due buone ore, con una temperatura ambiente di 18-20°.

(12) G. BARBENSI, *La statistica in clinica*, p. 184 (1947).

(13) R. A. FISHER e F. YATES, *Statistical tables*, III ed., p. 32 (1948).

Inoltre le differenze ottenute sono maggiori dell'errore medio del metodo; di fatto non vi fu mai sovrapposizione tra i valori di $\Delta t(a)$ e $\Delta t(b)$, ad eccezione della determinazione 8 in cui mancò la sudorazione e i due punti crioscopici quasi coincisero. Infine sono a favore della validità delle differenze osservate i seguenti fatti: nei due casi in cui la sudorazione mancò, nella defervescenza la pressione osmotica del siero risultò aumentata, invece che diminuita; nel caso I, in cui una volta la sudorazione mancò ed un'altra avvenne, il punto crioscopico del siero rispettivamente risultò aumentato e diminuito; in un caso (determinazione 7) in cui la sudorazione fu molto abbondante, la diminuzione della pressione osmotica del siero fu molto più marcata.

TABELLA I.

Caso	N. deter.	$\Delta t(a)$	$\Delta t(b)$	Sudorazione	$\Delta t(a) - \Delta t(b)$
I	1	0,569	0,585	—	+ 0,016
»	2	0,566	0,551	+	— 0,015
»	3	0,573	0,556	+	— 0,017
II	4	0,583	0,567	++	— 0,016
»	5	0,580	0,563	++	— 0,017
III	6	0,567	0,551	+++	— 0,016
»	7	0,569	0,537	++++	— 0,032
IV	8	0,578	0,586	—	+ 0,008
V	9	0,543	0,528	+++	— 0,015
VI	10	0,561	0,540	+++	— 0,021

Le prove sul medesimo caso furono compiute a distanza di giorni. $\Delta t(a)$: campione prelevato al termine del periodo iniziale, appena terminato il brivido. $\Delta t(b)$: campione prelevato durante la defervescenza dopo un tempo variabile dall'inizio della sudorazione. I valori riportati sono la media di due o tre determinazioni. Sudorazione: — mancante, + scarsa, ++ discreta, +++ abbondante, ++++ molto abbondante.

I fatti esposti porterebbero a concludere che nella febbre la sudorazione si accompagna ad una diminuzione della pressione osmotica del sangue, tuttavia i risultati di una prova casuale compiuta sul caso VI durante un attacco malarico anomalo, indicano che si possono verificare eccezioni per lo meno apparenti. In tale prova si fecero tre determinazioni, come è indicato nella figura 1, dalle quali risulta che vi fu un abbassamento della pressione osmotica del sangue, ma non sudorazione, in rapporto ad una diminuzione temporanea della temperatura verificatasi nel corso spontaneo dell'attacco, mentre in coincidenza della sudorazione durante la defervescenza la pressione osmotica del sangue tornò al valore

iniziale. Ripetendo la prova sul medesimo individuo a quattro giorni di distanza si ebbe il risultato consueto (vedi tabella I, determinazione 10).

CONCLUSIONI. — Le scarsissime determinazioni della pressione osmotica del sangue in condizioni febbrili esistenti in letteratura (Loeb *et al.*⁽¹⁴⁾, Gram⁽¹⁵⁾, Fremont-Smith *et al.*⁽¹⁶⁾) non sono accompagnate da alcuna informazione nè sulla

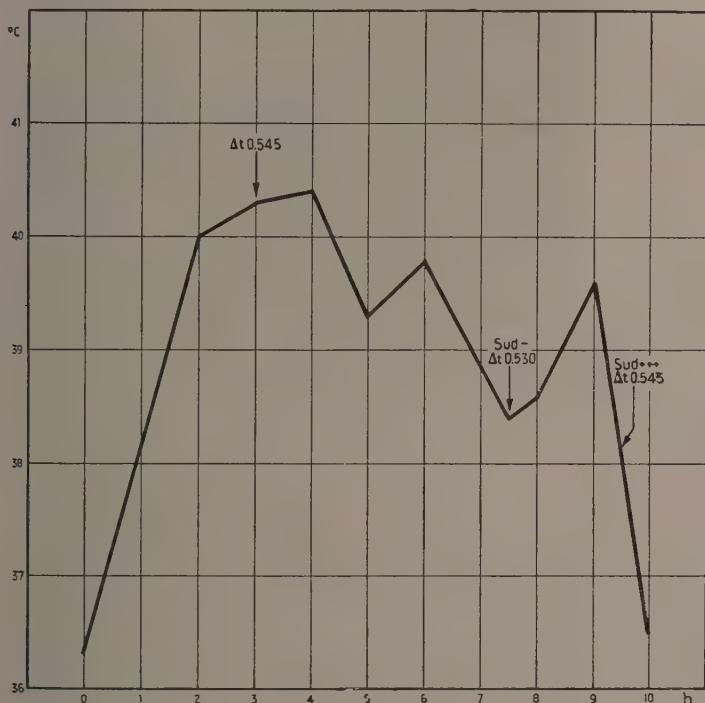


Fig. 1.

temperatura nè sulla sudorazione e pertanto i risultati, pure essendo in taluni casi probabilmente significativi, non possono essere presi in considerazione.

Come si è visto, delle undici prove eseguite dieci hanno dato un risultato univoco e significativo: la secrezione del sudore, nella fase critica dell'accesso febbrile malarico da *Pl. vivax*, coincide con un abbassamento della pressione osmotica del sangue; una prova invece ha dato risultati discordi: abbassamento della pressione osmotica del sangue senza sudorazione in una remissione febbrile e subito dopo sudorazione senza abbassamento della pressione osmotica del sangue nella defervescenza.

(14) R. F. LOEB *et al.*, « J. Gen. Physiol. », 4, 591 (1921-22).

(15) H. C. GRAM, « J. biol. Chem. », 56, 593 (1923).

(16) F. FREMONT-SMITH *et al.*, « Brain », 54, 303 (1931).

Il fatto che in otto determinazioni la sudorazione abbia coinciso con una diminuzione della pressione osmotica del sangue, in due prove alla mancanza di sudorazione abbia invece corrisposto un aumento, e che nel medesimo paziente la pressione osmotica del sangue sia risultata aumentata una volta che non ha sudato e diminuita quando ha avuto sudorazione (tabella I, caso I), sono tutti elementi a favore della citata ipotesi di Vernoni. Tuttavia il risultato discordante ottenuto in un caso lascia sussistere il dubbio che sia sempre indispensabile una diminuzione della pressione osmotica del sangue perchè avvenga la sudorazione nella febbre.

Circa questo risultato anomalo avrebbe scarso significato fare delle supposizioni, tanto più che l'ipertermia è solo uno degli elementi della reazione febbrile che segue questa con una certa inerzia e che può anche mancare del tutto (Vernoni⁽⁸⁾), come pure possono verificarsi casi di attacchi febbrili, per esempio malarici, con ipertermie altissime senza sudorazione affatto. Inoltre la sudorazione, almeno quella da stimolo termico, è preceduta da un periodo anidrotico di latenza che può variare dai 5 ai 40 minuti (Adolph⁽¹⁷⁾, Robison⁽¹⁵⁾). Infine non bisogna dimenticare che si può avere sudorazione senza abbassamento della pressione osmotica del sangue, per iniezione di pilocarpina (Montuori⁽¹⁰⁾, esperienze sul gatto) e nel coma insulinico (Buffa, 1951, esperimenti non pubblicati). D'altra parte il coma insulinico, che è stato chiamato «coma umido» per l'abbondanza della sudorazione, decorre in certi casi senza la minima secrezione di sudore.

I fatti su esposti indicano chiaramente che le relazioni tra la secrezione sudorale e i diversi fattori che su essa influiscono non sono semplici e pertanto le più diverse eccezioni o anomalie di comportamento sono da prevedersi; tuttavia essi offrono delle spiegazioni per i risultati anormali descritti. Per esempio la mancata sudorazione in coincidenza di un abbassamento della pressione osmotica del sangue osservata durante la temporanea remissione dell'ipertermia, potrebbe essere spiegata dalla ripresa della reazione febbrile durante l'eventuale periodo di latenza della sudorazione e la secrezione sudorale successiva, nella defervescenza, con pressione osmotica del sangue rialzata, potrebbe anche essere spiegata ammettendo che fosse passiva, cioè dovuta all'abbassamento della pressione osmotica ematica avvenuto precedentemente e già compensato.

Per chiarire definitivamente il significato dei rapporti tra febbre, sudorazione e pressione osmotica del sangue sono necessarie ulteriori e più estese prove, intanto i risultati già ottenuti rappresentano un primo contributo alla soluzione del problema, oltre a indicare l'importanza delle relazioni tra concentrazione degli elettroliti e delle piccole molecole nel sangue e la secrezione del sudore.

Ringrazio vivamente il prof. G. Raffaele per il gentile consenso di usare i pazienti dell'Istituto di Malariologia ed il Dott. G. Marotta e la sig.na C. Falconi per la collaborazione e l'aiuto.

(17) E. F. ADOLPH, «Am. J. Physiol.», 145, 710 (1946) (citato da LIST⁽³⁾).

Zoologia. — *Nota preliminare sull'identificazione di « Spicara smaris (L.) » e « Spicara alcedo (C. V.) », come sessi differenti di una medesima specie, con processo d'inversione sessuale (*)*. Nota (**) di FERNANDO LOZANO CABO, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Nel 1945 ho iniziato uno studio su *Spicara alcedo* (C. V.), teleosteo di grande importanza industriale nelle Isole Baleari. Questo studio doveva prendere in considerazione la biometria, biologia, anatomia e pesca di detta specie.

Fui sorpreso dal fatto di riscontrare che, almeno all'esame macroscopico, le gonadi di tutti gli esemplari dissezionati apparivano sempre ovari, non trovandosi mai testicoli.

Lo studio del problema del dimorfismo sessuale nel genere *Spicara* (sin. *Smaris* e *Maena*), non è nuovo. Parecchi autori hanno segnalato la possibilità che molte delle specie descritte come differenti, fossero casi di dimorfismo sessuale, senza però arrivare a risolvere il problema, come credo di averlo fatto io.

Così per esempio, Steindachner (« Icht. Ber. », 1865-68) dice che *Spicara chryselis* deve essere il maschio di *Spicara vulgaris*. Secondo Bonaparte (« Cat. met. », 1846), *Spicara mauri* dovrebbe essere il maschio di *Spicara gracilis*.

Il lavoro forse più preciso, da questo punto di vista, è quello di Facciola⁽¹⁾. Tale autore però giunge a conclusioni diverse dalle nostre. Secondo Facciola, *Spicara gagarella* e *Spicara alcedo* sono, rispettivamente, i maschi di *Spicara chryselis* e *Spicara gracilis*.

Il prof. Lozano Rey, nella sua *Ictiologia Iberica* — parte della quale è attualmente in stampa — ha fatto una revisione delle specie del genere *Spicara*, ed è giunto alla conclusione che ne esistono soltanto tre: *Spicara maena* (sin. *Maena maena*; incorporata nel genere *Spicara*, non riscontrandosi a suo giudizio differenze giustificanti l'esistenza di due generi distinti), *Spicara smaris* e *Spicara alcedo*.

Essendo *Spicara alcedo* sempre femmina, pensai che una delle altre due dovesse essere il maschio. *Spicara maena* non poteva esserlo, perchè presenta differenze abbastanza sensibili rispetto a *Spicara alcedo*. Lo stesso non si verifica per *Spicara smaris*, spesso difficilmente distinguibile da *Spicara alcedo* (soprattutto negli esemplari di lunghezza compresa fra 13 e 15 cm.), per quel che si riferisce alla colorazione e alle proporzioni relative del corpo.

Iniziai pertanto lo studio simultaneo di ambedue le specie, rilevando che tutti gli esemplari di *Spicara smaris* — sempre all'esame macroscopico — erano

(*) Ricerche eseguite nel « Laboratorio de Baleares » dell'Istituto Español de Oceanografía e nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1951.

(1) L. FACCIOLA, *Specie della famiglia « Maenidae » viventi nel mare di Messina*. « Monit. Zool. Ital. », Anno XXIX, N. 1, Firenze, 1918.

maschi. Si trattava pertanto di un caso di identità delle due specie, con dimorfismo sessuale. Questa identità è stata confermata biometricamente in vari modi, prima di farlo mediante l'esame istologico delle gonadi.

Effettuando lo studio delle lunghezze ho trovato (fig. 1), nel poligono di frequenza, l'esistenza di tre tratti corrispondenti ad altrettante generazioni di esemplari, presumibilmente appartenenti alle classi di età O, I e II.

Questa supposizione è stata confermata con lo studio delle età sulle squame, giungendo così alla conclusione che, nelle Isole Baleari, l'età massima è di tre anni (classe II), verificandosi la mortalità nel corso del terzo anno di vita, probabilmente dopo il terzo periodo riproduttivo, dato che il primo di essi si

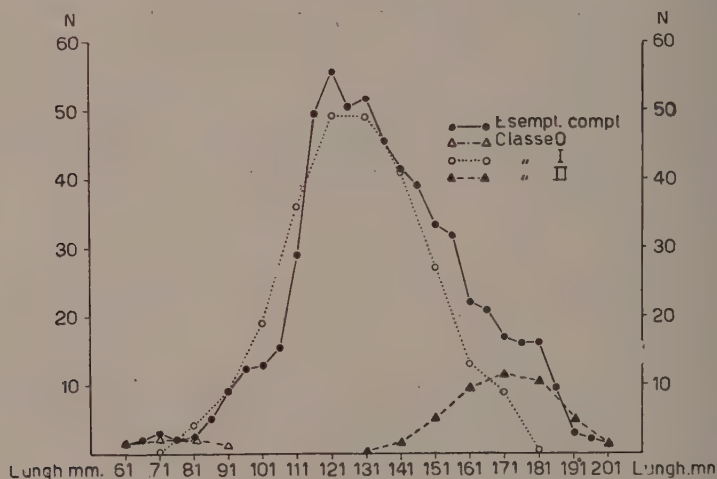


Fig. 1. - Poligono complessivo di frequenza della lunghezza, e dispersione delle lunghezze per le tre classi di età.

svolge nella classe O (meno di un anno), in esemplari da 65 a 90 mm. di lunghezza.

La dispersione delle lunghezze, per ciascuna classe di età, è espressa dalla fig. 1, insieme con la curva generale di frequenza. Tutte e quattro le curve sono state regolarizzate con la formula $f_n = [f(n-1) + 2f_n + f(n+1)]/4$.

Nell'anno O, la lunghezza oscilla fra i 2, 3 mm. che misurano le larve al momento della nascita, ed i 91-95 mm. Per la classe I (2° anno), la lunghezza varia fra 71-75 mm. e 181-185 mm. Nella classe II (3° anno), la lunghezza minima è di 131-135 mm., e la massima di 201-205 mm.

Le curve di frequenza della lunghezza per ciascuna delle tre classi di età, non sono altro che le tre componenti parziali del poligono generale di frequenza di lunghezza. Si conferma così l'esistenza delle tre generazioni precedentemente supposte.

Se però noi esaminiamo, per ciascuno dei differenti anni di età, le percentuali dei maschi, delle femmine e degli individui sessualmente indeterminabili

per scarso sviluppo delle gonadi, troviamo che nell'anno 0 vi sono 28,57% di indeterminabili, 71,42% di femmine e nessun maschio. (Gli indeterminabili avrebbero dovuto essere i più numerosi, ma le reti industriali sono selettive e non catturano esemplari minori di 60 mm.). Nell'anno secondo (Classe I), il 96,44% consta di esemplari fenotipicamente femminili e solamente il 3,55% degli individui — che sono anche quelli di dubbia determinazione — è fenotipicamente maschile. Infine, la classe II (anno 3°) è formata esclusivamente da individui fenotipicamente *Spicara smaris*, ossia maschi.

Riferendoci alle curve di frequenza della distribuzione della lunghezza in rapporto all'età, ciò significa che non si trovano femmine oltrepassanti la classe I

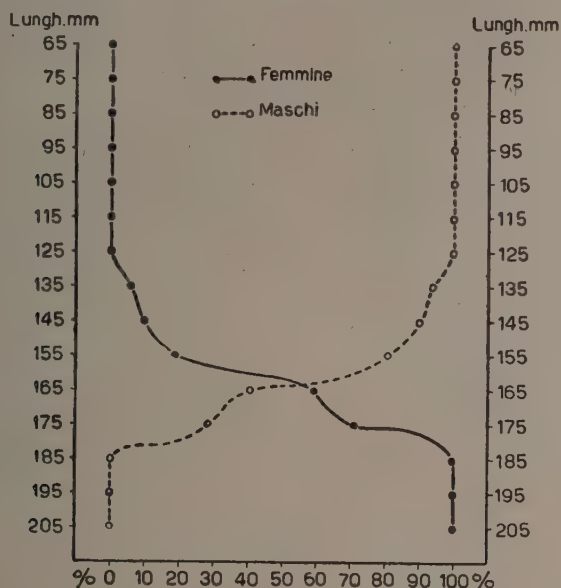


Fig. 2. - Proporzione fra maschi e femmine in rapporto alla lunghezza.

(2° anno), e che sono straordinariamente rari i maschi anteriori alla classe II (3° anno), reperto che conferma, ancora una volta, l'identità delle due specie.

D'altra parte, se studiamo la proporzione fra maschi e femmine corrispondenti alle diverse lunghezze (fig. 2), si vede chiaramente che fino a 125 mm. il 100% degli esemplari è fenotipicamente *Spicara alcedo*, cioè femmine; che da 185 mm. in poi, il 100% è fenotipicamente *Spicara smaris*, cioè maschi, e che fra i 135 e i 175 mm. si verifica una progressiva diminuzione della percentuale delle femmine, accompagnata da un parallelo aumento dei maschi. È precisamente questa zona critica quella che include gli individui di dubbia determinazione, soprattutto nei riguardi della colorazione, che era uno dei caratteri più importanti fra quelli utilizzabili per distinguere le due vecchie specie. Tale colorazione non è che un attributo maschile, che non si manifesta completamente, se non quando

ciò che possiamo chiamare il « coefficiente di mascolinità » è giunto ad un valore minimo.

Rimaneva soltanto da effettuare un esame istologico delle gonadi, per confermare quanto ho finora esposto. Questo mi è stato possibile grazie alla ospitalità che il prof. Umberto D'Ancona mi ha offerto nel suo Istituto di Zoologia dell'Università di Padova, ponendo a mia disposizione la necessaria attrezzatura di laboratorio, fornendomi l'opportunità di raccogliere esemplari di *Spicara* alla Stazione idrobiologica di Chioggia, e aiutandomi continuamente con i suoi consigli. Desidero anche approfittare dell'occasione per ringraziare il prof. Vannini e il dott. Faganelli, dell'aiuto prestatomi.

Uno studio del fenomeno dell'inversione sessuale nei Centracantidi (sin. Smaridi e Maenidi), sebbene effettuato posteriormente all'inizio delle mie ricerche, è stato pubblicato nel 1949 da Zei⁽²⁾, su materiale dell'Adriatico, in Dalmazia. Zei tuttavia continua a considerare separate le due specie, senza arrivare, come me, alla loro indentificazione in una sola. Nelle figure di Zei, per ambo i sessi di *Spicara smar*is, non vengono indicate le dimensioni rispettive. Secondo me, ambedue sono fenotipicamente *Spicara alcedo*, sebbene possa darsi che l'esemplare che egli presenta come maschio, sia una femmina in corso di regressione dell'ovario, con testicolo funzionante, non mostrante ancora caratteri esterni nettamente maschili.

D'altra parte, lo stesso Zei si avvicina alla riunione delle due specie quando studia, in un altro lavoro⁽³⁾, le loro larve. Egli afferma di trovare, insieme a larve tipiche di *Spicara smar*is, altre larve molto simili, che se ne differenziano soltanto per piccoli dettagli di pigmentazione. Aggiunge anche, che non essendo riuscito a trovare i due sessi di *Spicara alcedo*, ha provocato la fecondazione artificiale incrociata delle due specie, ottenendo larve perfettamente simili a quelle trovate nel plancton e che egli considera come di *Spicara alcedo*. I caratteri di queste larve ibride sono quelli che Zei utilizza per definire la larva pura di *Spicara alcedo*. Reputo che questo ragionamento non sia esatto. Secondo me, le due specie sono interfeconde perchè non sono che una sola. Considerare specifici i caratteri di un ibrido, non sembra giustificato, e, d'altra parte, ritengo priva di base l'affermazione di Zei, che le larve trovate nel plancton, mostranti i medesimi caratteri delle ibride, non possano essere il prodotto di un incrocio naturale fra le due forme.

Inoltre Zei riferisce di non aver potuto trovare femmine di *Spicara alcedo* e di aver dovuto incrociare, pertanto, maschi di *Spicara alcedo* con femmine di *Spicara smar*is. Io, all'opposto, non ho trovato mai esemplari fenotipicamente maschili di *Spicara alcedo* e femminili di *Spicara smar*is.

Studiando istologicamente le gonadi ho riscontrato che per lo meno a partire da esemplari di 92 mm., con ovari perfettamente sviluppati e funzionanti, vi è

(2) M. ZEI, *Typical sex-reversal in teleosts*. «Proc. Zool. Soc.», London, vol. 119, Part. IV, pp. 917-920 (1949).

(3) M. ZEI, *Ova and developmental stages of «Maena smar*is (L.)» and «Maena chryselsis (C. V.)»». «Acta Adriatica», vol. IV, N. 5, Spalato, 1949.

un piccolo lobulo testicolare, scarsamente differenziato, connesso alla parete ventrale dell'ovario (fig. 3).

In un esemplare di 132 mm. (fig. 4), in cui il processo di inversione sessuale è più progredito, il testicolo è molto più avanzato nel proprio sviluppo ed occupa tutta la parete ventrale delle gonade. Questo testicolo è ormai funzionante, presentando spermatidi e spermatozoi. L'ovario, invece, comincia a mostrare segni di regressione.

Se il fenomeno si fosse svolto come negli Sparidi, il che sembrava probabile data l'affinità delle due famiglie - secondo quanto descrivono D'Ancona e Pasquali ⁽⁴⁾ per

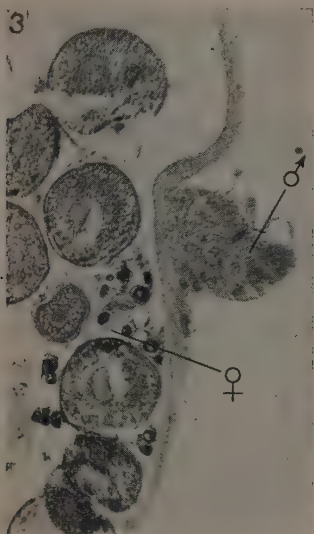


Fig. 3 - Gonade di un esemplare di 92 mm. mostrante nella parete ventrale dell'ovario (a destra nella figura) un piccolo lobulo testicolare.

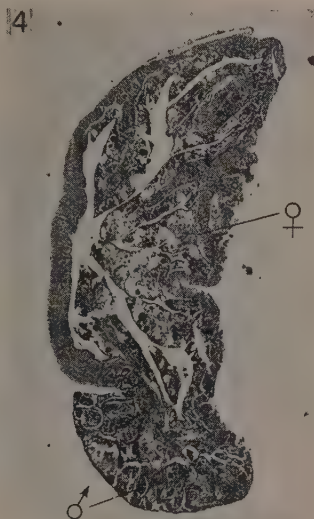


Fig. 4 - Gonade di un esemplare di 132 mm. presentante nella parete ventrale una zona testicolare perfettamente sviluppata. L'ovario comincia a mostrare segni di regressione.

Sparus auratus - nella parete della gonade si sarebbe dovuto trovare un determinato numero di protogoni, destinati a generare, successivamente, i gameti del sesso opposto.

Effettivamente, in un esemplare di 102 mm., pescato nel Tirreno, lungo tutto il margine esterno della parete ventrale dell'ovario si trova, disperso, un piccolo numero di tali cellule protogoniali (fig. 5).

In un altro esemplare di 115 mm., i protogoni hanno cominciato a moltiplicarsi e si sono formati gruppi di spermatogoni. Questi, migrando verso il margine esterno della parete dell'ovario, danno inizio alla sporgenza testicolare, che si vede, maggiormente sviluppata, nella fig. 3.

(4) A. PASQUALI, *Contributo allo studio dell'ermafroditismo e del differenziamento della gonade nell'orata* (« *Sparus auratus* L.»). «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. XVIII, fasc. 3, 1941; U. D'ANCONA, *Ulteriori osservazioni e considerazioni sull'ermafroditismo e il differenziamento sessuale dell'orata* (*Sparus auratus* L.)» Ibidem.

Non ho ancora potuto esaminare gli stadi finali dell'inversione, poichè il lavoro è tuttora in corso, ma in esemplari maggiori di 180 mm., con testicoli completamente sviluppati, si conserva solamente qualche piccolo ammasso di ovociti, perfettamente maturi, nei pressi del gonodotto. Questi ovociti si staccano con straordinaria facilità.

È interessante il fatto, dato che si tratta di una famiglia di Teleostei molto affine, che il differenziamento sessuale sia proterogino, cioè opposto a quello descritto da D'Ancona⁽⁵⁾ per la generalità degli Sparidi, nei quali soltanto in alcuni casi egli ammette la proteroginia.

Non ho ancora completato lo studio di tutto il materiale raccolto, ed è ammissibile che, per arrivare alla conoscenza del ciclo completo di inversione, sarà necessario esaminare esemplari dei diversi mesi dell'anno. Per ora non posso,

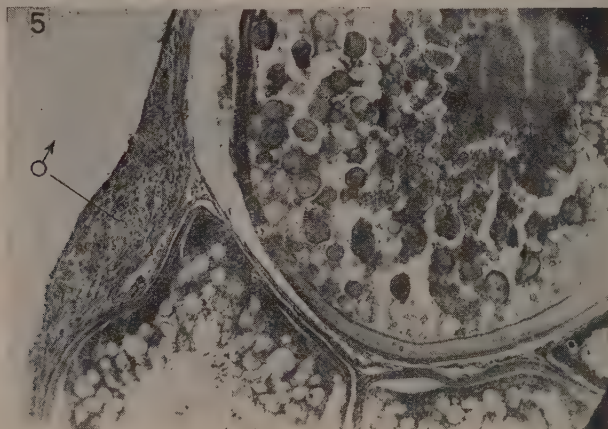


Fig. 5 - Prima manifestazione del testicolo nella parete ovarica di un esemplare di 102 mm.

pertanto, stabilire se il fenomeno si attui in tutti gli individui e se, quando si è iniziato, arrivi sempre al suo completo svolgimento. Il fatto che la mortalità si verifica nel corso del terzo anno di vita spiega il piccolo numero di maschi, ossia di esemplari che sono arrivati all'ultima fase dell'inversione. Ciò significa, *a priori*, che molti esemplari in corso d'inversione non arrivano a completare la loro trasformazione.

Dai dati finora raccolti possiamo dedurre che dei tre periodi riproduttivi i due primi sono eminentemente femminili ed il terzo prevalentemente maschile.

Possiamo infine rilevare che, in conseguenza della riunione delle due specie in una sola (il cui nome per ragione di priorità è *Spicara smaris* (L)), e senza tener conto di *Centracanthus cirrus*, che non figura nel «Systema Naturae», si ritorna alle specie linneane, che sono solamente due, *Sparus maena* e *Sparus smaris*, le stesse alle quali - secondo il lavoro di Lozano Rey e mio - rimane ridotta la famiglia.

(5) U. D'ANCONA, *Il differenziamento della gonade e l'inversione sessuale degli Sparidi*. «Arch. Ocean. Limnol.», Anno VI, fasc. II-III (1949).

L'ORGANIZZAZIONE DELLA RICERCA SCIENTIFICA PROBLEMA FONDAMENTALE DI VITA NAZIONALE

Discorso (*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI

Egregi Colleghi,

Signore e Signori,

Il nostro Presidente mi ha gentilmente concesso di fare dinnanzi a Voi il punto su di un problema di fondamentale importanza per il Paese: quello della organizzazione della ricerca scientifica.

Non abuserò né della Sua né della Vostra benevolenza. Sarò breve. Vi dirò, colla maggiore obbiettività di cui sono capace, quella che è a mio modo di vedere la non lieta situazione attuale e quelli che potrebbero essere i provvedimenti intesi a migliorarla.

Argomenti degni di tutta l'attenzione di chi, come Voi, della ricerca scientifica sente il fascino e conosce l'importanza; di chi, come Voi, sa che al nostro prestigio nel mondo scientifico internazionale sono oggi più che mai legate le sorti future d'Italia.

Il Decreto Legislativo 1° marzo 1945, n. 82, che provvide al riordinamento del Consiglio Nazionale delle Ricerche, ne fissava i compiti nei termini seguenti:

« Il Consiglio promuove, coordina e disciplina la ricerca scientifica ai fini del progresso scientifico e tecnico; esercita la consulenza per ciò che attiene all'attività scientifico-tecnica dello Stato; provvede alla compilazione di norme tecniche di carattere generale; studia i problemi scientifico-tecnici inerenti alla ricostruzione del Paese ».

A sei anni di distanza dalla promulgazione di quel Decreto, vale la pena di rileggere e di ricordare quella precisa elencazione di compiti; non per indulgere alla tentazione di vantare quel che è stato fatto, ma per constatare quel che non è stato fatto, per rendersi conto del perchè non è stato fatto, per vedere se dall'indagine possa trarsi qualche utile insegnamento per l'avvenire.

Su di un punto all'opera del Consiglio tutti potrebbero essere concordi nel rendere omaggio. Non vi è infatti nessun dubbio che al compito di « promuovere » la ricerca scientifica il Consiglio ha risposto in una misura che può in piena coscienza definirsi cospicua, se si tien conto della ristrettezza dei mezzi di cui disponeva.

(*) Tenuto nella seduta del 6 giugno 1951.

Questo era d'altronde non solo il primo, ma l'essenziale fra i suoi compiti nell'immediato dopo-guerra, quando gli stessi Istituti scientifici universitari si erano venuti a trovare nella pratica impossibilità di svolgere adeguatamente la loro attività di ricerca, non essendo neppur più in grado (per l'avvenuta svalutazione della moneta) di far fronte alle esigenze più elementari di funzionamento.

In quel frangente il Consiglio non esitò a destinare la quasi totalità dei suoi mezzi alla ripresa della attività degli Istituti universitari creando, negli Istituti stessi, i suoi Centri di studio, finanziando particolari ricerche, assegnando borse ai giovani di cui bisognava a tutti i costi incoraggiare la vocazione allo studio ed alla ricerca.

A tal fine la compagine stessa del Consiglio venne sottoposta a rigorosa revisione, sopprimendo tutto ciò che appariva in quel momento superfluo o caduco, conservando solo ciò che era veramente vitale ed indiscutibilmente utile; semplificando gli Organi del Consiglio colla rinuncia alla sua primitiva impalcatura collegiale e colla riduzione al minimo indispensabile della sua struttura burocratica; desistendo momentaneamente dalla idea, pur così seducente, di dar vita ad Istituti autonomi, dotati di personale proprio, ed esclusivamente dediti alla ricerca, per favorire invece e prima di tutto le istituzioni esistenti che avevano una tradizione e che davano serio affidamento di volerla e di saperla continuare.

Tengo a ripetere che i risultati hanno corrisposto alle nostre speranze. E molti Universitari possono farne fede.

Non altrettanto efficace è stato invece lo sforzo fatto dal Consiglio per «il coordinamento e la disciplina» della ricerca.

L'ambiente universitario, così evidentemente qualificato per la ricerca pura, libera, disinteressata, lo è assai meno quando si tratta di coordinare e di disciplinare le singole attività per orientarle verso fini concreti e predeterminati.

Quando dall'altissimo ideale del progresso scientifico, della conquista di verità nuove e di nuove conoscenze, del concepimento di nuove teorie, si scende sul piano più modesto ma non meno importante delle applicazioni tecniche, lo sforzo individuale, anche se segnato dal suggello del genio, non basta più; ci vuole il lavoro collettivo, la coordinazione di attività e di buone volontà di diversa natura e di uomini di differente formazione; ci vuole la collaborazione di istituti diversi e non solo tra loro, ma con organismi di Stato o con imprese industriali.

E questo è estremamente difficile in un Paese come il nostro, dove la personalità - e, diciamo pure, la genialità - stessa del ricercatore lo rende ostile a tutto ciò che può sembrare limitazione della sua libertà d'iniziativa, della sua autonomia di pensiero.

Qualunque professore universitario, che abbia cercato di organizzare nel suo Istituto la ricerca scientifica, sa per esperienza che è assai più facile decidere uno dei nostri giovani studiosi ad intraprendere una ricerca personale, anche molto difficile, che ottenere da parecchi giovani ricercatori che uniscano i loro sforzi per una impresa comune.

Ed è certo questa la ragione per cui i Paesi latini, dopo di aver dato al mondo le più meravigliose scoperte, hanno così spesso lasciato agli anglosassoni il merito ed il vantaggio di trarne i frutti. Perchè se le grandi scoperte sono per lo più opera di un isolato, lo sviluppo delle loro conseguenze e la messa a punto delle loro applicazioni richiedono in genere l'opera coordinata di molti.

Occorre quindi lottare contro questa riluttanza dei nostri ricercatori pur rispettando l'indispensabile indipendenza degli spiriti originali. E se a tutelare questa indipendenza può ben provvedere l'Università, a disciplinare la ricerca organizzata e collettiva non può provvedere che un organo autonomo com'è il Consiglio delle Ricerche, nell'ambito del quale i ricercatori possono liberamente accettare e volontariamente imporsi un'autodisciplina in vista di un superiore interesse nazionale.

Al quale interesse nazionale è evidentemente volto un altro dei compiti del Consiglio delle Ricerche, che il Consiglio non assolve affatto: è quello della « consulenza per ciò che attiene all'attività scientifico tecnica dello Stato ».

E non lo assolve non già perchè il Consiglio abbia trascurato quel compito, o perchè non disponga delle competenze capaci di adempierlo, ma semplicemente perchè gli Organi dello Stato che di questa consulenza potrebbero valersi non se ne valgono: non ne sentono evidentemente il bisogno, e neppure l'utilità.

La verità è che sussiste qui un fondamentale equivoco sul significato stesso della formula: « attività scientifico-tecnica dello Stato ».

Io conosco uomini dotati di alta levatura intellettuale che, in assoluta buona fede, credono ancora che sotto quella denominazione si debbano intendere le attività dello Stato che hanno finalità scientifiche o tecniche, che tendono cioè a favorire il progresso della scienza e lo sviluppo delle sue applicazioni. Se questi uomini hanno un alto concetto della vita universitaria e della sua funzione non soltanto didattica, è naturale che essi pensino all'organizzazione della ricerca come a funzione propria di quel Ministero dell'Istruzione che presiede alle attività culturali del Paese.

Ora, io vorrei — con tutto il rispetto dovuto alle opinioni rispettabili e con tutta la deferenza di cui questi uomini sono meritevoli — cercare di disingannarli: cercare di convincerli che si tratta qui di tutt'altra cosa.

La funzione e l'influenza che la scienza e la tecnica hanno acquistato nel mondo moderno trascendono ormai decisamente il campo della cultura per investire in pieno quello della vita degli individui come dei popoli.

Scienza e tecnica determinano ormai inesorabilmente le nostre condizioni di vita, nel bene come nel male. A seconda del come sono impiegate, esse possono creare così l'abbondanza come la penuria di tutte le cose di cui nella vita noi abbiamo maggiore bisogno: dei cibi, delle vesti, delle abitazioni, dei mezzi di comunicazione e di trasporto, dei mezzi di difesa delle persone e dei loro beni.

Grazie ai progressi della scienza e della tecnica si può accrescere il benessere delle masse, si può elevare il livello di vita dei popoli; ma si può anche ridurre i popoli in schiavitù e condannarli ad una perenne e spaventosa miseria.

Scienza e tecnica possono prolungare la nostra vita, difendendoci dalle infezioni e vincendo malattie che fino a ieri conducevano inesorabilmente alla morte; ma colla stessa facilità si presterebbero a diffondere contagi ed a sterminare in un batter d'occhio intere popolazioni.

Non v'è più atto, non v'è più istante della nostra esistenza che possa sottrarsi a questa dominante influenza della scienza e della tecnica. Non v'è quindi neppure attività dello Stato che non abbia un substrato scientifico-tecnico, che non faccia cioè leva sui progressi della scienza e della tecnica per realizzare quello che è il compito essenziale dello Stato: compito di tutore e di organizzatore della vita sociale.

Quando si parla di «attività scientifico-tecniche dello Stato» bisogna dunque intendere tutte quelle attività su cui scienza e tecnica esercitano, bene o male, la loro influenza.

Ed io non vorrei che mi doveste accusare di esagerazione nel senso opposto, ma ho veramente l'impressione che non v'è più settore di attività nel quale dalla scienza e dalla tecnica si possa impunemente prescindere.

Che a questa interpretazione il legislatore mirasse nel formulare la legge fondamentale del Consiglio nazionale delle ricerche che io ho da principio ricordata, lo dimostra l'esplicito accenno ai problemi relativi alla ricostruzione del Paese: accenno che era evidentemente suggerito dal particolare carattere di attualità che i problemi stessi presentavano in quel momento, ma che sta tuttavia a dimostrare come, almeno per la risoluzione di quei problemi, lo Stato intendesse affidare al Consiglio compiti e competenze che andavano decisamente molto al di là dei limiti di quelle che siamo avvezzi a definire «attività culturali».

Molti di Voi sanno che io non ho allora esitato ad accettare questa più ampia interpretazione del mandato; e che - grazie agli aiuti generosamente offertici dall'UNRRA - un Comitato per i soccorsi ai senzatetto (CASAS) è sorto in seno al Consiglio, ed ha svolta una attivissima opera che ha avuto per primo e palese risultato di dare, in poco meno di tre anni, un'abitazione civile a qualche centinaio di migliaia di persone che ne erano rimaste prive.

Ma non fu nè poteva essere questo il solo risultato di quell'opera: un altro scopo io perseguivo - e venne pienamente raggiunto - che dal punto di vista del Consiglio Nazionale delle Ricerche era di fondamentale importanza: quello di offrire allo Stato l'esempio di una organizzazione autonoma, amministrativamente corretta e tecnicamente orientata verso i più arditi programmi di razionalizzazione dei metodi costruttivi e di unificazione dei tipi; nonchè la prova dei vantaggi economici che da tale orientamento si potevano trarre.

E un altro scopo ancora fu raggiunto, di vasta portata sociale: quello di dimostrare non solo la opportunità, ma in certi casi addirittura la necessità, di affiancare la funzione strettamente tecnica della costruzione delle case con l'assistenza alle famiglie che andranno ad abitarle; e l'esempio e la dimostrazione non saranno stati dati invano se verrà il giorno in cui ci decideremo a cancellare una buona volta dal volto della Patria la triste macchia dei tuguri indegni di un popolo civile.

Accanto a questo settore dell'edilizia per i più sventurati – nel quale, grazie agli aiuti americani, qualche cosa si è fatto – quanti sono i settori in cui l'attività del Consiglio non si è sviluppata, oltre i limiti delle attività culturali, come sarebbe stato necessario!

Io penso per esempio a quel che si sarebbe potuto fare in tema di ricostruzione industriale, affrontando in profondità il problema del rinnovamento degli impianti e della razionalizzazione dei processi di produzione, in vista di quell'accrescimento della produttività a cui è indissolubilmente subordinata qualsiasi nostra futura affermazione sui mercati internazionali.

Penso all'impulso che all'agricoltura, alla zootecnia ed alle industrie relative, si potrebbe facilmente imprimere istituendo più stretti e continui rapporti di collaborazione tra le stazioni sperimentali competenti e certi nostri attivissimi Centri di studi biologici.

Penso a tutti i servizi di taratura degli standards di misura e di riferimento, e di determinazione delle costanti fisiche e delle caratteristiche dei materiali: servizi di cui nè lo Stato, nè le industrie possono più fare a meno e che potremmo facilmente assolvere se un razionale coordinamento ed una opportuna integrazione degli istituti esistenti (che già operano in taluni particolari settori) ci permettesse di disporre di complessi del tipo del « Bureau of Standards » di Washington e del « National Physical Laboratory » di Teddington.

Penso a quelle norme tecniche di carattere generale la cui compilazione il citato Decreto affidava al Consiglio: e che il Consiglio ha in diversi casi effettivamente preparate, ma che restano lettera morta per anni ed anni perchè negli Organi che hanno il potere di promulgarle il Consiglio non ha voce di sorta.

Penso soprattutto alla mancanza assoluta di collegamento tra i diversi istituti, statali o privati, che si occupano di ricerche – a volte anzi delle stesse ricerche – ignorandosi l'un l'altro.

Negli Stati Uniti d'America, dove pure numerosi organi di collegamento già esistevano, la necessità di un coordinamento ancora più stretto è stata autorevolmente riaffermata dallo stesso Presidente Truman, nella lettera che egli ha, pochi giorni or sono, indirizzata al Sig Charles Wilson, Direttore dell'« Office of Defense Mobilization » per annunciargli la costituzione di quello speciale Comitato di Scienziati che dovrà « assicurare la più completa partecipazione della scienza ai piani della difesa nazionale ».

Orbene nella speranza di arrivare a destare anche fra noi una coscienza della importanza di questi problemi e di attivare la inefficiente funzione di consulenza del Consiglio, io avevo a suo tempo lanciata l'idea di dar vita ad un Comitato Scientifico Parlamentare simile a quello che a Westminster mette direttamente a contatto gli uomini politici cogli uomini di scienza o d'azione, consentendo a questi di esprimere pareri e di dare suggestioni di cui i primi tengono notoriamente gran conto nello svolgimento della loro attività legislativa.

Disgraziatamente il mio suggerimento fu male compreso. Il Comitato fu bensì costituito – poichè a creare Comitati o Commissioni tutti son sempre d'accordo – ma lo si volle formato di soli parlamentari. Nessun passo innanzi si è perciò fatto sulla via dei contatti che io auspicavo per creare negli ambienti

responsabili una maggiore sensibilità ai problemi della scienza e della tecnica ed una giusta valutazione del loro peso nella vita del Paese.

Oggi, di fronte al fatto incontestabile che il Consiglio non riesce a rendere al Paese quei servizi che il Paese ha ragione di attendersi dalla sua istituzione, è venuto il momento di dire ben chiaro che questo non dipende da inefficienza del Consiglio.

La vera ed unica causa della inefficienza dei più importanti tra i servizi che il Consiglio è chiamato a rendere, sta al di fuori del Consiglio stesso, più precisamente sta negli Organi dello Stato che della consulenza del Consiglio dovrebbero servirsi e non si servono: sta negli Enti che ad ogni disciplina, ad ogni tentativo di coordinamento deliberatamente si sottraggono.

Le stesse difficoltà finanziarie in cui il Consiglio versa, e di cui parliamo spesso come della causa immediata dell'attuale disagio, altro non sono in ultima analisi che la conseguenza del fatto che il Decreto Legge del 1945 si è limitato a prevedere le funzioni di consulenza del Consiglio senza provvedere a creare negli Organi dello Stato che esercitano le famose « attività scientifico-tecniche » l'obbligo di servirsi di quella consulenza; come si è limitato ad affidargli funzioni di coordinamento senza provvedere a dargli la necessaria giurisdizione sugli Enti, pubblici o privati, che si occupano di ricerche e la cui attività sarebbe necessario coordinare.

Si tratta, ben inteso, di un apprezzamento tutto mio personale - che non impegna, che non vuole in alcun modo impegnare, nè i miei Colleghi e Collaboratori, nè gli Organi del Consiglio - ed è per questo che ho preferito parlarne per la prima volta qui, in questa sede in un certo senso neutra, ed in ogni caso « au dessus de la mêlée ».

A questa mia posizione di pensiero non sono giunto del resto senza riluttanza: ad essa mi ha però quasi costretto una considerazione che da qualche tempo mi tormenta come un caso di coscienza; ed è questa: che dalla inerzia degli Organi, e dalla indiscriminata indipendenza degli Enti con cui dovremmo collaborare e dalla conseguente impotenza del Consiglio, sorge e si impone un grave problema di responsabilità.

Perchè è ovvio che, una volta costituito un organo di consulenza, nasce la legittima presunzione della sua responsabilità in tutti gli argomenti di sua competenza; ed a scaricarlo di questa responsabilità di fronte alla pubblica opinione - e anche di fronte alla coscienza di chi vi è impegnato - non basta il fatto che la sua consulenza non viene mai, o quasi mai, richiesta.

Non bisogna infatti dimenticare che le conseguenze del mancato esercizio di questa consulenza, e la conseguente negligenza di criteri razionali ed assenza di ogni coordinamento nella condotta delle attività scientifico-tecniche dello Stato, possono per il Paese essere gravissime.

Ecco perchè è forse giunto il momento di affrontare ancora una volta l'intero problema della ricerca scientifica in Italia.

Di riforme del Consiglio Nazionale delle Ricerche si è parlato spesso in questi anni.

Dopo una ormai più che quinquennale esperienza e per le ragioni che ho esposto, io riconosco volentieri che ormai una riforma si impone. Ma non si tratta, come altri vorrebbe, di una riforma della struttura interna del Consiglio e della sua dipendenza da questo o da quel Ministero; chè anzi la sua attuale posizione giuridica di Organo della Presidenza del Consiglio dei Ministri è quella che senza alcun dubbio meglio si addice alla vastità ed ecletticità dei compiti che il Consiglio dovrebbe assolvere.

La riforma dovrebbe porre termine ad uno stato di cose per cui compiti di fondamentale importanza — che coinvolgono i più vitali interessi non solo della scienza e della cultura, ma della produzione e della economia nazionale — sono attribuiti ad un ente a cui non è poi data la possibilità di adempierli.

E la mia impressione è che a ciò si giungerà forse soltanto se i supremi poteri dello Stato si decideranno a creare — con opportune disposizioni legislative — quelle possibilità di azione del Consiglio, che nei Paesi più progrediti liberamente si determinano per effetto di una più chiara coscienza della influenza che scienza e tecnica possono e debbono esercitare sulla vita nazionale.

Allora, e allora soltanto, il Consiglio delle Ricerche potrà efficacemente assolvere il suo compito e di questo compito assumere intera la responsabilità di fronte al Paese.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1951 - Settembre-ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Analisi matematica. — *Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile.* Nota^(*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. La nuova trascendente intera (di ordine 1) è definita dalla serie

$$(1) \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n - 1} \frac{z^n}{n!}$$

dove $a \neq 1$ è una costante positiva, che non è sostanzialmente restrittivo supporre, come qui faremo, maggiore di 1.

La serie non continuabile (oltre il suo cerchio di convergenza: $|z| < 1$) è la ben nota serie

$$z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

o, più generalmente, la serie

$$(2) \quad z + z^a + z^{a^2} + z^{a^3} + \dots, \quad (a > 1).$$

Cambiando z in e^t nella (2) otteniamo la funzione

$$(3) \quad F(t) = e^t + e^{at} + e^{a^2 t} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(a^k t)$$

il cui campo di esistenza è il semipiano $\Re t < 0$.

È ben facile vedere che la funzione G soddisfa all'equazione funzionale

$$G(az) = G(z) + e^z - 1$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1951.

con la cui ripetuta applicazione si ha

$$G(a^m z) = G(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \exp(a^k z) - m, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Dunque fra una qualsiasi ridotta

$$F_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \exp(a^k z)$$

della serie non continuabile (3) e la trascendente intera G interviene la ben semplice relazione

$$(4) \quad F_m(z) = m + G(a^m z) - G(z), \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

2. Questa importante formula è stata quella che mi ha recentemente permesso di risolvere un problema di statistica matematica posto dalla batteriologia, in cui si presentavano le ridotte $F_m(z)$ nel caso $a = 2$, perchè i batteri si riproducono scindendosi in due. Ma di ciò si discorre in altro mio lavoro. Nella presente Nota voglio soltanto indicare alcune altre interessanti proprietà della funzione G (e di altre ad essa connesse) rimandando per le dimostrazioni ed ulteriori sviluppi ad un più ampio lavoro che verrà pubblicato in un periodico americano.

Come ho già accennato la funzione $G(z)$ è una trascendente intera di ordine finito 1, perchè, indicando con $M(r)$ il massimo modulo della sua derivata $G'(z)$ sulla circonferenza $|z| = r$, si trova che

$$\frac{1}{a} e^{r/a} < M(r) \leq \frac{1}{a-1} e^{r/a}.$$

Per di più si può dimostrare che la funzione $G(z)$ e tutte le sue derivate raggiungono qualsiasi valore prefissato in un'infinità di punti del piano complesso z .

Nel problema statistico cui ho accennato, quel che più importava era il comportamento asintotico di $G(z)$, sull'asse reale, per $|z| \rightarrow \infty$. Nello studio di tale comportamento bisogna distinguere nettamente il caso $\Re z > 0$ dal caso $\Re z < 0$. Nel primo caso l'indagine non è difficile e si giunge alla formula

$$(5) \quad G(z) = e^{z/a} \{1 + O[\exp \Re(z/a^2 - z/a)]\}, \quad (\Re z > 0).$$

Il caso $\Re z < 0$ è più delicato e conviene cominciare col praticare la trasformazione conforme

$$z = -a^u, \quad u = A \log(-z); \quad (A = \log_a e = 1/\log a)$$

che porta l'intero piano complesso z in una striscia di larghezza $2A\pi$, coi bordi paralleli all'asse reale, del piano u ; per esempio: nella striscia $|Im u| < A\pi$.

3. Operata la precedente trasformazione conviene rimpiazzare le due funzioni F e G (o, più esattamente, F' e G') con le due altre

$$\Phi(u) = -z F'(z), \quad K(u) = -z G'(z)$$

che, introducendo la trascendente elementare

$$(6) \quad f(t) = a^t e^{-a^t} = \exp(t/A - e^{t/A}),$$

assumono il semplicissimo aspetto

$$\Phi(u) = \sum_{m=0}^{\infty} f(u+m) \quad , \quad K(u) = \sum_{m=1}^{\infty} f(u-m).$$

Fra l'altro le precedenti considerazioni suggeriscono l'idea di sommare fra loro le due ultime serie, ottenendo così la nuova funzione

$$(7) \quad \mathfrak{F}(u) = \Phi(u) + K(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(u+m).$$

Questa nuova funzione è veramente molto interessante avendo alcune strane particolarità. anzitutto la funzione $\mathfrak{F}(u)$ è ovviamente *doppiamente periodica*, col periodo reale 1 ed il periodo puramente immaginario $2\pi Ai$, ma, a differenza delle funzioni ellittiche, non è per nulla una funzione meromorfa! Più ancora, la funzione non esiste nell'intero piano complesso u ma soltanto in *metà* di ciascun rettangolo dei periodi. Per esempio nel rettangolo dei periodi

$$0 < \Re u < 1 \quad , \quad -\pi A < \Im u < \pi A,$$

essa esiste soltanto per $|\Im u| < \pi A/2$, perchè alla rimanente parte di detto rettangolo corrispondono punti del semipiano $\Re z > 0$ in cui la funzione $F'(z)$ non esiste.

4. Visto che la funzione $\mathfrak{F}(u)$ ammette il periodo reale 1, si presenta spontanea l'idea di cercare di rappresentarla mediante una serie «di Fourier» della forma

$$(8) \quad \mathfrak{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(2n u \pi i).$$

Effettivamente la cosa riesce, nel senso che il generico coefficiente A_n risulta avere un'espressione veramente semplice. Precisamente si trova che è

$$A_n = A \Gamma(1 - 2n A \pi i).$$

Fra l'altro ciò mostra che, purchè $\log a$ non sia troppo grande (e quindi A troppo piccolo), il termine largamente predominante nella serie (8) è il termine costante $A_0 = A$. Per esempio, per $a = 2$ (e quindi $A = 1,4427$) ed $u = x$ reale, si trova facilmente che è

$$(9) \quad |\mathfrak{F}(x) - A| < 0,0000143,$$

il che mostra come la funzione \mathfrak{F} sia *praticamente costante* sull'asse reale.

Pertanto un ricercatore che, ignorando ancora i caratteri analitici di questa funzione, cercasse di farsene una prima idea calcolandone i valori numerici (con 4 o 5 decimali) sull'asse reale, potrebbe alquanto legittimamente assumere che la funzione \mathfrak{F} deve essere una costante, mentre essa non lo è affatto!

5. Con l'ausilio della funzione $\mathfrak{F}(u)$ si riesce abbastanza facilmente a farsi un'idea dell'andamento della funzione $G(x)$ per $x \rightarrow -\infty$, più generalmente,

dell'andamento di $G(z)$ per $|z| \rightarrow \infty$ nel semipiano $\Re z < 0$. Però qui non esistono formule *asintotiche* semplici, bensì rappresentazioni *approssimate*, che, dal punto di vista pratico servono altrettanto bene, ma hanno un significato meno immediato. Per esempio, si trova che, per x negativo grandissimo, è

$$(10) \quad G(x) \doteq -A \log |x|,$$

dove l'ambiguo segno \doteq dell'*uguaglianza approssimata* va qui inteso nel senso che la (rigorosa) relazione di limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [|x| G'(x) - \mathcal{S}(x)] = 0,$$

darebbe luogo ad una relazione *asintotica* simile alla (10) se fosse esattamente $\mathcal{S}(x) = A$, mentr'invece quest'uguaglianza vale solo a meno di un'unità (circa) del 5° ordine decimale, come mostra la (9).

Noto finalmente che altri fatti analitici interessanti, su cui non posso qui soffermarmi, sono connessi col fatto che la precedente funzione $K(u)$ è la *soluzione principale* (nel senso di Nörlund) dell'equazione alle differenze finite

$$\Delta \varphi(u) = f(u)$$

dove $f(u)$ ha l'espressione (6).

Fisica. — *Considerazioni conclusive sulla relatività speciale.*
Nota^(*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

Come è ben noto, la teoria della relatività speciale fu formulata nel 1905, per fornire una spiegazione del risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley. In questa esperienza, la nessuna influenza che l'orientamento dell'interferometro rispetto al moto della Terra, aveva sulla posizione delle frangie, suggerì dapprima l'ipotesi (presto abbandonata) della contrazione dei corpi, attraversati da una corrente dell'ipotetico etere (Lorentz-Fitz Gerald). Einstein la sostituì con la ricordata teoria. In varie Note e Memorie, da me presentate negli ultimi anni⁽¹⁾, ho richiamato l'attenzione dei fisici, su varie contraddizioni, a cui questa teoria dà luogo, qualora si tengano presenti particolari contingenze fisiche, spaziali e temporali, connesse col fenomeno della trasmissione della luce. Questo fenomeno è, del resto, fondamentale nella formulazione della teoria della relatività. Quanto ho esposto in tali lavori non ha dato luogo a consistenti rilievi⁽²⁾. Ritengo perciò che chi abbia letto le mie Note, debba aver riconosciuto la fondatezza delle

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1951.

(1) Questi «Rendiconti», vol. IX, p. 216 (1950), e citazioni ivi contenute.

(2) Ricordo tuttavia una Nota di O. GARAVALDI (citata), a cui replicai chiaramente nella seduta del 3 giugno 1950. Inoltre, G. LAMPARIELLO in una sommaria recensione di uno dei miei lavori citati, nel «Zentralblatt für Mathematik» (B. 37, S. 421, 1951), non tenendo conto di tutti i dati di un mio ipotetico modello sperimentale, vorrebbe che un certo segnale luminoso partisse da un orologio, che in tale modello non esiste. Cade così il fondamento della sua critica, espressa peraltro incompiutamente e con poche parole.

obiezioni da me formulate. Guidato dai miei convincimenti, che si sono sempre meglio concretati, per la quotidiana abitudine all'esperimento, ho ripreso negli ultimi anni ricerche sperimentali, tendenti a fornire una prova, della infondatezza della teoria einsteiniana. Ricerche di tal genere sono per loro natura di difficile concezione; ed, una volta immaginate, esigono l'uso di dispositivi delicatissimi. D'altra parte, chi vuole affrontare un simile programma di lavoro, si trova di fronte alla quasi generale incredulità di successo, da parte di competenti ed incompetenti; e ciò, anche per il credito che da ben 46 anni, la relatività riscuote, presso la grande maggioranza dei matematici e fisici. Malgrado tali difficoltà e costruendomi i necessari apparecchi, sono pervenuto ai delicati risultati, esposti in una mia recente Nota⁽³⁾. Essi sono conformi alla tesi da me sostenuta. Ma essi, pur rappresentando una nuova ed interessante via di ricerca, hanno bisogno di definitiva conferma, mediante apparecchi più perfezionati.

In attesa che ciò avvenga, forse per opera di altri, ho ripreso in esame la struttura della teoria della relatività speciale, tenendo presente un ovvio principio, che forse Einstein ha originariamente trascurato. Esso può così formularsi: *È lecito concretare ipotesi o postulati, quali basi di ulteriori indagini teoriche o sperimentali. Non ci si deve però accontentare di verificare se i risultati di tali indagini siano conformi a taluni fatti osservabili; occorre, inoltre, prima di accettare definitivamente le dette ipotesi, assicurarsi che esse non diano luogo, a priori, a contraddizioni. Se così avvenisse, esse debbono scartarsi, e si deve cercare la spiegazione dei fatti, all'infuori delle formulate ipotesi.*

Le contraddizioni da me esposte nei lavori citati, derivano dalla accettazione dei risultati della relatività speciale. Ora, in applicazione del principio più sopra enunciato, è bene prendere in attento esame i postulati da cui Einstein è partito. Può darsi, che ormai, nella lunga vita della relatività, le considerazioni che ora svolgerò siano già state formulate da altri, sia pure in modo alquanto diverso. Ma in ogni modo, dato il persistente credito che la relatività ancora comunemente riscuote, non è male tornarle a presentare, forse in forma più chiara e particolareggiata.

Einstein, nella sua prima Memoria originale enuncia, due principi o postulati, di cui il 1° dice⁽⁴⁾: *Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.*

È ben noto quale debba essere il significato di tale principio, che discende necessariamente dal risultato negativo dell'esperienza di Michelson, più sopra ricordato. Ma la dicitura ora riportata, appare difettosa. Infatti, osservatori connessi con i due sistemi di coordinate, in prima approssimazione, troveranno bensì che, per esempio, il moto uniforme di un punto è per entrambi rettilineo; ma la dire-

(3) Questi « Rendiconti », seduta del 6 giugno 1951.

(4) Tale Memoria fu pubblicata nel 1905, negli « Annalen der Physik ». Qui, mi riferisco ad una sua riproduzione integrale, fatta più tardi: LORENTZ-EINSTEIN-MINKOWSKI, *Das Relativitätsprinzip*, G. B. Teubner, 1913, S. 30.

zione del moto e la sua velocità possono essere giudicate del tutto differentemente. E, inoltre, come si è detto, ciò è soltanto approssimato, e per vero nel caso di piccole velocità relative, dei sistemi di coordinate. Precisando meglio, si deve dire che per i due sistemi, in conseguenza del loro reciproco moto, lo spazio esteriore è visto relativisticamente in modi differenti. Per esempio, una sfera in quiete per uno dei sistemi, diventa un ellissoide schiacciato per l'altro. Per cui i fenomeni fisici si svolgono con qualche caratteristica diversa, per essi.

Rimane così stabilito, che l'enunciato del 1° principio della relatività, su riportato, non è del tutto soddisfacente. Ad esso, si deve sostituire una dicitura diversa, simile ad altre adottate da varii commentatori di Einstein, come quella seguente: *Non è possibile, con esperienze interne di un sistema, rilevare il suo stato di moto uniforme, rispetto ad un altro sistema.* Questa dicitura discende correttamente, dal risultato della esperienza di Michelson.

Al 1° principio o postulato, ora discusso, Einstein fa seguire il 2°, che dice: *Jeder Lichtstrahl bewegt sich im « ruhenden » Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einen ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist.*

Con questo principio, Einstein afferma, per un osservatore in quiete, la costanza di V (chiamata in seguito, comunemente, c), cioè della velocità della luce emessa da una sorgente, in quiete od in moto. In tale dicitura, il riferimento ad un sistema di coordinate in quiete è fatto (come dice Einstein) per *distinzione letterale* (*sprachlichen Unterscheidung*) da altri sistemi in moto. È perciò da ritenersi che la dicitura *im ruhenden Koordinatensystem* possa venir sostituita dalle parole tedesche, corrispondenti a: *in qualsiasi sistema di coordinate*, intendendosi naturalmente, che le osservazioni siano fatte da osservatori legati al sistema stesso. È questo il significato preciso del 2° postulato, sostanzialmente accettato da tutti i relativisti.

Dai due postulati ora ricordati, Einstein fa discendere quel gruppo di equazioni chiamato *trasformazione di Lorentz*. Esso, se è all'incirca quello che il fisico olandese aveva trovato, appoggiandosi all'ipotesi eterea ed alla contrazione della materia, non dovrebbe più chiamarsi così. Si tratta infatti, di una coincidenza formale matematica, a cui portano due ipotesi del tutto contrarie (esistenza od assenza dell'etere). La quasi coincidenza dei risultati è occasionata appunto, dall'aver Einstein introdotto il 2° postulato, sostanzialmente insostenibile per le contraddizioni altrove rilevate. Ma, evidentemente, Einstein ha creduto di dare maggiore forza alla sua teoria, associando ad essa, in modo arbitrario e illecito il nome di Lorentz.

Prima di dare la dimostrazione della trasformazione di Lorentz, Einstein fa alcune deduzioni dai due postulati, che vorrebbero essere preparatorie alla dimostrazione stessa. Egli considera una sbarra AB, in moto uniforme, con la velocità v , sull'asse delle x . Suppone che A mandi al tempo t_A , un segnale luminoso; questo è poi riflesso da B al tempo t_B , e ritorna in A al tempo t'_A . Dicendo r_{AB} , la lunghezza della sbarra, egli stabilisce le relazioni:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad ; \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v} .$$

I tempi, t_A , t_B , t'_A , sono, per vero, del sistema in quiete con gli assi coordinati. Ma Einstein osserva che essi sono gli stessi di quelli indicati dagli orologi della sbarra, cioè di A e B⁽⁵⁾. Per cui, le relazioni ora ricordate affermerebbero che lungo il sistema rigido AB, la luce, per il sistema stesso, si muove con la velocità $V - v$ in un senso e $V + v$ nell'altro.

Si domanda, allora, perchè, in tale indagine, non è più valido il 2° postulato, secondo cui la velocità della luce, in un sistema rigido, dovrebbe avere sempre la velocità V ? E inoltre, come è possibile considerare le grandezze $V - v$ e $V + v$, mentre la teoria di Einstein porta (in seguito) alla conclusione che V è una velocità insuperabile e non menomabile? Ciò risulta dalla formula relativistica di composizione della velocità. Appare dunque che le relazioni sopra scritte dovrebbero venir sostituite dalle altre:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V},$$

secondo le quali, i tempi di andata e di ritorno della luce, fra A e B, sono esattamente eguali. E mentre ciò è contrario alle conclusioni di Einstein, sarebbe d'accordo con l'ipotesi dell'etere, supponendo un etere fisso con la sbarra AB. Realmente non si può fare una simile ammissione, che sarebbe troppo particolare, e, del resto, contraria al risultato dell'esperienza di Michelson. Si deve dire invece che il rilievo ora fatto, fornisce una prova in più dell'attendibilità della teoria balistica. Questa sarebbe d'accordo con le relazioni più sopra riportate, scritte da Einstein con altro intento, qualora si supponga che la luce viaggi sull'asse delle x , con la velocità V , perchè emessa da una sorgente fissa su tale asse.

A rafforzare il rilievo ora fatto nella esposizione di Einstein, è opportuno ricordare quanto egli dice in un suo libretto di volgarizzazione, che ebbe a suo tempo larghissima diffusione⁽⁶⁾. Considera egli un lungo treno AB, alle estremità del quale cadono due fulmini. Questi segnali luminosi sono, per ipotesi, contemporanei per due osservatori fermi sulla strada ferrata, coincidenti con A e B. Einstein afferma dopo, che un osservatore situato sul punto medio del treno, non riceve contemporaneamente i detti segnali, perchè *egli va incontro alla luce che viene da B mentre fugge quella che viene da A*. In altri termini, per tale osservatore esistono due velocità differenti della luce. Questa si muove, per lui, più rapidamente se viene da B, e più lentamente se da A. Si ha qui lo stesso errore, già rilevato nella Memoria originale di Einstein; ed è del tutto incomprendibile come questi insista su di una asserzione tanto in contrasto con le premesse da lui stesso stabilite.

Ancora qualche altro rilievo può farsi, fra quanto Einstein dice nella sua Memoria. Il § 4 di essa è intitolato: *Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen, bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend*. Benchè egli, inco-

(5) *Ibidem*, nota a piè di p. 31.

(6) A. EINSTEIN, *La théorie de la relativité à la portée de tout le monde*, traduction française, 1921, p. 22. Mentre i relativisti sconsigliano di prendere in considerazione libri del genere, io credo che con essi meglio si possano afferrare certi aspetti fisici presentati dall'autore, nei riguardi della relatività.

minciando ad esporre la parte cinematica del suo lavoro, abbia avvertito di usare le qualifiche di *in quiete* ed *in moto* (*ruhend, bewegt*) soltanto per distinzione letterale (intendendo così, forse, che le due condizioni possano invertirsi); questo titolo dato al detto § 4, può indurre in errore. Ossia, il lettore può ritenere che il significato fisico che Einstein vuol spiegare, riguardi il movimento di corpi rigidi od orologi, senza esplicito riferimento circa tale movimento. Si potrebbe lasciar da parte tale rilievo, trattandosi forse di un difetto formale. Ma che Einstein lasci giudicare quale un fatto assoluto, la caratteristica di moto, si rileva dalla chiusa del detto § 4⁽⁷⁾. Si considerano lì due orologi sincroni e concordi, in un punto A. Di questi, uno comincia a muoversi, rispetto all'altro, con la velocità v , seguendo una curva chiusa, che ritorna in A. Einstein afferma allora, che l'orologio che si è mosso, ritornando in A, trovasi in ritardo del tempo $\frac{1}{2}t(v/V)^2$, essendo t il tempo indicato dall'orologio rimasto fermo. Egli asserisce inoltre, che un orologio all'equatore terrestre, in conseguenza del suo moto diurno rispetto ai poli, ritarda, in confronto di un altro situato su di uno di questi, di un piccolissimo tempo (circa 1/10.000.000 di secondo al giorno). Simili asserzioni sono in evidente contrasto col principio della relatività del moto. Infatti, in nessuno dei due casi ora indicati, uno dei due orologi può avere moto assoluto. Non vi ha dunque ragione di ritenere che sia l'uno o l'altro a ritardare. Si deve aggiungere però, che nel caso del moto terrestre, indipendentemente dalla relatività di Einstein, il moto dell'equatore (di rotazione) possa realmente considerarsi assoluto. Tale fatto fu poi sostanzialmente negato da Einstein, quando nel 1916 formulò la relatività generale, a discutere la quale non è possibile fermarsi in questa Nota. Comunque, l'asserito ritardo degli orologi all'equatore, non può trovare fondamento fisico alcuno.

A parte tutti i rilievi da me fatti, nelle pubblicazioni già citate (fra cui ve ne ha qualcuno che porta a precise contraddizioni quantitative), si potrebbe ritenere che quanto è stato osservato in questa Nota, costituisca, al più, un difetto formale di esposizione, da parte di Einstein; e che, nel suo complesso, la relatività speciale, da tanti anni sostenuta, possa ancora reggersi, sia pure subendo qualche correzione, mediante l'enunciato più esatto dei suoi postulati. Ma non credo sia questo il caso. Lo stesso Einstein, in pubblicazioni recenti, lascia ritenere al lettore, più o meno esplicitamente, che il *moto uniforme* di un corpo o di un sistema possa costituire una qualità assoluta di essi. Così, in una pubblicazione fatta in collaborazione con L. Infeld⁽⁸⁾, Einstein così si esprime: *...un regolo in moto si contrae nella direzione del moto. Quanto più velocemente si muove il regolo, tanto più corto pare*. Per vero, tale dicitura potrebbe lasciare intendere che si tratti solo di apparenza. Il dubbio è tanto più lecito, in mancanza del testo inglese. Comunque, se Einstein vuol dire che si tratti di effettiva contrazione del regolo in moto, ciò non potrebbe esser vero, per ragioni di simmetria. Se si tratta invece di contrazione apparente, tale fatto dovrebbe verificarsi tanto per il regolo

(7) Ved. Memoria citata, p. 38.

(8) A. EINSTEIN-L. INFELD, *L'evoluzione della fisica*. (Trad. italiana), G. Einaudi, pp. 198-199 (1948).

mobile, quanto per gli oggetti in quiete con l'osservatore fermo (visti dal regolo mobile). Ma ciò è assurdo, perchè di due osservatori, reciprocamente in moto, che si incontrano, ciascuno dovrebbe riconoscere, al momento dell'incontro, per esempio, mediante fotografie istantanee (le quali non potrebbero essere che eguali), che gli oggetti prossimi all'altro siano raccordati nel senso del moto.

Inoltre nella seconda pagina citata, Einstein così si esprime: *...un orologio in moto rallenta il proprio ritmo, in rapporto agli orologi davanti ai quali sfilava, e si fermerebbe del tutto qualora la sua velocità eguagliasse quella della luce.* Anche in questa dicitura, non è tenuto conto della *relatività* del moto fra orologi, detti fermi od in moto. Ed inoltre, non si rileva che l'arresto totale del battito di un orologio, costituisce un fatto assoluto e non relativo. Infatti, che un orologio batta o non batta il tempo, può essere giudicato da un osservatore interno all'orologio.

Per completare queste considerazioni sulla relatività speciale, dovrei aggiungere qualcosa sul principio di equivalenza fra massa ed energia, che è quello che ha dato maggior credito all'opera di Einstein. Mi limito però ad osservare che l'espressione $\epsilon = mc^2$ ha un senso, se effettivamente c è una costante. Dopo la critica del 2° postulato, volendo mantenere quella formula (ed a parte il voler discutere come ad essa si perviene), occorrerebbe formulare delle altre ipotesi, che tengano conto della variabilità di c ; e ciò non sembra facile. Ad ogni modo, ho già indicato in una precedente Nota⁽⁹⁾, come ci si possa rendere conto, in altro modo, dell'enorme energia sviluppabile nei processi atomici. Ed è così giustificata la permanente sparizione di massa che si verifica. L'argomento, come si vede, è di estrema importanza. Mi riservo di riprenderlo, in attesa di risultati sperimentali in corso, tendenti a stabilire qualche relazione tra forze newtoniane, di coesione e nucleari.

Credo ancora opportuno di tener conto del fatto, per cui Einstein ha recentemente illustrato la sua teoria, con un libro che dovrebbe servire, ai termini del suo titolo⁽¹⁰⁾, a chiarirne la portata. Se non ché, il lettore, se non è abituato al più virtuoso simbolismo matematico, difficilmente può seguire il pensiero dell'autore. Così, un fisico non trova, in tale libro, alcun chiarimento ai dubbi ed alle incomprendimenti incontrate, studiando le basi della relatività. Einstein perviene, lì ancora, a scrivere la trasformazione di Lorentz⁽¹¹⁾, sebbene in forma più involuta, e deduce da essa i fatti che interessano particolarmente il fisico: contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi, per il caso in cui lunghezze ed orologi sono in moto. Ma anche ora, egli non rileva chiaramente, che tali fatti non sono legati ad un moto assoluto. Le obiezioni che ho concretato nelle Note precedenti ed in questa, non trovano dunque risposta più evidente, in questo nuovo lavoro di Einstein, nel quale ha maggior parte il formalismo matematico. Mi pare anzi, che esse si presentino meglio, allo spirito del fisico, leggendo i suoi precedenti lavori, ai quali mi ero riferito.

(9) Questi «Rendiconti», vol. IX, p. 3 (1950).

(10) A. EINSTEIN, *Il significato della relatività*. (Trad. italiana). G. Einaudi (1950).

(11) *Ibidem*, p. 42.

Tutto quanto si è esposto, appare confermare in modo indubbio la insostenibilità del 2° postulato relativistico; a questo si debbon tutte le contraddizioni rilevate, in qualcuna delle quali cade lo stesso Einstein. Deriva da ciò, che è pure insostenibile tutta la teoria, che su di esso si basa. Qualche relativista, che sostanzialmente sente la difficoltà di accettare il principio della costanza della velocità della luce, per qualsiasi osservatore, tenta di salvare la relatività, asserendo che non vi sia bisogno di partire da tal principio, per dimostrare la trasformazione di Lorentz. Ma simile asserzione non sembra attendibile, perchè questo gruppo di equazioni ha un senso, solo se quella costanza è ammessa. Se così non fosse, non si potrebbero scrivere le equazioni stesse, in forma invertita, come pure si fa in relatività.

Per chiudere questa Nota, esprimo il desiderio che le mie considerazioni vengano attentamente vagliate. Basterebbe che una sola di esse fosse riconosciuta esatta, per decidere definitivamente sull'abbandono di una teoria fisicamente insostenibile. E terminando, voglio ricordare una delle più semplici e chiare contraddizioni a cui la teoria dà luogo, già da me esposta in altra Nota:

Due sistemi rigidi, forniti, in vari loro punti, di osservatori con orologi sincroni e concordi (in ciascun sistema), siano in moto reciproco uniforme. Ad un certo istante, per uno dei sistemi, due osservatori di esso, incontrano rispettivamente due osservatori dell'altro. Questi due incontri sono giudicati simultanei dal primo sistema, ma, relativisticamente, non lo sono dall'altro. Ciò è del tutto incomprensibile, data la perfetta simmetria dei due sistemi.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Equazioni differenziali. — *Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive che non dipende dalla condizione di Lipschitz.* Nota (*) di UGO BARBUTI, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

È ben noto come il processo delle approssimazioni successive (o di Picard-Peano) della soluzione del sistema:

$$(I) \quad y'_i = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

nel problema di Cauchy ⁽¹⁾ (dove le F_i sono funzioni reali continue), converga all'unica soluzione appena si supponga la lipschitzianità delle F_i rispetto alle y_i .

Recentemente J. La Salle [3], riprendendo un ragionamento di A. Wintner [4], ha sostituito alla condizione di Lipschitz condizioni meno restrittive, mostrando come un certo criterio d'unicità (trovato dal medesimo La Salle e indipendentemente da A. Philippov [5]) divenga, con una ipotesi aggiuntiva, anche un criterio di convergenza per le approssimazioni successive e ritrovando così un risultato dello stesso Wintner [4].

(*) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1951.

(1) I numeri in parentesi quadra indicano la bibliografia che si trova in fondo alla Nota. Per le questioni attinenti a questo articolo cfr. ad esempio [1], [2].

Se indichiamo con $y, F(x, y)$ i vettori di componenti (y_1, y_2, \dots, y_m) , $(F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_m(x, y))$ rispettivamente e poniamo $\|y\| = \sum_i |y_i|$, il sistema (1) si scrive

$$(1') \quad y' = F(x, y)$$

e il criterio d'unicità La Salle-Philippov (che contiene noti criteri di Osgood [6], Montel [7], Nagumo [8], Jyanaga [9]) per la soluzione uscente dalla origine ($y(0) = 0$) è espresso dalla disuguaglianza:

$$(2) \quad \|F(x, y^{(1)}) - F(x, y^{(2)})\| \leq \Phi(x) F(\|y^{(1)} - y^{(2)}\|)$$

che è supposta verificata per ogni coppia $(x, y^{(1)}), (x, y^{(2)})$ di punti della regione dove le F_i sono definite e continue, e, dove le funzioni $\Phi(x)$ e $F(u)$ soddisfano ad alcune condizioni che omettiamo per brevità, rimandando alla nota [3]. Se alle condizioni che vengono imposte alle funzioni $\Phi(x), F(u)$ si aggiunge l'altra che $F(u)$ sia non decrescente (cfr. [3] teor. 5), allora questo criterio di unicità diviene anche un criterio di convergenza per le approssimazioni successive.

Ora dato il tipo della espressione a maggiorare nel secondo membro della (2) esistono criteri di unicità che sfuggono al criterio La Salle-Philippov. Così è per quello di O. Perron [10], espresso dalle disuguaglianze:

$$(3) \quad |F_i(x, y^{(1)}) - F_i(x, y^{(2)})| \leq \frac{1}{x} \text{Max}_i |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|$$

$$(i = 1, 2, \dots, m, \quad x \neq 0).$$

Infatti dalle (3) può dedursi solo che è

$$\|F(x, y^{(1)}) - F(x, y^{(2)})\| \leq \frac{m}{x} \text{Max}_i |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|,$$

disuguaglianza che è distinta⁽²⁾ dalla (2), salvo il caso $m = 1$.

In questa Nota mi propongo di provare la convergenza delle approssimazioni successive nelle ipotesi (3) (num. 1, 2, 3) con un ragionamento diretto (non usato da Wintner e La Salle), e di assegnare (num. 4), riprendendo una osservazione di A. Roseblatt [12] (cfr. anche [13]), una valutazione dell'ordine di grandezza della approssimazione ennesima.

1. a) Nel sistema differenziale (1) si suppongano per semplicità⁽³⁾ le F_i definite e continue nello strato

$$R: \quad 0 \leq x \leq a, \quad |y_i| < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ed ivi limitate, vale a dire esista una costante assoluta c tale da avere in $R: F_i(x, y) \leq c$.

$$(2) \text{Max}_i |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| \text{ non è funzione della norma del vettore } y^{(1)} - y^{(2)}.$$

(3) Il teorema del num. 3 vale anche se il campo ove le F_i sono definite è quel medesimo che appare nei teoremi di esistenza Perron-Müller (cfr. [3] p. 722) e l'intervallo di convergenza quello solito.

Osserviamo che se $y = f(x)$ è un vettore soluzione del sistema (1') in $(0, a)$ con la condizione $f(0) = 0$, allora il criterio (3), che afferma l'unicità di tale soluzione, può prodursi con le disuguaglianze seguenti (cfr. ad esempio [11])

$$(3^*) \quad |F_i(x, f(x) + Y) - F_i(x, f(x))| \leq \frac{1}{x} \text{Max}_i |Y_i|$$

dove il vettore y di componenti y_1, y_2, \dots, y_m è arbitrario.

È chiaro che se sono verificate le (3) lo sono anche le (3^*) , ma non inversamente.

b) Vale il seguente

LEMMA. - Sia $\varphi(x, u)$ funzione di due variabili reali definita, continua e limitata in:

$$R': \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq u < \infty$$

non decrescente con u e tale da riuscire: $\varphi(x, u) \geq 0, \varphi(x, 0) \equiv 0$.

Se per ogni punto $P \equiv (x, u), (x > 0)$ di R' , si ha:

$$(3') \quad \varphi(x, u) \leq \frac{u}{x},$$

allora la successione

$$(4') \quad u_n(x) = \int_0^x \varphi(x, u_{n-1}(x)) dx, \quad u_0(x) = Lx;$$

dove L è una costante positiva arbitraria, converge uniformemente a zero in $(0, a)$ ed è

$$0 \leq u_n(x) \leq u_{n-1}(x).$$

È infatti per le $(3')$ e per la continuità di $\varphi(x, u)$

$$\varphi(x, u_0(x)) \leq u'_0(x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

per cui avremo subito

$$u_1(x) = \int_0^x \varphi(x, u_0(x)) dx \leq u_0(x) \quad (0 \leq x \leq a).$$

Analogamente per la non decrescenza di $\varphi(x, u)$ con u , sarà:

$$u_2(x) = \int_0^x \varphi(x, u_1(x)) dx \leq \int_0^x \varphi(x, u_0(x)) dx = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

È chiaro di qui che per induzione si prova che è sempre:

$$u_n(x) \leq u_{n-1}(x) \quad (0 \leq x \leq a, \quad n = 1, 2, \dots).$$

Onde $u_n(x)$ tenderà in $(0, a)$ ad una funzione $u(x) \geq 0$. Tale funzione soddisfa la equazione integrale

$$u(x) = \int_0^x \varphi(x, u(x)) dx,$$

risultando nelle (4') lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrazione, od anche in tutto $(0, a)$ la equazione differenziale:

$$u'(x) = \varphi(x, u(x)) \quad , \quad u(0) = 0.$$

Ma poichè quest'ultima a causa delle (3') e della ipotesi della continuità della $\varphi(x, u)$ ammette come unica soluzione (criterio di Perron) la soluzione nulla, ne vien $u(x) = 0 \equiv 0$. Osserviamo infine che dalla non crescenza delle $u_n(x)$ e dal fatto che esse sono equicontinue⁽⁴⁾ ne viene, come facilmente si può provare, la convergenza uniforme delle $u_n(x)$ in $(0, a)$.

2. In questo numero, vogliamo costruire una funzione $\bar{\varphi}(x, y)$ dei punti di R e una funzione di due variabili reali $\varphi(x, u)$, utili nel seguito.

Preso un punto di R , $P(x, y)$ (di coordinate non tutte nulle), si consideri il segmento di retta:

$$y_i = |y_i|t \quad \xi = xt \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Diciamo Γ_P l'insieme dei punti (\bar{x}, \bar{y}_i) di R per i quali è:

$$\Gamma_P: \quad |\bar{y}_i| \leq y_i \quad \bar{x} = \xi.$$

Al punto P si associ la funzione $\bar{\varphi}(P) = \bar{\varphi}(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$, definita ponendo:

$$\bar{\varphi}(P) = M,$$

essendo M il massimo dei massimi valori assoluti delle F_i in Γ_P . Se P ha tutte le coordinate nulle si ponga $\bar{\varphi}(P) = \text{Max}_i |F_i(P)|$. La funzione $\bar{\varphi}(P)$ così definita, gode di alcune proprietà.

Se $P_1(x, y^{(1)})$, $P_2(x, y^{(2)})$ sono due punti di R e se per ogni i è: $|y_i^{(1)}| \leq |y_i^{(2)}|$, allora è anche $\bar{\varphi}(P_1) \leq \bar{\varphi}(P_2)$; ciò è evidente riuscendo il campo Γ_{P_1} contenuto in Γ_{P_2} .

Si ha anche evidentemente che $\bar{\varphi}(P)$ è limitata in R e che se $P(x, y)$ è un punto di R valgono per ogni F_i le disuguaglianze:

$$(5) \quad |F_i(x, y)| \leq \bar{\varphi}(P) = \bar{\varphi}(x, |y_1|, |y_2|, \dots, |y_m|) \leq \varphi(x, u)$$

dove abbiain posto $u = \text{Max}_i |y_i|$, $\varphi(x, u) = \bar{\varphi}(x, u, \dots, u)$.

Inoltre $\bar{\varphi}(P)$ è continua in R . Siano infatti P, Q due punti di R ⁽⁵⁾, se si fa tendere P a Q è certo che $\bar{\varphi}(P)$ tende a $\bar{\varphi}(Q)$ perchè in caso contrario si po-

(4) Che le $u_n(x)$ siano equicontinue discende dal fatto che esse sono definite mediante le (4') e che la $\varphi(x, u)$ è continua e limitata in R' .

(5) Se Q ha le coordinate tutte nulle, la continuità di $\bar{\varphi}(P)$ in Q risulta dall'osservare, che, detta F_r una qualunque delle F_i per le quali $F_r(Q) = \text{Max}_i |F_i(Q)|$, si ha:

$$\lim_{P \rightarrow Q} \bar{\varphi}(P) = \lim_{P \rightarrow Q} \text{Max}_r [\text{Max}_i |F_i|] = |F_r(Q)| = \bar{\varphi}(Q).$$

trebbe determinare un $\sigma > 0$ ed una successione di punti P_n di R tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q$ e per i quali varrebbe una almeno delle seguenti eguaglianze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(P_n) = \bar{\varphi}(Q) + \sigma$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(P_n) = \bar{\varphi}(Q) - \sigma.$$

Poichè ogni punto di Γ_Q è punto d'accumulazione di punti di Γ_{P_n} per $n \rightarrow \infty$, e poichè, a causa della continuità delle F_i , in ogni Γ_{P_n} esiste almeno un punto L_n in cui una delle F_i è in valore assoluto uguale a $\bar{\varphi}(P_n)$, ne viene, nella prima eventualità, che scelto un $0 < \sigma_1 < \sigma$, in ogni punto L di Γ_Q che è punto d'accumulazione degli L_n , una almeno delle F_i dovrà prendere un valore assoluto maggiore di $\bar{\varphi}(Q) + \sigma_1$, ciò che è impossibile a causa della definizione medesima di $\bar{\varphi}(Q)$. Nella seconda eventualità, per ogni Q' di Γ_Q può trovarsi una successione di punti P'_n , ognuno dei quali appartenente a Γ_{P_n} , tali che $\lim P'_n = Q'$ per $n \rightarrow \infty$, e per i quali è:

$$|F_i(P'_n)| \leq \bar{\varphi}(P_n) < \bar{\varphi}(Q) - \sigma_1$$

per tutti gli indici i e per tutti gli n sufficientemente grandi.

Poichè d'altra parte è $\lim |F_i(P'_n)| = |F_i(Q')|$, ne viene: $|F_i(Q')| \leq \bar{\varphi}(Q) - \sigma_1$ per ogni i , quindi, perchè Q' è un punto qualunque di Γ_Q anche che è $\bar{\varphi}(Q) \leq \bar{\varphi}(Q) - \sigma_1$, ciò che è assurdo.

Ne segue che se $v(x)$ è un vettore di componenti $v_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) definite in $(0, a)$ e ivi continue, le funzioni: $\bar{\varphi}(x, v(x))$, $\varphi(x, u(x))$, dove abbiám posto $u(x) = \text{Max}_i |v_i(x)|$, sono pure continue in $(0, a)$.

Se ora supponiamo che $F_i(x, 0) \equiv 0$ e che valgano, per ogni i le disuguaglianze:

$$(\bar{3}^*) \quad |F_i(x, y) - F_i(x, 0)| \leq \frac{1}{x} \text{Max}_i |y_i|; \quad (x > 0)$$

la funzione di due variabili reali $\varphi(x, u)$, sopra definita soddisfa alle ipotesi del lemma enunciato in 1. b).

È evidente intanto che $\varphi(x, u)$ è non negativa, non decrescente con u , continua e limitata in R' e $\varphi(x, 0) \equiv 0$, perchè $F_i(x, 0) = 0$ per ogni i .

Inoltre fissato il punto $U(x, u, u, \dots, u)$ ($x > 0$) è per le $(\bar{3}^*)$:

$$\varphi(x, u) = \text{Max}_i [\text{Max}_{\Gamma_U} |F_i(P)|] = |F_j(\bar{P})| \leq \frac{1}{x} \text{Max}_i |\bar{y}_i|,$$

dove j è un opportuno valore dell'indice i e $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ un punto opportuno non esterno a Γ_U . Ma posto $\bar{x} = x\bar{t}$, si ha $|\bar{y}_i| \leq u\bar{t}$, ($i = 1, 2, \dots, m$), per cui è

$$\varphi(x, u) \leq \frac{1}{x} \text{Max}_i |\bar{y}_i| \leq \frac{u\bar{t}}{x\bar{t}} = \frac{u}{x}.$$

ciò che prova quanto abbiamo affermato.

3. a) Mi propongo in questo numero di provare il seguente

TEOREMA. — Se per il sistema differenziale (I) o (I') con le F_i definite e continue in R valgono le (3), allora le successioni:

$$(4) \quad y_i^{(n)}(x) = \int_0^x F_i(x, y^{(n-1)}(x)) dx, \quad y^0(x) = f(x) + v(x)$$

$$(0 \leq x \leq a, \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

dove $f(x)$ ($f(0) = 0$) è il vettore soluzione di (I') e $v(x)$ un vettore di componenti $v_i(x)$ definite in $(0, a)$, continue, del resto arbitrarie, convergono uniformemente alle componenti dell'unica soluzione $f(x)$ in $(0, a)$ di (I').

Se supponiamo, dapprima, che sia $F_i(x, 0) \equiv 0, f_i(x) \equiv 0$ il teorema lo proveremo subito. Si osservi, che, senza alterare la generalità del ragionamento, possiamo supporre che siano verificate per ogni i le condizioni:

$$(6) \quad |v_i(x)| \leq Lx \quad (L > 0, \text{ opportuna}) \\ (0 \leq x \leq a)$$

perchè se ciò non accadesse a questa condizione soddisfarrebbero le funzioni (facendo $L = c$):

$$y_i^{(1)}(x) = \int_0^x F_i(x, v(x)) dx, \quad (0 \leq x \leq a)$$

essendo le F_i limitate in R , e potremo assumere (per le considerazioni che seguono) come funzioni iniziali quest'ultime. Si ha allora per la successione (4) a causa delle (5)

$$|y_i^{(1)}(x)| \leq \int_0^x |F_i(x, v(x))| dx \leq \int_0^x \bar{\varphi}(x, v(x)) dx \leq \int_0^x \varphi(x, u(x)) dx, \\ (0 \leq x \leq a)$$

dove abbiain posto $u(x) = \text{Max}_i |v_i(x)|$. Per le (6) sarà anche $u(x) \leq Lx$ e per la non decrescenza di $\varphi(x, u)$:

$$\int_0^x \varphi(x, u(x)) dx \leq \int_0^x \varphi(x, Lx) dx = u_1(x).$$

Onde avremo

$$|y_i^{(1)}(x)| \leq u_1(x) \quad (0 \leq x \leq a, \quad i = 1, 2, \dots, m).$$

Posto $u^{(1)}(x) = \text{Max}_i |y_i^{(1)}(x)|$, sarà evidentemente $u^{(1)}(x) \leq u_1(x)$.

E, sempre per le (5), detto $y^{(1)}(x)$ il vettore di componenti $y_i^{(1)}(x)$, sarà:

$$|y_i^{(2)}(x)| \leq \int_0^x |F_i(x, y^{(1)}(x))| dx \leq \int_0^x \bar{\varphi}(x, y^{(1)}(x)) dx \leq \int_0^x \varphi(x, u^{(1)}(x)) dx.$$

E sempre per la non decrescenza di $\varphi(x, u)$:

$$\int_0^x \varphi(x, u^{(1)}(x)) dx \leq \int_0^x \varphi(x, u_1(x)) dx = u_2(x).$$

Onde ancora per gli stessi valori di x e di i :

$$|y_i^{(2)}(x)| \leq u_2(x).$$

È chiaro che, in generale, potremo provare per induzione che è per ogni n

$$|y_i^{(n)}(x)| \leq u_n(x) \quad (0 \leq x \leq a, \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

dove abbiám posto

$$u_n(x) = \int_0^x \varphi(x, u_{n-1}(x)) dx; \quad u_0(x) = Lx,$$

poichè le $u_n(x)$ tendono uniformemente a zero in $(0, a)$ ne viene la tesi.

Per il caso generale si consideri il sistema

$$(1'') \quad Y_i = \Phi_i(x, Y) = F_i(x, f(x) + Y) - F_i(x, f(x)), \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le Φ_i risultano ancora definite, continue e limitate in R . È $\Phi_i(x, 0) \equiv 0$ e, a causa delle (3^*) , queste funzioni soddisfano alle (3^*) e si trovano nelle stesse condizioni delle F_i nel caso precedente, onde le approssimazioni $\bar{y}_i^{(n)}(x)$ relative al sistema $(1'')$ convergono uniformemente a zero; si ha per esse

$$\bar{y}_i^{(1)}(x) = \int_0^x \Phi_i(x, v(x)) dx = \int_0^x F_i(x, f(x) + v(x)) dx - f_i(x).$$

Se poniamo:

$$y_i^{(1)}(x) = \int_0^x F_i(x, f(x) + v(x)) dx$$

potremo scrivere con notazione vettoriale:

$$\bar{y}^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - f(x); \quad (0 \leq x \leq a)$$

e in generale sarà, come facilmente si trova,

$$\bar{y}^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) - f(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

dove $\bar{y}^{(n)}(x)$ è il vettore che ha per componenti le approssimazioni ennesime relative al sistema $(1'')$ e inoltre $y^{(n)}(x)$ il vettore di componenti le (4). Dalle precedenti segue la tesi.

b) Osserviamo che nel provare la convergenza delle (4) abbiamo supposto l'esistenza di una soluzione $f(x)$ ($f(0) = 0$) del sistema $(1')$; ciò però non è essenziale perchè la successione (4), essendo le $v_i(x)$ arbitrarie, può costruirsi indipendentemente dalla ipotesi della esistenza di eventuali soluzioni, e la sua convergenza ad un sistema di funzioni assicura senz'altro l'esistenza di una soluzione di (1).

4. Al fine di una valutazione del grado di approssimazione della successione (4) alla soluzione del sistema (1), osserviamo che se a secondo membro delle disuguaglianze (3*) si può sostituire la espressione

$$k \frac{1}{x} \text{Max}_i |Y_i|$$

con $0 < k < 1$, allora per la funzione $\varphi(x, u)$, come risulta dal ragionamento fatto al n. 2, vale il criterio di unicità di A. Rosenblatt [12], è cioè:

$$\varphi(x, u) \leq k \frac{u}{x} \quad (0 < x \leq a).$$

In questo caso, per una osservazione del medesimo autore, si ha che la successione $u_n(x)$ viene maggiorata, a meno di un fattore numerico fisso, dal termine generale della progressione geometrica di ragione k .

Si ha infatti:

$$u_1(x) = \int_0^x \varphi(x, Lx) dx \leq \int_0^x k \frac{Lx}{x} dx = Lkx \leq Lka,$$

$$u_2(x) = \int_0^x \varphi(x, Lkx) dx \leq \int_0^x Lk^2 dx = Lk^2 a,$$

.....

Si ottiene così in generale:

$$u_n(x) \leq Lk^n a \quad (0 \leq x \leq a, n = 1, 2, \dots)$$

In questa eventualità, questa osservazione può sostituire il lemma del n. 1 b) al fine di mostrare la convergenza della (4).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] SANSONE G., *Equazioni differenziali nel campo reale*. Ed. Zanichelli, Bologna (1941).
- [2] KAMKE E., *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, Leipzig, Akad. Verlagsges. (1930).
- [3] LA SALLE J., *Uniqueness theorems and successive approximations*. «An. of Math.», 50, n. 3, pp. 722-729.
- [4] WINTNER A., *On the convergence of successive approximations*. «Am. J. Math.», 68, pp. 13-19 (1946).
- [5] PHILIPPOV A., *Sufficient conditions for uniqueness and non uniqueness etc.* «C. R. (Doklady) Acad. Sci. U. R. R. S.» (N. S.), 60, pp. 549-542 (1948).
- [6] OSGOOD W. F., *Beweise der Existenz einer Lösung der Differentialgleichungen etc.* «Monatshefte für Math. und Physik.», 9, pp. 331-345 (1898).
- [7] MONTEL P., *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure etc.* «Bull. Sci. Math.» (2), 50, pp. 205-217 (1926).
- [8] NAGUMO M., *Eine hinreichende Bedingung für die Unität etc.* «Jap. J. Math.», 3, pp. 107-112 (1926).
- [9] JYANAGA S., *Ueber die Unitätsbedingungen der Lösung etc.* «Jap. J. math.», 5, pp. 253-257 (1928).
- [10] PERRON O., *Ueber die hinreichende Bedingung etc.* «Math. Zeit.», 28, pp. 212-219 (1928).
- [11] BARBUTI U., *Sull'integrale massimo e minimo etc.* «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. III, pp. 272-276 (1947).
- [12] ROSENBLATT A., *Ueber die Existenz von Integralen etc.* «Archiv. for math. Astr. och Fysik», 5, n. 2, p. 4 (1909).
- [13] ROSENBLATT A., *Sulla unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. «Rend. Acc. Lincei», ser. VI, vol. VIII, pp. 41-45 (1928).

Equazioni alle derivate parziali. — *Teorema d'unicità per una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy.* Nota^(*) di EMILIO BAJADA, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

Il problema di cui ci vogliamo occupare vien chiamato spesso nella letteratura « Problema di Cauchy » per le equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine e consiste, in breve, date un'equazione:

$$(1) \quad q = f(x, y, z, p),$$

in un campo A , e una funzione $\omega(y)$ in un opportuno intervallo, di trovare in una classe C di funzioni una, $z(x, y)$, tale che essa soddisfi la (1) se poniamo $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$, ed inoltre si riduca a $\omega(y)$ per $x = \xi$, in altre parole:

$$(1') \quad z(\xi, y) = \omega(y).$$

Questo tipo di problema, qui formulato nella forma più semplice e per una sola equazione e una sola funzione a sole due variabili, può essere generalizzato per un sistema di equazioni del tipo (1) e per più di una funzione di più di due variabili. Noi ci limiteremo al caso espresso sopra, sia per motivi di semplicità, sia perchè le considerazioni che qui si vogliono fare saranno sfruttate più specialmente onde investigare i tipi più opportuni di classi C . Nei casi più complessi le considerazioni dovendo valere *a fortiori*.

È inutile sottolineare l'importanza d'un tale problema, però va osservato che per quanto si riferisce ai teoremi di esistenza e di unicità, la classe C dove la soluzione di (1) va trovata rappresenta un elemento estremamente importante nel problema, essendo chiarissimo che, se si allarga la classe C , la probabilità di essere in grado di dare un teorema di esistenza aumenta, mentre quella di essere in grado di dare un criterio di unicità della soluzione diminuisce. Sono queste due necessità opposte che rendono difficile la scelta della più conveniente classe C , dove una buona teoria delle equazioni alle derivate parziali si possa armoniosamente sviluppare.

Allo stato attuale della teoria la classe più generale nella quale il problema è stato investigato è stata la classe delle funzioni $z(x, y)$ con derivate parziali $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ continue.

Questa classe sarà indicata nel seguito con (C') .

Onde meglio mettere in evidenza una circostanza alquanto curiosa è opportuno ricordare, qui, alcuni risultati notissimi relativi ad una questione molto affine e precisamente quella delle equazioni differenziali ordinarie di tipo

$$(2) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1951.

Sappiamo che, se la $f(x, y)$ soddisfa una condizione molto larga, per esempio la semplice continuità, l'equazione (2) ammette almeno una soluzione con derivata continua⁽¹⁾, e se esistono due soluzioni distinte esiste tutto un « pennello » di soluzioni. Questo fatto vien chiamato « fenomeno di Peano ».

Inoltre se la f in (2) soddisfa una condizione più restrittiva (per esempio una condizione di Lipschitz) esiste una e una sola soluzione di (2), e il fenomeno di Peano non può occorrere.

Siamo portati ad osservare che l'unicità, in questo problema richiede un'ipotesi più restrittiva di quella richiesta per la semplice esistenza, questo fatto presentandosi poi in molti altri problemi dell'Analisi, come per esempio nel Calcolo delle Variazioni.

Tale situazione non si presenta però nel problema di Cauchy qui considerato.

In altre parole se ci limitiamo alla classe (C') è stato provato⁽²⁾ che se $f(x, y, z, p)$ ammette derivate rispetto a y, z e p Lipschitziane e $\omega(x)$ ammette pure derivata Lipschitziana, esiste almeno una soluzione. Inoltre non appena si tenti di allargare significativamente⁽³⁾ le ipotesi ammesse sulla f ed ω l'esistenza della soluzione viene a mancare⁽⁴⁾: cioè il teorema detto appare il più largo che ragionevolmente si possa desiderare.

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione del problema, posto sempre nella classe (C'), molti risultati sono stati dati da vari autori⁽⁵⁾, citeremo però qui uno solo di essi, sia perchè esso è il più semplice, sia perchè è sicuramente il più espressivo. Questo teorema è dovuto ad Haar⁽⁶⁾ e si enuncia nel modo seguente:

(1) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Zanichelli (1949), vol. II, pp. 73-88.

(2) C. SEVERINI, *Sul problema di Cauchy* « Atti Accademia Geoenia », ser. V, vol. X (1916); T. WAŻEWSKI, *Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. « Math. Zeitschrift », 43 Bd.; E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. « Akad. Verlag. » (Leipzig), p. 352; E. DIGEL, *Ueber die Existenz der integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*. « Math. Zeitschrift », 44 Bd.; E. BAJADA, *Sul teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. « A. S. N. S. », ser. II, vol. XII.

(3) In un recentissimo lavoro di M. Cinquini Cibrario e S. Cinquini le ipotesi per l'esistenza della soluzione sono allargate, l'equazione (1) essendo scritta sotto la forma di Caratheodory. Il lavoro è il seguente: MARIA CINQUINI CIBRARIO e SILVIO CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* . « Annali di Matematica » (in corso di pubblicazione).

(4) O. PERRON, *Ueber Existenz und nicht Existenz von Integralen partieller Differentialsysteme im reellen Gebiet*. « Math. Zeitschrift », Bd. 27, pp. 548; E. BAJADA, *Sul problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali*. Annali « S. N. S. di Pisa », ser. II, vol. XII, pp. 185-188; *Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazioni alle derivate parziali*. « Rendiconti Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. I, pp. 296-301.

(5) Oltre l'Haar che citeremo più avanti vedere tra gli altri: T. WAŻEWSKI: *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. « Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. XVIII, pp. 372-376; M. VOLPATO, *Criteri di confronto e di unicITÀ per le soluzioni dell'equazione $p = f(x, y, z, q)$ coi dati di Cauchy*. « Rend. Seminario Matematico di Padova » (1951); A. ROSENBLATT, *Sobre el problema de Cauchy por las ecuaciones a derivadas parciales del primer orden*. « Revista de Ciencias (Lima) », Nos. 389-390; Vedere pure il lavoro citato in (3).

(6) A. HAAR, *Ueber Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen*. « Atti Congresso Matematici » (Bologna, 1928), tomo III, pp. 5-10.

Se $f(x, y, z, p)$ è Lipschitziana rispetto a z e a p , allora il problema relativo all'equazione (1) non può avere più di una soluzione, nella classe (C'), definita in un conveniente campo trapezoidale.

Si osserva immediatamente che questo teorema ha ipotesi estremamente più larghe del corrispondente teorema di esistenza. In altre parole, si può essere sicuri dell'unicità della soluzione senza per altro essere in grado di derivarne l'esistenza da teoremi generali e in altre circostanze essendo sicuri di non poterlo fare!

D'altra parte, a causa di quanto detto sul teorema di esistenza e la impossibilità di migliorarlo sensibilmente, nulla può essere fatto per cambiare questa situazione anomala e la caratterizzazione di un « fenomeno alla Peano » è pertanto senza speranze.

Siamo stati indotti ad identificare la causa di tale anomalia con la grande restrittività della classe (C') e si può pensare ragionevolmente di superare tale disarmonia con altri rami dell'Analisi, allargando opportunamente la classe (C').

Naturalmente la domanda che si impone allora è la seguente: Quale è la classe più conveniente nella quale le equazioni alle derivate parziali producono i fenomeni ben noti dell'Analisi ed in particolare quelli delle equazioni differenziali ordinarie, onde essere in grado, poi, di far passare queste come caso particolare di quelle?

Le risposte a questa domanda saranno naturalmente suggerite dallo studio dei teoremi di unicITÀ: *se allargando la classe (C') il teorema di unicITÀ valevole in questa rimane ancora valido, la classe (C') non è certamente quella optimum.* Infatti i teoremi di esistenza saranno sicuramente conservati o addirittura ampliati.

Ora, ciò è proprio quanto avviene nel caso in esame, e precisamente per il problema relativo alla equazione (1), *nella classe (C_1) delle funzioni $z(x, y)$ Lipschitziane nel complesso delle due variabili, un teorema di unicITÀ è valevole in un opportuno campo.* Il compito dei paragrafi seguenti sarà quello di dare un enunciato preciso e la prova di questo fatto. Qui vogliamo fare osservare che la scelta di (C_1) è stata fatta per puri motivi di semplicità di dimostrazione, il fatto stesso rimanendo verosimilmente vero anche in classi ancora più ampie; probabilmente addirittura nella classe delle funzioni assolutamente continue.

È nostra convinzione che sia proprio quest'ultima classe che fornisca l'ambiente naturale per lo studio delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

2. Sia $f(x, y, z, q)$ una funzione reale definita per $\xi \leq x < \xi + r$, (con $r > 0$); $y_1 \leq y \leq y_2$, z e q qualunque e supponiamo che $z_1(x, y)$ e $z_2(x, y)$ siano due soluzioni dell'equazione (1), cioè:

$$(3) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = f\left[x, y, z_1(x, y), \frac{\partial z_1}{\partial y}\right], \quad \xi \leq x < \xi + r,$$

$$(4) \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = f\left[x, y, z_2(x, y), \frac{\partial z_2}{\partial y}\right], \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

con :

$$(5) \quad z_1(\xi, y) = z_2(\xi, y) = \omega(y),$$

dove $\omega(y)$ sia una funzione continua e derivabile per $y_1 \leq y \leq y_2$. Supponiamo che la funzione $f(x, y, z, q)$ sia Lipschitziana rispetto a z e q . In altre parole:

$$(6) \quad |f(x, y, z', q') - f(x, y, z'', q'')| \leq M |z' - z''| + N |q' - q''|.$$

Dalle (3) e (4) si ottiene:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_2}{\partial x} = f\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) - f\left(x, y, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial y}\right),$$

e per la (6):

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_2}{\partial x} \right| \leq M |z_1 - z_2| + N \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_2}{\partial y} \right|,$$

e se poniamo:

$$z_1(x, y) - z_2(x, y) = u(x, y),$$

abbiamo:

$$(7) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq M |u(x, y)| + N \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|,$$

e facendo uso della (5) si ha pure:

$$(8) \quad u(\xi, y) = 0.$$

Introduciamo ora l'ipotesi che le due soluzioni z_1 e z_2 siano lipschitziane con costante L . La funzione $u(x, y)$ risulterà pure essa lipschitziana, ma con costante $2L$. Faremo nel seguito vedere che in un opportuno campo le (7) e (8) implicano $u(x, y) \equiv 0$, e dunque le due soluzioni coincidono. Per far ciò premetteremo un lemma.

3. LEMMA. — Sia $u(x, y)$ definita in $Q \equiv (a, b; c, d)$ e Lipschitziana con costante M ; le sue derivate parziali siano tali che:

$$(i) \quad u_x(x, y) > k,$$

oppure

$$(ii) \quad u_y(x, y) > k,$$

per un qualche $k > 0$ fissato e per (x, y) in Q , eccetto un insieme E di misura superficiale nulla. Sia inoltre $u(x, y) \equiv 0$ sulla diagonale D di Q che congiunge i vertici (a, d) e (b, c) . E allora $u(x, y) \equiv 0$ su ogni punto di quello dei due triangoli, che indichiamo con T , nel quale Q viene suddiviso da D e che si trova al disotto di D .

$u(x, y)$ essendo Lipschitziana sia rispetto a x quanto rispetto a y , essa ammette derivate parziali rispetto a x e a y quasi ovunque in Q .

Preso un $\delta > 0$, possiamo costruire un plurintervallo $D_x = \Sigma_i (a_i, b_i)$ sull'asse delle x , e un plurintervallo $D_y = \Sigma_j (c_j, d_j)$ sull'asse delle y , entrambi di lunghezza complessiva minore di δ , tale che ogni parallela all'asse y (o all'asse x) che non abbia punti a comune con D_x (oppure con D_y) contenga al più un insieme di misura lineare nulla di punti di E .

Sia ora (\bar{x}, \bar{y}) un punto di T non appartenente a $\Delta = (D_x \times 1 + D_y \times 1)$ (chiaramente Δ rappresenta quelle striscie di T che si proiettano su D_x e su D_y).

Supponiamo che (\bar{x}, \bar{y}) non appartenga a E ; allora (i) oppure (ii) sarà vera; nel caso di (i), esisterà un $\sigma > 0$, tale che:

$$(9) \quad u(x, \bar{y}) > u(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{per} \quad \bar{x} < x < \bar{x} + \sigma,$$

nel caso di (ii) esiste un $\sigma' > 0$, tale che:

$$(10) \quad u(\bar{x}, y) > u(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{per} \quad \bar{y} < y < \bar{y} + \sigma'.$$

Se $P \equiv (\bar{x} + \sigma, \bar{y})$ [oppure $P' \equiv (\bar{x}, \bar{y} + \sigma')]$ non è su Δ , esisterà un punto $\bar{P} \equiv (\bar{x} + \theta\sigma, \bar{y})$ [oppure $\bar{P}' \equiv (\bar{x}, \bar{y} + \theta\sigma')]$, con θ comunque vicino a uno, che non appartiene a E , poichè sulle parallele $y = \bar{y}$ (oppure $x = \bar{x}$) i punti di E formano un insieme di misura lineare nulla. Nel caso che entrambe (i) e (ii) sono possibili, sceglieremo (i) onde togliere qualsiasi ambiguità al procedimento.

Si continui questa costruzione indefinitamente se possibile. Se $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ è un punto di accumulazione di punti tali che \bar{P} (o \bar{P}') e non sia su Δ , si prende un punto $P^* \equiv (x_0, y^*)$ così vicino a P_0 , ma oltre, in modo che non sia nè su Δ nè su E (e ciò è possibile) e tale che:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) < u(x_0, y^*);$$

ciò è possibile in virtù delle (9) e (10), che sono disuguaglianze in senso stretto, e della continuità di $u(x, y)$. Il procedimento si può così continuare.

Se il punto d'accumulazione P_0 è su Δ , per esempio, $x_0 \in (a_i, b_i)$ oppure $y_0 \in (c_j, d_j)$, come anche nel caso non ancora considerato che \bar{P} sia su Δ , si consideri un punto (x_1, y_1) non appartenente a Δ e di coordinate:

$$x_1 = x_0 + t \quad \text{con} \quad \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (d_j - c_j)^2} < t < |b_i - a_i| + |d_j - c_j|,$$

$$y_1 = y_0 + t + \eta \quad \text{e} \quad \eta \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Possiamo evidentemente fare sempre in modo che (x_1, y_1) sia un punto non appartenente a E .

Abbiamo, ovviamente:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) < u(x_1, y_1) + 2M[(b_i - a_i) + (d_j - c_j)].$$

Si osservi che, così, il procedimento conduce a raggiungere la diagonale D in un punto $A \equiv (x_2, y_2)$, e si ha:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) < u(x_2, y_2) + 2M\delta = 2M\delta.$$

Siccome δ può essere scelto piccolo a piacere si ha:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0.$$

A cagione della continuità di $u(x, y)$ si ottiene $u(x, y) \leq 0$ in tutto T .

4. TEOREMA. - Sia $u(x, y)$ definita in una regione R delimitata dalle linee:

$$y = \frac{1}{M} \cdot (x - x_0) \quad , \quad y = -\frac{1}{M} \cdot (x - x_0) \quad , \quad y = a > 0,$$

$u(x, y)$ sia inoltre lipschitziana con costante A e soddisfacente inoltre alla disuguaglianza:

$$(11) \quad |u_y| \leq M |u_x| + N |u(x, y)|,$$

e verifichi la:

$$(12) \quad u(x, 0) = 0.$$

La funzione $u(x, y)$ è allora identicamente nulla sulla regione R .

Supporremo per semplicità in tutto il resto $M = 1$, le cose non venendo alterate minimamente da questa assunzione.

Per un teorema di Rademacher (7), $u(x, y)$ ammette differenziale totale nel senso di Stolz quasi ovunque in R . Poniamo:

$$v(x, y) = |u(x, y)|.$$

Anche $v(x, y)$ è differenziabile quasi ovunque in R ed è evidentemente:

$$|v_x| = |u_x| \quad ; \quad |v_y| = |u_y|,$$

conseguentemente la (11) vale pure per la $v(x, y)$, e così pure la (12). Sia ora ε un numero positivo arbitrario e consideriamo in R la funzione:

$$\vartheta(x, y) = e^{-y} \cdot v(x, y) + \varepsilon y,$$

è chiaro che:

$$\vartheta(x, 0) = 0,$$

e che $\vartheta(x, y)$ è Lipschitziana e quindi differenziabile quasi ovunque in R . Per tanto esistono quasi ovunque le derivate parziali di $\vartheta(x, y)$ lungo le direzioni $(-1, -1)$ e $(1, -1)$, che verranno indicate con le notazioni ben ovvie:

$$D \swarrow \vartheta(x, y) \quad \text{e} \quad D \searrow \vartheta(x, y),$$

quasi ovunque in R , le quali saranno espresse dalle relazioni:

$$(13) \quad D \swarrow \vartheta(x, y) = -e^{-y} [v_x + v_y - v] + \varepsilon.$$

$$(14) \quad D \searrow \vartheta(x, y) = -e^{-y} [-v_x + v_y - v] + \varepsilon.$$

Ora dalla (11) scritta nel modo seguente:

$$|v_y| - |v_x| - |v| \leq 0,$$

ossia pure

$$(15) \quad v_y - |v_x| - v \leq 0,$$

si ottiene, se $v_x \leq 0$,

$$v_y + v_x - v \leq 0,$$

cosicchè la (13) diventa:

$$(16) \quad D \swarrow \vartheta(x, y) \geq \varepsilon.$$

Se invece $v_x > 0$, la (15) si scriverebbe:

$$v_y - v_x - v \leq 0,$$

(7) H. RADEMACHER, *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen*. Part. I: «Math. Annalen», vol. 79; part. II: «Math. Annalen», vol. 81.

e la (14) darebbe:

$$(17) \quad D \nabla \varphi(x, y) > \varepsilon.$$

In definitiva abbiamo che o la relazione (16) o la relazione (17) è valida quasi ovunque in R . Applicando ora il lemma precedente (con la ben ovvia accortezza di eseguire una rotazione degli assi), risulta:

$$e^{-\gamma} v(x, y) \equiv 0$$

e quindi $u(x, y) \equiv 0$.

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione. — È chiaro che la disuguaglianza (11) non è indispensabile sia verificata in tutto R , bastando la sua validità quasi ovunque. Questo fatto si ripercuote sul teorema d'unicità che segue.

Riassumendo i risultati sin ad ora ottenuti si ottiene il seguente teorema:

Un'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo (1) con la condizione iniziale (1') il cui secondo membro soddisfa alla condizione di Lipschitz (6) non può ammettere due diverse soluzioni Lipschitziane in un campo R convenientemente scelto, anche se per soluzione si intenda funzioni che soddisfano (1) solo quasi ovunque.

Analisi. — *Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari.* Nota (*) di ROBERTO CONTI, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Sia dato il sistema di equazioni integrali lineari

$$(S) \quad x = x^0 + \int_{t_0}^t \{ [A(\tau) + B(\tau)] x + a + b(\tau) \} d\tau,$$

dove t è la variabile indipendente, reale, non negativa, t_0 un valore di t , e dove x è il vettore incognito,

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

sono vettori costanti,

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

è un vettore funzione di t , limitata e quasi continua, ed infine

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_{1,1}(t) & \dots & b_{1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1}(t) & \dots & b_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

sono matrici di ordine n , funzioni di t , limitate e quasi continue.

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1951.

Tutte le quantità indicate, ad eccezione di t , possono assumere valori reali o complessi.

Comunque si scelgano il vettore costante x^0 ed il numero $t_0 \geq 0$ esiste per $t \geq t_0$ una ed una sola soluzione di (S), cioè uno ed un solo vettore continuo (anzi assolutamente continuo) soddisfacente per ogni $t \geq t_0$ il sistema (S).

Se tutte le soluzioni, corrispondenti alle possibili coppie x^0, t_0 , restano limitate per $t \geq t_0$ diremo brevemente che il sistema (S) è limitato.

Ammessi che sia limitato il « sistema ridotto »

$$(S_0) \quad y = x^0 + \int_{t_0}^t \{ A(\tau) y + a \} d\tau,$$

quali condizioni si possono aggiungere affinché anche (S) risulti limitato?

Una risposta di grande generalità è stata data da D. Caligo⁽¹⁾ nel caso che a sia il vettore nullo.

Precisamente, se definiamo la matrice $Y(t)$ mediante la

$$(1) \quad Y(t) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) Y(\tau) d\tau, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e indichiamo con $\|C\|$ la somma dei moduli degli elementi della matrice (o del vettore) C , il risultato di D. Caligo si può enunciare come segue:

A_0 Se (S_0) è limitato, anche (S) è limitato purché esistano tre costanti L, M, N , positive, tali da aversi

$$(a) \quad \|Y(t) Y^{-1}(\tau)\| \leq L, \quad t, \tau \geq t_0,$$

$$(b) \quad \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \leq M, \quad t \geq t_0,$$

$$(c) \quad \int_{t_0}^t \|b(\tau)\| d\tau \leq N, \quad t \geq t_0,$$

ed inoltre sia

$$(d) \quad a = 0 \quad (\text{o vettore nullo}).$$

Questo teorema ha dato luogo recentemente ad alcune interessanti osservazioni di G. Ascoli⁽²⁾; nella presente Nota daremo qualche altro complemento in un diverso ordine di idee.

Proveremo anzitutto (n. 2) che:

A) La tesi di A_0 sussiste anche sopprimendo la condizione (d), cioè qualunque sia in (S) ed in (S_0) il vettore a .

(1) D. CALIGO, *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali lineari*. « Atti del 2° Congr. U. M. I. », Bologna, 177-185 (1940).

(2) G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, Nota I, questi « Rend. » (8), 9, 129-134 (1950₂).

Indi proveremo (n. 4) che :

B) La tesi di A_0 sussiste se si sopprime la condizione (d) e si sostituiscono le condizioni (b') e (c) con le seguenti

$$(b') \quad \left\| \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau \right\| \leq M_1, \quad t \geq t_0,$$

$$(c') \quad \int_{t_0}^t \| B(\tau) y_\omega + b(\tau) \| d\tau \leq N_1, \quad t \geq t_0,$$

dove

$$y_\omega = \int_{t_0}^t \{ A(\tau) y_\omega + a \} d\tau,$$

e si aggiungono le condizioni

$$(p_1) \quad A(t) B(t) = B(t) A(t), \quad t \geq t_0,$$

$$(p_2) \quad B(t) \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau B(t), \quad t \geq t_0.$$

L'enunciato B risulterebbe di portata più vasta di quello di A se fosse possibile sopprimere le due ultime condizioni (p_1) , (p_2) ; poichè ciò non è in generale, come mostrano opportuni esempi (n. 3), si conclude che A e B sono due criteri di stabilità aventi un campo di applicabilità diverso.

2. Osserviamo anzitutto che nell'enunciato A_0 la condizione (a) assicura che (S_0) è limitato; infatti essendo $Y^{-1}(t_0) = I$ se vale la (a) è anche

$$\| Y(t) \| = \| Y(t) Y^{-1}(t_0) \| \leq L, \quad t \geq t_0$$

quindi Y ed anche Yx^0 è limitato, ma questo vettore, se (a) è nullo, rappresenta la soluzione di (S_0) . Ciò premesso proviamo il teorema A.

Se a non è nullo per ogni soluzione x di (S) si consideri il vettore

$$\bar{x} = x - y_\omega, \quad y_\omega = \int_{t_0}^t \{ A(\tau) y_\omega + a \} d\tau;$$

si ottiene allora

$$\bar{x}' = x^0 + \int_{t_0}^t \{ [A(\tau) + B(\tau)] \bar{x} + \bar{b}(\tau) \} d\tau$$

con $\bar{b}(t) = B(t) y_\omega + b(t)$.

Il vettore y_ω è limitato per ipotesi, il vettore \bar{x} lo è (per il teorema A_0 ed in virtù dell'osservazione fatta in principio) se valgono la (a), la (b) e la

$$(2) \quad \int_{t_0}^t \| \bar{b}(\tau) \| d\tau \leq \bar{N}, \quad t \geq t_0$$

con \bar{N} costante positiva. Ma avendosi

$$\int_{t_0}^t \|\bar{b}(\tau)\| d\tau \leq \max_{t \geq t_0} \|y_0\| \int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^t \|b(\tau)\| d\tau,$$

la (2) è soddisfatta se valgono le (b) e (c). Dunque $x = \bar{x} + y_0$ è limitato ed il teorema A è dimostrato.

Facciamone un'applicazione.

In una nota ricerca sul comportamento per $t \rightarrow \infty$ delle soluzioni di un sistema differenziale lineare, L. Cesari⁽³⁾ ha dato un criterio di stabilità che possiamo enunciare così:

« Se $A(t)$ è costante ed ammette la matrice inversa A^{-1} , e se valgono le condizioni (a), (b) e (c), il sistema (S) è limitato qualunque sia il vettore a ».

Ora se A è costante la (a) è condizione necessaria e sufficiente affinché siano limitate le soluzioni del sistema

$$\dot{y} = A\bar{y}, \quad (\dot{\bar{y}} = d\bar{y}/dt).$$

Se y è la soluzione di (S_0) o, in termini differenziali, di

$$\dot{y} = Ay + a, \quad y(t_0) = x^0,$$

e si pone $z = Ay + a$, si ha $\dot{z} = A\dot{y} = A(Ay + a) = Az$ perciò z è limitato. D'altronde se esiste A^{-1} , come si è supposto, anche $y = A^{-1}(z - a)$ sarà limitato.

Dunque l'esistenza di A^{-1} e la validità di (a) sono condizioni sufficienti perchè (S_0) sia limitato, ma poichè l'esistenza di A^{-1} non è necessaria segue che il teorema A enunciato per il caso di $A(t)$ costante è alquanto più generale del criterio di L. Cesari sopra citato.

3. Se $n = 1$, cioè se i sistemi (S), (S_0) constano ciascuno di una sola equazione, è subito visto che la limitatezza di (S) si può ottenere da quella di (S_0) sotto condizioni assai più larghe delle (b), (c).

Infatti, se $n = 1$, si ha

$$Y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}, \quad (n = 1),$$

e, detta y_0 la soluzione dell'equazione (S_0) corrispondente ad $y^0 = 0$, la soluzione x dell'equazione (S) corrispondente al dato x^0 si può scrivere

$$(3) \quad x = y_0 + e^{\int_{t_0}^t B(\tau) d\tau} \left\{ Y(t) x^0 + \int_{t_0}^t Y(t) Y^{-1}(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} B(\theta) d\theta} [B(\tau) y_0 + b(\tau)] d\tau \right\}.$$

(3) L. CESARI, *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie*. « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma » (4), 3, 171-193, teor. IX (1940).

La verifica è immediata se si tiene presente che è

$$y_{\omega} = \int_{t_0}^t Y(t) Y^{-1}(\tau) d\tau.$$

Amnesso che la (S_0) sia limitata e che valga la (a), dalla (3) risulta evidente che x è limitata anche se in luogo delle (b), (c) si impongono le condizioni meno restrittive

$$(b') \quad \left\| \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau \right\| \leq M_1, \quad t \geq t_0,$$

$$(c') \quad \int_{t_0}^t \|B(\tau) y_{\omega} + b(\tau)\| d\tau \leq N_1, \quad t \geq t_0,$$

dove nel caso attuale ($n = 1$) il simbolo $\|C\|$ indica semplicemente il modulo del numero C .

È possibile un'estensione del genere se $n > 1$? La risposta, in generale, è negativa, già per $n = 2$, e perfino se $A(t)$ è costante ed a e $b(t)$ sono nulli, come risulta dal seguente esempio (4). Se si pone

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2 \sin 2t}{t} & -\frac{\sin^2 2t}{4t^2} \end{pmatrix}, \quad a = b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le condizioni (b') e (c') sono soddisfatte; così pure la (a), essendo

$$Y(t) Y^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Tuttavia la soluzione del corrispondente sistema (S) è data da

$$x = \begin{pmatrix} x_1^0 \frac{\cos t}{\cos t_0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\cos^2 \tau}{\tau} d\tau} \\ x_1 \left(\frac{\cos^2 t}{t} - \operatorname{tg} t \right) \end{pmatrix}$$

e pertanto se $x_1^0 \neq 0$ essa non è limitata.

Dunque non è possibile, se $n > 1$, la sostituzione pura e semplice delle (b'), (c') alle (b), (c) nell'enunciato del teorema A); tale sostituzione tuttavia diventa possibile, come ora mostreremo, se si aggiungono altre condizioni, che per $n = 1$ sono sempre soddisfatte.

(4) Questo esempio si può ricavare dal teorema a p. 394 dell'articolo di A. WINTNER, *The adiabatic linear oscillator*. «Am. Journ. of Math.», 68, 385-397 (1946).

4. Definita la matrice $X(t)$ mediante la

$$X(t) = I + \int_{t_0}^t \{A(\tau) + B(\tau)\} X(\tau) d\tau$$

si verifica facilmente che per ogni x^0 la soluzione di (S) può scriversi

$$x = y_0 + X(t) x^0 + \int_{t_0}^t X(t) X^{-1}(\tau) [B(\tau) y_0 + b(\tau)] d\tau$$

dove, ancora, è

$$y_0 = \int_{t_0}^t \{A(\tau) y_0 + a\} d\tau.$$

Perciò se (S_0) è limitato e se vale la (c') del numero precedente (scritta, s'intende, per $n \geq 1$), è sufficiente affinché $\|x\|$ sia limitata che esista una costante $L_1 > 0$ tale da aversi

$$(a') \quad \|X(t) X^{-1}(\tau)\| \leq L_1, \quad t, \tau \geq t_0.$$

Ammettiamo ora (e sono queste le condizioni cui si accenna alla fine del numero precedente) che le matrici $A(t)$ e $B(t)$ siano permutabili:

$$(p_1) \quad A(t) B(t) = B(t) A(t), \quad t \geq t_0,$$

e che la $B(t)$ sia permutabile con la propria matrice integrale

$$(p_2) \quad B(t) \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau B(t), \quad t \geq t_0,$$

In queste ipotesi si ha

$$X(t) = Y(t) e^{\int_{t_0}^t B(\tau) d\tau},$$

dove $Y(t)$ è la matrice definita dalla (1); perciò

$$\|X(t) X^{-1}(\tau)\| \leq \|Y(t) Y^{-1}(\tau)\| e^{\int_{t_0}^t B(\tau) d\tau} e^{-\int_{t_0}^{\tau} B(\tau) d\tau}.$$

Avendosi, qualunque sia la matrice Z

$$\|e^{\pm Z}\| \leq \|I\| + \frac{\|Z\|}{1!} + \frac{\|Z\|^2}{2!} + \dots = n - 1 + e^{\|Z\|}$$

basterà, affinché sia verificata la (a') , che valgano la (a) e la (b') , quest'ultima intesa naturalmente, per $n \geq 1$.

Si ottiene in tal modo il criterio B enunciato nel numero 1.

Geometria. — *Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli.* Nota^(*) di **ERMANNO MARCHIONNA**, presentata dal Corrisp. **OSCAR CHISINI**.

I. INTRODUZIONE. — Le questioni relative all'esistenza delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione sono state analizzate, con considerazioni di carattere topologico e grupale, in un primo tempo da Enriques e più tardi da Zariski⁽¹⁾.

Tuttavia le ricerche di questi Autori non hanno esaurito l'argomento, il quale andava esaminato a fondo anche da un altro interessante punto di vista: quello algebrico proiettivo.

Un'effettiva caratterizzazione in questo senso delle curve di diramazione dei piani multipli ha inizio con la memoria di Beniamino Segre dedicata a quei particolari piani n -pli che sono proiezioni di una superficie generale d'ordine n da un punto generico⁽²⁾.

Tale caratterizzazione è stata ottenuta verificando sostanzialmente che una curva piana è di diramazione qualora sia dotata di un certo numero di nodi e di cuspidi che soddisfino due determinate relazioni funzionali.

La dimostrazione data da Segre è notevole per la sua semplicità ed eleganza; va però rilevato che ciò è dovuto in parte alla possibilità, singolarmente fortunata, di eliminare di colpo l'ostacolo fondamentale del problema in virtù di un teorema d'Halphen, il quale permette di riconoscere quando una curva piana, d'ordine $\mu\nu$, è proiezione di una curva gobba intersezione completa di due superficie generali d'ordini μ e ν .

Al lavoro di Segre è seguito lo studio, da parte di vari Autori⁽³⁾, delle curve di diramazione dei piani tripli e quadrupli che sono proiezioni di opportune superficie da determinati punti multipli di queste.

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1951.

(1) F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*. «Ann. di Mat.», ser. IV, vol. I (1923); O. ZARISKI, *On the Problem of Existence of Algebraic Functions of two variables possessing a given Branch Curve*. «Amer. Journ. of Math.», vol. LI (1929). L'indirizzo di questi Autori è stato ripreso e sviluppato nel campo delle funzioni di r variabili da F. SEVERI in *Le varietà multiple diramate e il loro teorema di esistenza*. «Mem. de Mat. del Inst. Jorge Juan», n. 4 (1946).

(2) B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*. «Mem. R. Acc. d'Italia», vol. I (1930).

(3) Citiamo qui alcuni dei lavori sull'argomento maggiormente legati alla presente Nota: G. POMPILJ, *Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli*. «Rend. Sem. Univ. Roma», ser. IV, vol. III (1939); O. CHISINI e C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*. «Ann. di Mat.», ser. IV, t. XXV (1946), t. XXVI (1947); C. F. MANARA, *Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*. «Boll. U. M. I.», ser. III, anno II, n. 2 (1947); G. MASOTTI BIGGIOGERO, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. 81 (1948); G. POMPILJ, *Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli*. «Rend. di Mat. e delle sue appl.», ser. V, vol. VII (1948). Per completezza citiamo anche due lavori aventi indirizzo diverso dal nostro: G. ZAPPA, *Caratterizzazione delle curve di diramazione delle rigate*. «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova» (1942); G. POMPILJ, *Su una classe di piani multipli rigati*. «Rend. di Mat. e delle sue applicazioni» (1946).

Tale studio, condotto generalmente appoggiandosi alle proprietà dei discriminanti delle equazioni di terzo e quarto grado, risulta alquanto più complicato di quello svolto da Segre, il che è abbastanza ovvio qualora si pensi che in esso intervengono curve gobbe dotate di punti multipli, le cui proprietà sono assai poco note.

Particolarmente interessante tra i lavori dedicati ad argomenti del genere è quello di O. Chisini⁽⁴⁾ relativo ai piani quadrupli nel cosiddetto caso semplice (piani che sono proiezioni di superficie d'ordine $4 + v$ da un loro punto v -plo e del resto generali).

In esso l'autore ha messo in viva luce i punti fondamentali del problema trattato ed ha espresso l'opinione che i procedimenti adoperati potessero servire a caratterizzare tutti i piani n -pli (sempre nel caso semplice).

Tuttavia lo stesso autore era convinto che tale caratterizzazione si sarebbe ottenuta molto agevolmente per la via già seguita da Segre, purchè si riuscisse a superarne la difficoltà essenziale, che consiste nell'estendere il teorema d'Halphen, relativo a curve gobbe intersezioni complete di due superficie, al caso in cui queste abbiano un punto multiplo in comune.

Seguendo il convincimento di Chisini ho affrontato tale questione in due miei lavori^{(5) (6)}; ho così potuto presentare in una Nota successiva⁽⁷⁾ delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione per un piano multiplo (nel caso semplice).

La loro dimostrazione s'impenna sull'estensione del teorema d'Halphen; in essa intervengono però anche le dimensioni di alcune serie lineari sopra una curva gobba intersezione completa e dotata di un punto multiplo.

La forma delle suindicate condizioni è del tutto analoga a quella delle condizioni date da Chisini per i piani quadrupli; esse consistono in sostanza nell'assegnare, oltre il numero dei nodi e delle cuspidi della curva di diramazione φ , tre relazioni funzionali cui devono soddisfare determinati gruppi di punti della φ .

Nella mia trattazione (come del resto in quella di Chisini e di altri Autori) figurava quindi una condizione in più rispetto alla trattazione di Segre, la qual cosa mi era sembrata abbastanza naturale per la presenza di un elemento in più: il punto singolare della superficie da cui proviene per proiezione il piano multiplo.

Tuttavia un ulteriore esame del problema mi ha permesso di ridurre il numero delle menzionate condizioni funzionali e di raggiungere una caratterizzazione più significativa delle curve di diramazione dei piani multipli (nel caso semplice).

Di tale nuova caratterizzazione è oggetto la presente Nota.

(4) Cfr. O. CHISINI, *Dimostrazione delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione per un piano quadruplo*. «Ann. di Mat.», ser. IV, t. XXIX (1949).

(5) Cfr. E. MARCHIONNA, *Estensione di un teorema d'Halphen (relativo a curve gobbe intersezioni complete)*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. 83 (1950).

(6) Cfr. E. MARCHIONNA, *Sull'intersezione di due superficie aventi un punto multiplo in comune*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. 83 (1950).

(7) Cfr. E. MARCHIONNA, *Condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione per un piano multiplo*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. 83 (1950).

2. I risultati da dimostrare si compendiano nel seguente

TEOREMA. - Una curva piana φ_n è di diramazione per un piano multiplo d'ordine $\mu - h \geq 3$ del tipo semplice (proiezione di una superficie d'ordine μ da un suo punto h -plo e del resto generale), quando il suo ordine n ed i numeri δ e k dei suoi nodi e delle sue cuspidi soddisfino alle relazioni aritmetiche

$$\begin{cases} n = \mu(\mu - 1) - r & \text{con } r = h(h + 1) \\ \delta = \frac{1}{2}n[(\mu - 2)(\mu - 3) - r] - 2r(\mu - h - 3) \\ k = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) - h(h + 1)(h + 2) \end{cases}$$

ed inoltre siano soddisfatte le seguenti relazioni funzionali di equivalenza

$$(1) \quad R + T \equiv Z$$

$$(2) \quad 2K + N' \equiv [(\mu - 1)(\mu - 2) - r]R - (2\mu - 2h - 4)T$$

ove R indica un gruppo di punti di φ_n allineati, T un gruppo non virtuale di $r = h(h + 1)$ punti semplici, Z un gruppo di punti tutti diversi dai punti T , K il gruppo delle cuspidi, N' il gruppo dei nodi considerati ciascuno su entrambi i rami di φ_n che vi passano.

3. È abbastanza facile verificare che le condizioni espresse dal teorema sono necessarie.

Infatti se la curva φ_n è di diramazione per un piano $(\mu - h)$ -plo, del tipo semplice, essa è proiezione di una curva gobba φ^* intersezione completa di una superficie A d'ordine μ , dotata di un punto h -plo nel centro di proiezione O , e della polare B di O rispetto ad A .

La φ^* ha ordine $\mu(\mu - 1)$ e passa per O con molteplicità $r = h(h + 1)$.

Indichiamo ora con T il gruppo delle tracce, sul piano della φ_n , delle tangenti alla φ^* nel punto O : i gruppi tagliati su φ^* dai piani per O e dai piani generici si proiettano in gruppi della φ_n appartenenti alle serie $|R|$ ed $|R + T|$ ⁽⁸⁾.

Poichè quest'ultima ha almeno dimensione 3, resta giustificata la (1).

Si può poi dimostrare facilmente che le superficie d'ordine $m = 2\mu - 5$, passanti per O con molteplicità $s = 2h - 1$, tagliano su φ^* gruppi canonici ⁽⁹⁾.

Ora ciò equivale ad affermare che la serie canonica di φ_n è la serie $|mR + (m - s)T|$, il che permette di giustificare la relazione (2) e di determinare il numero complessivo $\delta + k$ dei punti doppi della φ_n .

(8) In base a questa nomenclatura si può dire che i gruppi della serie segata su φ^* dalle superficie d'ordine p passanti per O con molteplicità q si proiettano su φ_n in gruppi della serie $|pR + (p - q)T|$.

(9) A tale scopo si osservi che la B è una superficie d'ordine $\mu - 1$ avente in O un punto h -plo ed il medesimo cono osculatore della A , e che, di conseguenza, la φ^* può ritenersi intersezione completa della B e di una superficie \bar{A} d'ordine μ avente in O un punto $(h + 1)$ -plo. Pertanto si può affermare che le superficie d'ordine $m = \mu + (\mu - 1) - 4$, passanti per O con molteplicità $s = h + (h + 1) - 2$, tagliano su φ^* gruppi canonici. (cfr. la Nota citata in (5)).

A questo punto facciamo osservare, per quanto ciò non sia necessario per la nostra trattazione, che il verificarsi di entrambe le relazioni (1) e (2) è del tutto equivalente all'esistenza delle due seguenti curve covarianti della φ_n :

a) un'aggiunta p_l d'ordine $l = (\mu - 1)(\mu - 2) - r$ passante per il gruppo $(m - s)T$ (avente cioè in ogni punto T intersezione $(m - s)$ -punta con φ_n);

b) un'aggiunta p_{l+1} d'ordine $l + 1$ passante per il gruppo $(m - s - 1)T$ e non spezzata nella p_l e in una retta.

Resta ora da determinare il numero k delle cuspidi K . Esso viene subito valutato tenendo conto che le cuspidi della φ_n sono proiezioni dei punti K^* , intersezioni (fuori di O) della φ^* e della superficie B' polare di O rispetto a B ; dopo di che è ovvia anche la determinazione del numero δ dei nodi.

Facciamo infine notare che l'osservazione precedente e la (2) permettono di scrivere le relazioni

$$(3) \quad K \equiv (\mu - 2)R + (\mu - k - 4)T$$

$$(4) \quad N' \equiv [(\mu - 2)(\mu - 3) - r]R - 4(\mu - k - 3)T$$

le quali sostituivano la (2) nella mia trattazione citata in (7)⁽¹⁰⁾.

4. La verifica della sufficienza delle condizioni espresse dal teorema è naturalmente meno semplice. Essa si ottiene attraverso due gruppi di proposizioni dei quali il primo permette sostanzialmente di riconoscere la φ_n come proiezione di una curva φ^* , la quale appartiene ad una superficie B dell'ordine $\mu - 1$ e ad ∞^4 superficie A di ordine μ , ed il secondo porta a concludere che la B è polare del centro di proiezione rispetto ad una superficie A .

5. Passiamo dunque al primo gruppo di proposizioni preliminari, identiche a quelle contenute nella mia precedente trattazione.

La relazione (1) implica che la serie $|R + T|$ sia sprovvista di punti fissi ed abbia dimensione 3 almeno⁽¹¹⁾. Ciò porta al

LEMMA I. — *La φ_n è proiezione di una curva gobba φ^* d'ordine $\mu(\mu - 1)$ la quale passa con molteplicità $h(h + 1)$ per il centro di proiezione O . I punti T sono le tracce, sul piano della φ_n , delle tangenti alla φ^* nel punto O .*

(10) Nel caso dei piani doppi si ha:

$$\mu - k = 2, \quad r = (\mu - 1)(\mu - 2), \quad n = 2(\mu - 1), \quad \delta = k = 0.$$

Inoltre la (2) perde significato, mentre la (3) acquista la forma

$$(2') \quad (\mu - 2)R \equiv 2T.$$

Com'è noto le relazioni (2') ed (1) caratterizzano le curve di diramazione dei piani doppi del nostro tipo. Si osservi tra l'altro che il verificarsi delle suindicate relazioni è del tutto equivalente all'esistenza delle seguenti curve covarianti della φ_n :

a) una curva d'ordine $\mu - 2$ tangente alla φ_n in ciascun punto T ;

b) una curva d'ordine $\mu - 1$ passante semplicemente per i punti T .

(11) Nella Nota citata in (7) ho mostrato che tale serie ha dimensione uguale a 3.

Ciò posto passiamo al

LEMMA II. - *Le superficie $\Phi_m^{(s)}$, d'ordine $m = \mu + (\mu - 1) - 4$, passanti per O con molteplicità $s = h + (h + 1) - 2$ tagliano su φ^* gruppi canonici.*

Osserviamo che i gruppi segati su φ^* dalle $\Phi_m^{(s)}$ si proiettano su φ_n in gruppi della serie $|(2\mu - 5)R + (2\mu - 2h - 4)T|$ e verifichiamo che questa è la serie canonica di φ_n .

A tale scopo notiamo che sulla φ_n le aggiunte ψ_{n-3} , d'ordine $n - 3$ tagliano fuori dei punti doppi gruppi canonici. Ne segue che se indichiamo con G uno di questi gruppi si ha

$$G \equiv (n - 3)R - 2K - N'$$

e ricordando la (2)

$$G \equiv (2\mu - 5)R + (2\mu - 2h - 4)T,$$

il che prova l'asserto.

I due lemmi suindicati e la mia estensione del teorema d'Halphen⁽¹²⁾ portano al seguente fondamentale

TEOREMA III. - *La φ^* è intersezione completa di due superficie \bar{A}_μ e $B_{\mu-1}$, degli ordini μ e $\mu - 1$ ed è perciò curva base per il sistema Σ_4 delle ∞^4 superficie $A_\mu = \bar{A}_\mu + Q_1$, $B_{\mu-1}$ (ove Q_1 è un piano generico). Queste hanno generalmente in O un punto h -plo ed il medesimo cono osculatore; la molteplicità in O della superficie $B_{\mu-1}$ non è inferiore ad h e non supera $h + 1$.*

Per semplicità indicheremo nel seguito con B la superficie $B_{\mu-1}$ e con A una generica superficie irriducibile del sistema Σ_4 . Indicheremo poi con una lettera maiuscola tanto una superficie quanto il polinomio in xyz che uguagliato a zero ne fornisce l'equazione. Con una lettera minuscola, contrassegnata da un indice j , indicheremo tanto un polinomio in xy di grado j quanto la curva del piano xy ed il cilindro (con vertice nel punto improprio dell'asse z), la cui equazione si ottiene uguagliando a zero il polinomio stesso. Porremo inoltre, per comodità, il centro di proiezione O nel punto improprio Z_∞ dell'asse z .

(12) Diamo qui l'enunciato dell'estensione suddetta:

«Sia φ^* una curva gobba d'ordine $\mu\nu$ ($\mu \geq \nu$) con un punto h -plo O, sulla quale le superficie $\Phi_m^{(s)}$ d'ordine $m = \mu + \nu - 4$, passanti per O con molteplicità $s = h + h - 2$, taglino gruppi canonici.

La φ^* risulta intersezione completa di due superficie \bar{A}_μ e B_ν , degli ordini μ e ν , ed è quindi curva base per il sistema Σ di superficie $A_\mu = \bar{A}_\mu + Q_{\mu-\nu}B_\nu$ (ove $Q_{\mu-\nu}$ è una generica superficie d'ordine $\mu - \nu$).

La molteplicità in O della superficie B_ν è compresa fra h e h , quella delle generiche superficie di Σ è uguale al minore dei due numeri suddetti.

Qualora questi due numeri siano diversi le generiche superficie di Σ hanno in O almeno il medesimo cono osculatore ».

Il teorema suindicato è stato enunciato in questa forma nella Nota citata in (6); la sua dimostrazione però è in sostanza contenuta nella Nota indicata in (5) ed è stata dedotta partendo dalla proiezione della φ^* da un punto generico.

Nel nostro caso i numeri ν e h dell'enunciato sono rispettivamente uguali ai numeri $\mu - 1$ ed $h + 1$.

6. Presentiamo ora la parte nuova della ricerca in cui dimostriamo, sulla base della terza relazione aritmetica del nostro enunciato e senza far ricorso alla dimensione di serie lineari, che la curva φ^* è intersezione completa di una particolare superficie di Σ_4 , che indicheremo con F , e della polare di O rispetto ad essa, che coincide ovviamente con la B , unica superficie d'ordine $\mu - 1$ contenente $\varphi^{*(13)}$.

Per rendere chiara la dimostrazione, vediamo anzitutto quali condizioni devono essere soddisfatte affinché esista una F del tipo indicato. Poiché questa contiene la curva φ^* , intersezione completa di una superficie A e della superficie B , deve sussistere, per il teorema dell' $Af + B\varphi$ spaziale, la relazione

$$(5) \quad F = A + (q_0 z + q_1) B.$$

Pertanto se indichiamo con F', A', B' le derivate dei polinomi F, A, B rispetto a z , e quindi anche le polari di Z_∞ rispetto alle superficie F, A, B , si avrà

$$F' = A' + q_0 B + (q_0 z + q_1) B'.$$

Se la superficie F' coincide con la B (precisamente se è $F' = \lambda_0 B$), si ha

$$(6) \quad A' = (\lambda_0 - q_0) B - (q_0 z + q_1) B'.$$

Ciò equivale a dire che la superficie A' deve contenere la curva Γ comune a B e B' .

Viceversa se si verifica quest'ultimo fatto si può scrivere la (6), e di conseguenza la superficie F d'equazione (5) è tale che la polare F' di Z_∞ rispetto ad essa coincide con la B ⁽¹⁴⁾.

Pertanto la dimostrazione del nostro teorema si riduce a provare che la superficie A' contiene Γ .

7. Supponiamo dapprima che la Γ sia irriducibile, nel qual caso la dimostrazione è immediata; per ottenerla osserviamo che:

a) La polare di Z_∞ rispetto alla superficie B è una superficie B' d'ordine $\mu - 2$, la quale ha in Z_∞ un punto h -plo almeno, col medesimo cono osculatore della B , e come la B passa per i k punti K^* della φ^* che si proiettano nelle cuspidi K della φ_n .

La curva Γ intersezione di B e B' ha ordine $(\mu - 1)(\mu - 2)$, passa per Z_∞ con molteplicità $h(h + 1)$ almeno, e contiene ovviamente tutti i punti K^* .

b) La polare di Z_∞ rispetto ad una generica superficie irriducibile A di Σ_4 è una superficie A' d'ordine $\mu - 1$, la quale ha in Z_∞ un punto h -plo col medesimo cono osculatore della A (le generatrici del quale hanno in Z_∞ $h + 1$ intersezioni riunite con B e di conseguenza anche con B').

(13) In ciò m'accosto ad un procedimento dimostrativo contenuto nella Nota di B. SEGRE citata in (2), sebbene gli sviluppi che qui compaiono siano alquanto più delicati per la presenza di un punto singolare della φ^* nel centro di proiezione.

(14) Il dubbio critico che la F' così determinata sia identicamente nulla si elimina notando che: la F non può essere identicamente nulla in quanto la superficie A (irriducibile) non contiene B ; inoltre la F non può essere un cono con vertice in Z_∞ poiché in caso contrario la φ^* avrebbe in Z_∞ molteplicità maggiore di $h(h + 1)$.

c) Le intersezioni di A' e Γ raccolte in Z_∞ in dipendenza dalle loro molteplicità e dal loro contatto sono almeno $h(h+1)^2$; inoltre la A' passa come la superficie A (che contiene φ^*) per tutti i h punti K^* .

Ne segue che le intersezioni di A' con Γ superano certamente il numero $(\mu-1)^2(\mu-2)$ e che pertanto la A' contiene Γ .

8. L'ipotesi che la curva Γ sia irriducibile, per quanto attendibile, non può ritenersi vera a priori. Occorre quindi dimostrare il teorema anche nel caso in cui si lasci cadere l'ipotesi suddetta.

La dimostrazione che A' contiene Γ , cioè ciascuna sua componente γ , è relativamente complessa, anche perchè occorre distinguere le due ipotesi: che la molteplicità di B in Z_∞ sia h (come in realtà) oppure $h+1$ (come a posteriori risulterà impossibile).

Supponiamo dunque dapprima che B abbia in Z_∞ molteplicità h ; l'altra ipotesi verrà analizzata nel numero successivo.

La dimostrazione risulterà dalle seguenti considerazioni:

d) Esiste un sistema ∞^3 di superficie H che, fuori di Z_∞ , hanno in comune con Γ solo i punti K^* . Queste superficie H si ottengono come segue.

Entro il sistema ∞^4 di superficie A si consideri la generica superficie S che ha Z_∞ come multiplo d'ordine $h+1$. Queste superficie S formano ovviamente un sistema ∞^3 .

Fissata ora una generica S (non spezzata in B ed in un piano per Z_∞)⁽¹⁵⁾ si consideri il sistema lineare delle ∞^4 superficie

$$S + (c_0 z + c_1) S' \quad (S' \text{ polare di } Z_\infty \text{ rispetto ad } S)$$

le quali si segano a coppie lungo una curva fissa C , intersezione di S ed S' , ed una curva piana variabile V .

Entro il sistema considerato (le cui superficie hanno in Z_∞ lo stesso cono osculatore) esiste un sistema lineare ∞^3 di superficie H aventi in Z_∞ la molteplicità $h+2$. Queste superficie H si segano a coppie nella C suddetta ed in una residua curva piana V , per la quale può essere ovviamente fissata ad arbitrio una retta spaziale che le debba essere complanare.

Segue che una componente γ di Γ non può essere contenuta in C (in quanto S taglia B solo lungo la curva irriducibile φ^*) e neppure in una V generica e quindi nemmeno in una H generica.

D'altra parte è evidente che le H contengono i punti K^* e che tagliano la Γ , fuori di Z_∞ , esattamente in

$$\mu(\mu-1)(\mu-2) - h(h+1)(h+2) = k$$

punti, cioè proprio solo nei punti K^* .

e) Sopra una componente γ di Γ che abbia l'ordine v e la molteplicità p (in Z_∞) si hanno

$$k_\gamma = v\mu - p(h+2)$$

(15) Le superficie S così spezzate sono soltanto ∞^2 .

punti K^* (tagliati dalla generica H). Questo fatto è un'immediata conseguenza della d).

f) Ogni componente γ non può essere una retta per Z_∞ , cioè per essa è $v > p$.

Infatti, in caso opposto, poichè essa appartiene a B avrebbe come traccia sul piano della φ_n un punto multiplo, per φ_n , secondo $\mu - h - 1$, cioè in generale almeno triplo (contro l'ipotesi che φ_n abbia solo nodi e cuspidi)⁽¹⁶⁾.

g) Concludiamo ora (sempre nell'ipotesi che la molteplicità di B in Z_∞ sia uguale ad h) che la superficie A' contiene ogni componente γ di Γ .

Infatti la A' taglia γ in Z_∞ , contato $p(h + 1)$ volte, e nei k_γ punti K^* , cioè, essendo ora

$$k_\gamma = v\mu - p(h + 2) \quad \text{e} \quad v > p$$

complessivamente in più di $v(\mu - 1)$ punti. Quindi A' contiene γ .

9. Resta infine da considerare l'ipotesi che B abbia molteplicità $h + 1$ in Z_∞ .

In questa ipotesi la Γ passerebbe per Z_∞ con la molteplicità $(h + 1)(h + 2)$ e quindi avrebbe in comune con la A , fuori di Z_∞ , solo i punti K^* (come nell'ipotesi precedente si vede che A non può contenere nessuna γ).

Segue che su ciascuna componente γ (di ordine v e di molteplicità p in Z_∞) ci sono ora

$$k_\gamma = \mu v - h p$$

punti K^* . Per questi passa la A' , che così viene ad avere troppe intersezioni con γ , e quindi la contiene.

Abbiamo così provato anche in questa ipotesi l'esistenza di una superficie F di Σ_4 , tale che la polare di Z_∞ rispetto ad essa coincida con la B ; ma ciò è manifestamente assurdo in quanto la F ha in Z_∞ un punto h -plo e la B un punto $(h + 1)$ -plo! Ne segue che la B passa effettivamente per Z_∞ con molteplicità h .

10. OSSERVAZIONE. — Conclusa la dimostrazione del nostro enunciato, facciamo notare che tutti i piani multipli diramati dalla φ_n (per i quali le singolarità della φ_n sono essenziali) sono birazionalmente identici. Questo fatto è stato enunciato e dimostrato da Chisini nella Nota citata in (4).

(16) Nel caso dei piani tripli si ha $\mu - h = 3$ e pertanto la traccia della retta γ sul piano della φ_n dovrebbe risultare soltanto un punto doppio di φ_n . Si potrebbe tuttavia dimostrare che tale traccia coincide con un punto T , il che contraddice all'ipotesi che tutti i punti T siano semplici per φ_n .

Dalla coposcenza: dei semiassi ρ_t e ρ_n , dell'angolo α che la normale all'asse geometrico dell'asta forma con l'asse della Y (ved. fig. 2) e delle coordinate $x_0 y_0$ del baricentro del tronco, possiamo risalire alla determinazione, nel sistema di assi O (X Y), delle ascisse dei punti A, B, C dalle quali scaturiscono tutte le grandezze occorrenti per la determinazione dei coefficienti delle equazioni risolutive.

Sieno nel sistema di assi O (X Y):

$x_{cy'} y_{cy'}$ le coordinate di $C_{y'}$ centro relativo all'asse Y'

$x_{cx} y_{cx}$ le coordinate di C_x centro relativo all'asse X.

Sono note le espressioni delle coordinate degli stessi centri nei sistemi di assi $o(tn), o(xy)$:

centro $C_{y'}$ relativo ad Y':

nel sistema $o(tn)$:

$$(43) \quad \begin{cases} t = \frac{\rho_t^2}{x_o'} \cdot \cos \alpha = \zeta^2 \cdot \rho_n^2 \cdot \frac{1}{x_o'} \cdot \cos \alpha \\ n = \frac{\rho_n^2}{x_o'} \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

nel sistema $o(xy)$:

$$(44) \quad \begin{cases} (x_{cy'})' = t \cdot \cos \alpha + n \cdot \sin \alpha = \frac{1}{x_o'} \cdot \rho_n^2 \cdot (\zeta^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ (y_{cy'})' = -t \cdot \sin \alpha + n \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{x_o'} \cdot \rho_n^2 \cdot (\zeta^2 - 1) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

centro relativo ad X:

nel sistema $o(tn)$:

$$(45) \quad \begin{cases} t = -\frac{\rho_t^2}{y_o} \cdot \sin \alpha = -\zeta^2 \cdot \frac{\rho_n^2}{y_o} \cdot \sin \alpha \\ n = +\frac{\rho_n^2}{y_o} \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

nel sistema $o(xy)$:

$$(46) \quad \begin{cases} (x_{cx})' = t \cdot \cos \alpha + n \cdot \sin \alpha = -\frac{\rho_n^2}{y_o} \cdot (\zeta^2 - 1) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ (y_{cx})' = -t \cdot \sin \alpha + n \cdot \cos \alpha = \frac{\rho_n^2}{y_o} \cdot (\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \end{cases}$$

Osserviamo ora che la direzione dei due diametri coniugati rispettivamente agli assi X ed Y' formano nel sistema di assi $o(xy)$ rispettivamente un angolo δ e β con l'asse Y le cui tangenti definite dalle coordinate dei centri relativi rispettivi sono pure il rapporto fra le componenti le rotazioni distese sugli stessi diametri secondo gli assi X Y; per cui, con le solite notazioni, riferite ora al tronco elementare, avremo:

$$(48) \quad \begin{aligned} \tan \beta &= \frac{(x_{cy'})'}{(y_{cy'})'} = + \frac{\Delta \Gamma_x^x}{\Delta \Gamma_y^x} = - \frac{\Delta R_x^x}{\Delta R_y^x} \\ \tan \delta &= \frac{(x_{cx})'}{(y_{cx})'} = + \frac{\Delta \Gamma_x^y}{\Delta \Gamma_y^y} = - \frac{\Delta R_y^x}{\Delta R_y^y} \end{aligned}$$

per cui l'ascissa di B sarà:

$$x_{y'} = x_0 - y_0 \cdot \tan \delta = x_0 + y_0 \cdot \frac{\Delta R_y^x}{\Delta R_y^y} = \frac{x_0 \cdot \Delta R_y^y + y_0 \cdot \Delta R_y^x}{\Delta R_y^y}$$

e quella di A:

$$x_x = x_0 - y_0 \cdot \tan \beta = x_0 + y_0 \cdot \frac{\Delta R_x^x}{\Delta R_y^x} = \frac{x_0 \cdot \Delta R_y^x + y_0 \cdot \Delta R_x^x}{\Delta R_y^x}$$

Dalle quali scaturiscono:

$$(49) \quad \begin{cases} S_y^0 = \Sigma \Delta S_y^0 = \Sigma x_{y'} \cdot \Delta R_y^y = \Sigma (x_0 \cdot \Delta R_y^y + y_0 \cdot \Delta R_y^x) \\ S_y^x = \Sigma \Delta S_y^x = \Sigma x_{y'}' \cdot \Delta R_y^y = \Sigma (x_0' \cdot \Delta R_y^y + y_0 \cdot \Delta R_y^x) \end{cases}$$

$$(50) \quad \begin{cases} S_x^0 = \Sigma \Delta S_x^0 = \Sigma x_x \cdot \Delta R_y^x = \Sigma (x_0 \cdot \Delta R_y^x + y_0 \cdot \Delta R_x^x) \\ S_x^x = \Sigma \Delta S_x^x = \Sigma x_x' \cdot \Delta R_y^x = \Sigma (x_0' \cdot \Delta R_y^x + y_0 \cdot \Delta R_x^x) \end{cases}$$

La retta antipolare di T passante per C_x e $C_{y'}$ dei quali conosciamo le coordinate nel sistema $o(x, y)$ ed intorno alla quale avviene la rotazione $\Delta \Gamma^x$ incontra l'asse x in un punto D di ascissa:

$$(51) \quad (x_{xy'})' = \frac{(y_{cy'})' \cdot (x_{cx})' - (x_{cy'})' \cdot (y_{cx})'}{(y_{cy'})' - (y_{cx})'}$$

La tangente dell'angolo ϵ che la rotazione $\Delta \Gamma^x$ forma con l'asse delle y è:

$$\tan \epsilon = \frac{(x_{cy'})' - (x_{cx})'}{(y_{cy'})' - (y_{cx})'} = \frac{\Delta \Gamma_x^x}{\Delta \Gamma_y^x} = \frac{\Delta R_x^x}{\Delta R_y^x} = - \frac{x_x' \cdot \Delta R_y^x}{x_{y'}' \cdot \Delta R_y^y} = - \frac{\Delta S_x^x}{\Delta S_y^x}$$

essendo ΔS_x^x e ΔS_y^x le componenti di detta rotazione rispettivamente secondo gli assi X, Y.

Per cui:

$$x_{xy'}' = x_0' - y_0 \cdot \tan \epsilon + (x_{xy'})' = \frac{x_0' \cdot \Delta S_y^x + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x}{\Delta S_y^x}$$

quindi:

$$(52) \quad \mathfrak{J}^x = \Sigma \Delta \mathfrak{J}^x = \Sigma x_{xy'}' \cdot \Delta S_y^x = \Sigma [x_0' \cdot \Delta S_y^x + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x]$$

Ricordando le (1) avremo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{0x} &= \Sigma \Delta \mathfrak{J}^{0x} = \Sigma S_y^x \cdot l + \Sigma \Delta \mathfrak{J}^x = \Sigma \Delta S_y^x \cdot (l + x_{xy'}') = \Sigma \Delta S_y^x \cdot \left(l + \frac{x_0' \cdot \Delta S_y^x + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x}{\Delta S_y^x} \right) \\ &= \Sigma [\Delta S_y^x \cdot (l + x_0') + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x] \end{aligned}$$

per cui:

$$(53) \quad \mathfrak{J}^{0x} = \Sigma [x_0 \cdot \Delta S_y^x + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x]$$

$$\mathfrak{J}^0 = \Sigma \Delta \mathfrak{J}^0 = \Sigma (\Delta \mathfrak{J}^{0x} + l \cdot \Delta S_x^0) = \Sigma [x_0 \cdot \Delta S_y^0 + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x + l \cdot \Delta S_y^0]$$

ed essendo:

$$x_0 \cdot \Delta S_y^x + l \cdot \Delta S_y^0 = x_0 \cdot \Delta S_y^0$$

$$(54) \quad \mathfrak{J}^0 = \Sigma [x_0 \cdot \Delta S_y^0 + y_0 \cdot \Delta S_x^x + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^x]$$

12. Dell'interpretazione del terzo coefficiente che compare nelle espressioni dei momenti di II grado diremo in seguito; notiamo ora che i termini che entrano nella composizione dei coefficienti delle equazioni risolutive sono tutti funzione delle componenti secondo gli assi XY delle rotazioni dovute a coppie di asse-momento μ_x^T e μ_y^T unitari, la determinazione delle quali può eseguirsi in due maniere; la più diretta consiste nel decomporre ciascuna delle due coppie secondo la tangente e la normale all'asse geometrico nel baricentro del tronco elementare; trovare in dipendenza la grandezza delle rotazioni di asse t ed n della sezione terminale dell'elemento e riproiettare questa sopra gli assi XY .

Tuttavia per costanza metodica riferiamoci ancora al Ricci; nella Memoria citata le grandezze dei semi-assi dell'ellisse di elasticità trasversale disposti secondo la tangente e la normale nel baricentro del tronco elementare si dimostra essere le seguenti:

$$(55) \quad \rho_t = \sqrt{\frac{\Delta^2 s}{12} + \chi \frac{E \mathfrak{J}_n}{G \Omega}} \quad (56) \quad \rho_n = \rho_t \cdot \sqrt{\frac{4G}{E \alpha \cdot (1 + \mathfrak{J}_n / \mathfrak{J}_t)}}$$

ove: Ω è l'area della sezione trasversale dell'asta;

\mathfrak{J}_x ed \mathfrak{J}_n i momenti d'inerzia della sezione Ω rispetto agli assi principali disposti rispettivamente secondo x e secondo n ;

E, G i noti moduli di elasticità a tensione normale ed a tensione tangenziale;

χ ed α coefficienti numerici dipendenti dalla forma della sezione e relativi rispettivamente alle sollecitazioni di taglio e di torsione;

per $G = 2/5 \cdot E$ e se si trascurano le deformazioni dovute al taglio le (55) (56) si riducono alle:

$$(57) \quad \rho_t = \frac{\Delta s}{\sqrt{12}} \quad (58) \quad \rho_n = \rho_t \cdot \sqrt{\frac{8}{5 \alpha \cdot (1 + \mathfrak{J}_n / \mathfrak{J}_t)}}$$

e quindi

$$(59) \quad \zeta = \frac{\rho_t}{\rho_n} = \sqrt{\frac{5}{8} \alpha (1 + \mathfrak{J}_n / \mathfrak{J}_t)}.$$

Si definisce inoltre come peso elastico trasversale del tronco di lunghezza Δ_s , l'inverso dell'abbassamento della sezione terminale a causa della forza $F_s = 1$ applicata nel proprio baricentro ed avente per espressione:

$$(60) \quad \Delta_g = \frac{12 \cdot E \mathfrak{J}_n}{\Delta_s^3}$$

e si dimostra che la grandezza della rotazione intorno al diametro coniugato alla traccia sul piano π di una coppia di asse-momento qualunque è dato dalla:

$$(61) \quad \Gamma = \frac{\mathfrak{M}_c}{\Delta_g \rho_c^2}$$

dove \mathfrak{M}_c è la componente secondo l'asse di rotazione della coppia agente e ρ_c è l'antiproiezione del semidiametro dell'ellisse di elasticità trasversale parallelo alla direzione della traccia del piano della coppia agente su l'asse stesso di rotazione.

Ora nel sistema di assi cartesiani $o(tn)$ rispetto ai quali la ellisse di elasticità trasversale ha per equazione:

$$\frac{t^2}{\rho_t^2} + \frac{n^2}{\rho_n^2} = 1$$

l'espressione della grandezza di un semidiametro qualunque formante con l'asse delle n un angolo γ è:

$$\rho = \rho_t \cdot \rho_n \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \gamma}{\rho_n^2 \cdot \tan^2 \gamma + \rho_t^2}}$$

ed essendo $\rho_t = \zeta \rho_n$:

$$\rho = \rho_t \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 \cdot \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}}$$

Quindi sugli assi x ed y del sistema cartesiano $o(xy)$ i semidiametri della ellisse di elasticità trasversale saranno rispettivamente:

$$(62) \quad \rho_x = \rho_t \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} \quad (63) \quad \rho_y = \rho_t \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}$$

13. Tenendo quindi presente l'espressioni delle rotazioni prodotte dalla μ_x^T e μ_y^T e la (61) abbiamo:

$$\Delta \Gamma^x = -\mu_x^T \cdot \Delta R^x = -\frac{\sin \beta \cdot \mu_x^T}{\Delta g \cdot \rho_y^2 \cdot \sin^2 \beta} = -\frac{\mu_x^T}{\Delta g \cdot \rho_y^2 \cdot \sin \beta}$$

$$\Delta \Gamma^y = -\mu_y^T \cdot \Delta R^y = -\frac{\cos \delta \cdot \mu_y^T}{\Delta g \cdot \rho_x^2 \cdot \cos^2 \delta} = -\frac{\mu_y^T}{\Delta g \cdot \rho_x^2 \cdot \cos \delta}$$

le proiezioni delle quali sugli assi $o(xy)$ o sugli assi $O(XY)$ sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Gamma_x^x = -\mu_x^T \cdot \Delta R_x^x = \Delta \Gamma^x \cdot \sin \beta = -\frac{\mu_x^T}{\Delta g \cdot \rho_y^2} \\ \Delta \Gamma_y^x = +\mu_x^T \cdot \Delta R_y^x = \Delta \Gamma^x \cdot \cos \beta = -\frac{\mu_x^T}{\Delta g \cdot \rho_y^2} \cdot \frac{1}{\tan \beta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Gamma_x^y = +\mu_y^T \cdot \Delta R_x^y = \Delta \Gamma^y \cdot \sin \delta = -\frac{\mu_y^T}{\Delta g \cdot \rho_x^2} \cdot \tan \delta \\ \Delta \Gamma_y^y = -\mu_y^T \cdot \Delta R_y^y = \Delta \Gamma^y \cdot \cos \delta = -\frac{\mu_y^T}{\Delta g \cdot \rho_x^2} \end{array} \right.$$

quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta R_x^x = +\frac{1}{\Delta g \cdot \rho_y^2} \\ \Delta R_y^x = -\frac{1}{\Delta g \cdot \rho_y^2} \cdot \frac{1}{\tan \beta} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta R_y^y = -\frac{1}{\Delta g \cdot \rho_x^2} \cdot \tan \delta \\ \Delta R_x^y = +\frac{1}{\Delta g \cdot \rho_x^2} \end{array} \right.$$

Sostituendo in queste i valori dati dalle (47) (48) che ricordando le (44) (46) diventano:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{(\zeta^2 - 1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad \operatorname{tg} \delta = - \frac{(\zeta^2 - 1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

e tenendo presenti le (57) (60) (62) (63) avremo:

$$(64) \quad \begin{cases} \Delta R_x^* = (\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ \Delta R_y^* = (\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ \Delta R_y^* = \Delta R_x^* = (\zeta^2 - 1) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \end{cases}$$

$$(65) \quad \begin{cases} R_x^* = \Sigma \cdot (\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ R_y^* = \Sigma \cdot (\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ R_y^* = R_x^* = \Sigma \cdot (\zeta^2 - 1) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \end{cases}$$

14. Consideriamo ora l'espressione dello spostamento lineare di T, per F^T applicata in T, per la elasticità di un tronco elementare:

$$(66) \quad \delta_T = -F_z^T \cdot \Delta \vartheta^T = -F_z^T \Sigma x'_{xy'} \cdot \Delta S_y^T = -F_z^T \Sigma [x'_o \cdot \Delta S_y^T + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^T] = \\ = -F_z^T [x'_o \cdot \Delta S_y^T + y_o \cdot \Delta S_x^T + (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^T]$$

il terzo termine della quale e cioè $(x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^T$ ci dà l'abbassamento di o nella rotazione Γ^T applicata in D.

Se immaginiamo ora di trasportare la F_z^T nel baricentro o del tronco elementare, questo si troverà sollecitato dalle coppie $M_y^o = F_z^T \cdot x'_o$ e $M_x^o = -F_z^T \cdot y_o$ (gli assi-momento delle quali sono rispettivamente l'asse y e l'asse x , per o), e dalla F_z^T applicata in o .

Gli assi di rotazione per M_y^o e M_x^o saranno ancora quelli relativi al caso prima considerato nel quale il tronco è sollecitato dalle coppie μ_y^T, μ_x^T ; si manterranno quindi inalterati i valori di ΔS_y^T e di ΔS_x^T .

Pertanto la (66) potrà scriversi:

$$\delta_T = - \{ [-M_x^o \cdot \Delta S_x^T + M_y^o \cdot \Delta S_y^T] + F_z^T \cdot (x_{xy'})' \cdot \Delta S_y^T \}.$$

Il termine chiuso entro la parentesi quadra ci rappresenta evidentemente, ricordando l'equazioni di deformazioni della sezione T lo spostamento lineare di T in direzione di z dovuto al momento di trasporto di F_z^T da T in o ; il secondo termine ci dà lo spostamento di T a causa della F_z^T applicata nel baricentro o del tronco elementare, uguale d'altra parte allo spostamento subito dalla sezione terminale del tronco elementare al quale T, si ritiene rigidamente

collegato. Cioè a dire, per la definizione stessa che il Ricci dà del peso elastico trasversale, il coefficiente di F_z^T non è che il peso elastico trasversale del tronco.

Infatti se in base alla (64) esprimiamo le (44) (46) in funzione delle ΔR ottenendo:

$$\begin{cases} (x_{cy})' = + \frac{\bar{\rho}_n^2}{x_o'} \cdot \Delta R_x^x \frac{E \mathfrak{J}_n}{\Delta s} \\ (y_{cy})' = - \frac{\bar{\rho}_n^2}{x_o'} \cdot \Delta R_y^x \frac{E \mathfrak{J}_n}{\Delta s} \end{cases} \quad \begin{cases} (x_{cx})' = - \frac{\bar{\rho}_n^2}{y_o} \cdot \Delta R_y^x \frac{E \mathfrak{J}_n}{\Delta s} \\ (y_{cx})' = + \frac{\bar{\rho}_n^2}{y_o} \cdot \Delta R_y^y \frac{E \mathfrak{J}_n}{\Delta s} \end{cases}$$

e le sostituiamo nella (51) questa si trasforma nella:

$$(x_{xy})' = - \frac{\bar{\rho}_n^2}{\rho_n} \cdot \frac{\Delta R_y^x - \Delta R_x^x \cdot \Delta R_y^x}{y_o \cdot R_x^x + x_o' \cdot R_y^x} \cdot \frac{E \mathfrak{J}_n}{\Delta s} = - \frac{\bar{\rho}_n^2}{\rho_n} \cdot \frac{\Delta R_y^x - \Delta R_x^x \cdot \Delta R_y^x}{\Delta S_y^T} \cdot \frac{\Delta s}{E \mathfrak{J}_n}.$$

Quindi:

$$(x_{xy})' \cdot \Delta S_y^T = - \frac{\bar{\rho}_n^2}{\rho_n} \cdot (\Delta R_y^x - \Delta R_x^x \cdot \Delta R_y^x) \cdot \frac{\Delta s}{E \mathfrak{J}_n}$$

ma per le (64)

$$\begin{aligned} \Delta R_y^x - \Delta R_x^x \cdot \Delta R_y^x &= (\zeta^2 - 1)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \\ &- (\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot (\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = - \zeta^2 \end{aligned}$$

quindi:

$$(67) \quad (x_{xy})' \cdot \Delta S_y^T = \frac{\bar{\rho}_n^2}{\rho_n} \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \mathfrak{J}_n} = \frac{\bar{\rho}_n^2}{\rho_n} \cdot \frac{\Delta s}{E \mathfrak{J}_n} = \frac{\Delta^3 s}{12 \cdot E \mathfrak{J}_n} = \frac{1}{\Delta g} = \Delta S.$$

15. Cosicchè le (52) (53) (54) potranno scriversi nel seguente modo:

$$\mathfrak{J}^T = \Sigma \left(x_o' \cdot \Delta S_y^T + y_o \cdot \Delta S_x^T + \frac{1}{\Delta g} \right)$$

$$\mathfrak{J}^{OT} = \Sigma \left(x_o \cdot \Delta S_y^T + y_o \cdot \Delta S_x^T + \frac{1}{\Delta g} \right)$$

$$\mathfrak{J}^O = \Sigma \left(x_o \cdot \Delta S_y^O + y_o \cdot \Delta S_x^T + \frac{1}{\Delta g} \right).$$

dalle quali sostituendo le (49) (50) abbiamo:

$$(68) \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^T = \Sigma \left(x_o'^2 \cdot \Delta R_y^y + \bar{y}_o^2 \cdot \Delta R_x^x + 2 \cdot x_o' \cdot y_o \cdot \Delta R_y^x + \frac{1}{\Delta g} \right) \\ \mathfrak{J}^{OT} = \Sigma \left(x_o \cdot x_o' \cdot \Delta R_y^y + \bar{y}_o^2 \cdot \Delta R_x^x + y_o \cdot (x_o + x_o') \cdot \Delta R_y^x + \frac{1}{\Delta g} \right) \\ \mathfrak{J}^O = \Sigma \left(x_o^2 \cdot \Delta R_y^y + \bar{y}_o^2 \cdot \Delta R_x^x + 2 \cdot x_o \cdot y_o \cdot \Delta R_y^x + \frac{1}{\Delta g} \right). \end{cases}$$

Qualora l'asta presentasse caratteristiche tali da poter rendere possibili e convenienti le integrazioni, nelle (49) (50) (68) (dopo avervi sostituite le (64)), basterà sostituire ds a Δs e procedere alle relative integrazioni; tenendo presente che nelle (68) sparisce per la (67) il termine $1/\Delta g$. Il trascurare tale termine nelle sommatorie significa in fondo trascurare lo spostamento della rotazione Γ_z^T

dal baricentro o in D ; ora se è vero che ciò in pratica in genere non ha grande importanza tanto da rendere più che giustificato tale omissione, d'altra parte risulta chiaro quanto il tenerne conto sia affatto oneroso.

15. Nel caso di asta simmetrica, detta M la sezione di mezzeria dell'asta OT è facile vedere come le (65) (49) (50) (68) si riducono alle:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^z = 2 \sum_0^M \cdot (\zeta^2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ R_y^z = 2 \sum_0^M \cdot (\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ R_x^z = R_y^z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_y^o = -S_y^r = l \cdot \sum_0^M \cdot \Delta R_y^z \\ S_x^o = +S_x^r = - \sum_0^M \cdot (l - 2x_o) \cdot \Delta R_y^z + 2 \sum_0^M \cdot y_o \cdot \Delta R_x^z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta^o = \vartheta^r = \sum_0^M \left\{ [l^2 - 2x_o(l - x_o)] \cdot \Delta R_y^z + 2y_o^2 \cdot \Delta R_x^z + 2y_o \cdot (l - 2x_o) \cdot \Delta R_y^z + 2 \frac{1}{\Delta g} \right\} \\ \vartheta^{or} = 2 \sum_0^M \cdot \left(x_o \cdot x_o' \cdot \Delta R_y^z + y_o^2 \cdot \Delta R_x^z + \frac{1}{\Delta g} \right). \end{array} \right.$$

Nel caso che l'asta degeneri in una retta sarà per ogni elemento Δs dell'asta $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$ quindi:

a) per asta retta dissimmetrica:

$$\begin{array}{lll} R_x^z = \Sigma \zeta^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} & R_y^z = \Sigma \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} & R_x^z = R_y^z = 0 \\ S_x^o = S_x^r = 0 & S_y^o = \Sigma \cdot x_o \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} & S_y^r = \Sigma \cdot x_o' \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ = \Sigma \cdot \left(x_o'^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} + \frac{1}{\Delta g} \right) & \vartheta^o = \Sigma \cdot \left(x_o^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} + \frac{1}{\Delta g} \right) & \vartheta^{or} = \Sigma \cdot \left(x_o \cdot x_o' \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} + \frac{1}{\Delta g} \right) \end{array}$$

b) per asta retta e simmetrica:

$$\begin{array}{lll} R_x^z = 2 \sum_0^M \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} & R_y^z = 2 \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} & S_y^o = -S_y^r = l \cdot \sum_0^M \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} \\ \vartheta^r = \vartheta^o = \sum_0^M \cdot \left[(\overline{x_o^2} + \overline{x_o'^2}) \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} + 2 \cdot \frac{1}{\Delta g} \right] & \vartheta^{or} = 2 \sum_0^M \cdot \left(x_o \cdot x_o' \cdot \frac{\Delta s}{E \vartheta_n} + \frac{1}{\Delta g} \right). \end{array}$$

Nel caso particolarissimo di asta retta a momento d'inerzia costante, passando dalle sommatorie agli integrali si ha notoriamente:

$$\begin{array}{lll} R_y^z = \zeta^2 \cdot \frac{l}{E \vartheta_n} & R_x^z = \frac{l}{E \vartheta_n} & S_y^o = -S_y^r = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{E \vartheta_n} \\ \vartheta^o = \vartheta^r = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{E \vartheta_n} & \vartheta^{or} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{E \vartheta_n} \end{array}$$

che sostituiti nei gruppi di equazioni (V) (VI), tenendo presente che :

$$K = \overline{\mathfrak{J}^0} - \overline{\mathfrak{J}^{0T}} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{l^3}{E \mathfrak{J}_n} \right)^2 \quad K' = \mathfrak{J}^0 + \mathfrak{J}^{0T} = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{E \mathfrak{J}_n}$$

$$L = \mathfrak{J}^0 - \mathfrak{J}^{0T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3}{E \mathfrak{J}_n} \quad N = \frac{2}{3} \cdot \frac{l^3}{E \mathfrak{J}_n}$$

le riduce alla nota forma: [ove $\psi = (\delta_s^T - \delta_s^0)/l$]

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_y^0 &= \mathfrak{N}_y^0 + \frac{2 E \mathfrak{J}_n}{l} \cdot (2 \cdot \rho_y^0 + \rho_y^T - 3 \psi) \\ \mu_y^T &= \mathfrak{N}_y^T - \frac{2 E \mathfrak{J}_n}{l} \cdot (\rho_y^0 + 2 \cdot \rho_y^T - 3 \psi) \\ \mu_x^T &= \mathfrak{N}_x^T - \frac{E \mathfrak{J}_n}{l \cdot \zeta^2} \cdot (\rho_x^T - \rho_x^0) \\ F_s^T &= \mathfrak{F}_s^T + \frac{6 \cdot E \mathfrak{J}_n}{l^2} \cdot (\rho_y^0 + \rho_y^T - 2 \psi) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} \mu_x^0 &= \mu_x^T - M_x^0 \\ F_s^0 &= F_s^T - F_s \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_y^0 &= - \frac{2 E \mathfrak{J}_n}{l} \cdot \left(\mathfrak{R}_y^T - 3 \cdot \frac{\Delta_s^T}{l} \right) - M_y \\ \mathfrak{N}_y^T &= + \frac{2 E \mathfrak{J}_n}{l} \cdot \left(2 \cdot \mathfrak{R}_y^T - 3 \cdot \frac{\Delta_s^T}{l} \right) \\ \mathfrak{N}_x^T &= + \frac{E \mathfrak{J}_n}{l \cdot \zeta^2} \cdot \mathfrak{R}_x^T \\ \mathfrak{F}_s^T &= - \frac{6 \cdot E \mathfrak{J}_n}{l^2} \cdot \left(\mathfrak{R}_y^T - 2 \cdot \frac{\Delta_s^T}{l} \right) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} \mathfrak{N}_x^0 &= \mathfrak{N}_x^T - M_x^0 \\ \mathfrak{F}_s^0 &= \mathfrak{F}_s^T - F_s \end{aligned}$$

Quanto alle grandezze \mathfrak{R}_x^T \mathfrak{R}_y^T Δ_s^T che compaiono nelle (II), detti per un elemento generico M_x M_y F_s , rispettivamente il momento baricentrico di asse x , quello di asse y , e la risultante delle F , per asta incastrata in O e libera in T, esse risultano ovviamente:

$$\mathfrak{R}_x^T = \Sigma \cdot (-M_x \cdot \Delta R_x^x + M_y \cdot \Delta R_y^x)$$

$$\mathfrak{R}_y^T = \Sigma \cdot (+M_x \cdot \Delta R_y^x - M_y \cdot \Delta R_y^y)$$

$$\Delta_s^T = \Sigma \cdot \left(+M_x \cdot \Delta S_x^T - M_y \cdot \Delta S_y^T - F_s \cdot \Sigma \frac{1}{\Delta_g} \right)$$

che nel caso di asta retta diventano:

$$\mathfrak{R}_x^T = \Sigma - M_x \cdot \zeta^2 \cdot \frac{\Delta_s}{E \mathfrak{J}_n}$$

$$\mathfrak{R}_y^T = \Sigma - M_y \cdot \frac{\Delta_s}{E \mathfrak{J}_n}$$

$$\Delta_s^T = - \Sigma \cdot \left(M_y \cdot x'_0 \cdot \frac{\Delta_s}{E \mathfrak{J}_n} + F_x \cdot \frac{1}{\Delta_g} \right) \cdot$$

Scienza delle Costruzioni. — *Discussione intorno al principio variazionale per la instabilità elastica.* Nota (*) di LIVIO NORZI, presentata dal Corrisp. G. ALBENGA.

La determinazione dei carichi critici nel problema della instabilità elastica per forze esterne invariabili si può ricondurre al calcolo del minimo valore di φ che annulla la variazione di energia totale $W = L + \varphi S$ per una generica deformazione D compatibile coi vincoli, L essendo l'energia competente alla D secondo la teoria lineare classica ed S l'energia «aggiunta» dovuta agli sforzi preesistenti.

Questo punto di vista è stato adottato in recenti lavori sia da chi scrive (1) che dal prof. W. Prager (2) il quale ha però assegnato ad S una espressione analitica diversa (3) che si presta all'obiezione di lasciar prevedere instabilità anche nel caso della trazione semplice uniforme, non essendo positiva per qualunque D .

Poichè la formula del prof. Prager compendia equazioni ritenute corrette anche da vari altri Autori, mi pare non inutile rilevare che l'origine del paradosso deve ricercarsi nel loro tentativo di ridurre il problema alla statica razionale mediante l'ipotesi dell'effetto puramente cinematico della rotazione rigida locale $\vec{\omega}$, ipotesi che non è accettabile al di fuori del campo strettamente lineare se $\vec{\omega}$ è variabile da punto a punto.

Tuttavia, riconoscendo l'opportunità di evitare discussioni che possano apparire sostanzialmente incerte senza l'appoggio del calcolo, riprenderò qui il problema a partire dai seguenti requisiti qualitativi cui deve soddisfare S e quindi la sua densità per unità di volume dS/dV :

1° essere un invariante lineare negli sforzi preesistenti ed equilibrati σ_{ij} e quadratico rispetto alle derivate degli spostamenti $u_{i,j}$;

2° mai negativo se tutti gli sforzi principali preesistenti sono positivi.

Per 1° si deve avere:

$$2 \frac{dS}{dV} = T \cdot (A_1 E_1^2 + A_2 E_2^2 + A_3 \omega^2) + \sigma_{ij} [A_4 \varepsilon_{pi} \varepsilon_{pj} + A_5 (\varepsilon_{pi} \omega_{pj} + \omega_{pi} \varepsilon_{pj}) + A_6 \omega_{pi} \omega_{pj}]$$

dove T è l'invariante lineare degli sforzi preesistenti, le A sono costanti numeriche; E_1, E_2 ed ω sono gli invarianti di 1° e 2° grado ed il modulo della rota-

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1951.

(1) L. NORZI, «Atti Acc. Scienze Torino», vol. 81-82, pp. 253-263 (1947).

(2) W. PRAGER, «Quart. of Appl. Math.», vol. 4, pp. 378-384 (1947).

(3) Continuo naturalmente ad usare le mie notazioni; S è indicata con H da HANDELMAN e WEISS, «Quart. of Appl. Math.», vol. 8, pp. 393-401 (1951) che hanno studiato le proprietà della forma del prof. Prager.

zione rigida locale della D che si descrive al solito col tensore simmetrico di componenti

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

e con quello antisimmetrico di componenti

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}).$$

Si noti che le teorie generali finora proposte per l'instabilità elastica hanno tutte $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ e si classificano secondo lo schema:

Autore	A_4	A_5	A_6
Trefftz (4)	1	1	1
Prager	0	1	1
Norzi	0	0	1

Ora si può subito osservare che deve porsi $A_3 = 0$ altrimenti si avrebbe variazione di energia per una rotazione d'insieme intorno all'asse di trazione nella trazione semplice.

Inoltre un facile calcolo proverebbe che i termini in A_4 sono minori in valore assoluto della massima tensione principale moltiplicata per $(E_1 - 2 E_2)$.

Quindi, finchè le σ_{ij} rimangono piccole rispetto al modulo di Young, i termini in A_1, A_2, A_4 sono trascurabili rispetto al lavoro di deformazione L .

D'altronde l'ipotesi che le σ_{ij} siano piccole rispetto al modulo elastico è imposta non solo dalle considerazioni pratiche che limitano l'applicabilità della nostra teoria ai sistemi sottili, ma anche dall'ignoranza delle leggi di variazione dei moduli elastici (plurale!) in funzione delle σ_{ij} stesse.

Invero tali variazioni contribuiscono alla energia totale con termini del tipo di quelli in A_1, A_2, A_4 la cui valutazione, dipendendo dalla struttura fina della materia, esula completamente da una teoria del continuo isotropo.

Si conclude così che conviene omettere in S questi piccoli termini di significato fisico incerto.

Incidentalmente noto poi taluni inconvenienti concettuali che essi producono anche quando le A sono, come nella citata teoria di Trefftz, scelte in modo da soddisfare i requisiti 1° e 2°.

Infatti quella teoria - basata in sostanza sull'equivoco di attribuire un significato geometrico semplice alle cosiddette componenti di deformazione non linearizzate (5) - porterebbe ad ammettere come condizione per la stabilità incondizionata la positività di tutte e tre le tensioni principali (e non solo delle due maggiori), il che è troppo restrittivo; e nel caso di una compressione uniforme

(4) E. TREFFTZ, «Zeitschr. f. Ang. Math. u. Mech.», vol. 13, pp. 160-165 (1933).

(5) Confronta, su questo punto: SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*. (Mac Graw & Hill 1946) Chap. I, Sect. 11.

preesistente molto elevata darebbe $(L + S)$ negativa anche per una D di accorciamento uniforme!

Ma uguagliate a zero le prime quattro A , occorre per 2° porre anche $A_5 = 0$ mentre $A_6 = 1$ risulta dalla condizione di ritrovare per S il lavoro delle piccole coppie da calcolare nel problema dell'equilibrio astatico per una rotazione rigida di insieme, cioè la trasformazione in integrale di volume di:

$$-\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_{\Gamma} \vec{P} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{A-O})) \cdot d\Gamma$$

(essendo \vec{P} la forza unitaria sulla superficie Γ nel punto variabile A ed O l'origine degli assi).

Il fatto, a tutta prima non intuitivo, della dipendenza di S dalla sola $\vec{\omega}$ si spiega facilmente osservando che il problema di elasticità sussiste in quanto il moto come corpo rigido è impedito dai vincoli e contano solo — come già accennato — le variazioni di $\vec{\omega}$ da punto a punto.

Nel caso particolare delle coazioni, è fisicamente evidente che deve essere, per una rotazione d'insieme, $S = 0$ e per questo occorre che sia nullo il valor medio di ciascuna componente di tensione; per verificare questa proprietà delle coazioni, suggerita dal nostro problema, basta moltiplicare per x oppure y oppure z le componenti di \vec{P} , tutte nulle su Γ , sommare e trasformare ancora in integrale di volume.

Generalizzando si potrebbe così dimostrare anche l'ortogonalità di σ_x ad una funzione di sola x , di τ_{xy} ad una funzione di sola x o di sola y , ecc.

Illustrato così da un nuovo punto di vista il principio variazionale, intendo ora esporre alcune osservazioni che completano l'impostazione formale del problema per quanto riguarda le condizioni al contorno.

Premetto che, se si considerano diverse D a partire da uno stesso stato di equilibrio elastostatico preesistente, *le energie aggiunte sono tra di loro reciproche*, nello stesso senso dei lavori di deformazione della teoria classica.

Ciò dipende dalla espressione quadratica di S rispetto alle $u_{i,j}$ e si può concretamente vedere ricordando che — definito il vettore $\vec{I} = 1/2 (T\vec{\omega} - \vec{\omega}\Phi_{\omega})$, ove $\vec{\Phi}_{\omega}$ è lo sforzo preesistente agente sull'elemento normale ad $\vec{\omega}$ — è:

$$S = \int_V \vec{I} \cdot \vec{\omega} dV.$$

Quindi, se $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ è lo spostamento di due D infinitesime sovrapposte, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

ed il principio di reciprocità per le energie aggiunte è riassunto nella identità, di facile verifica:

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{I}_2 \cdot \vec{\omega}_1.$$

Si può così scrivere:

$$S = S_{11} + 2 S_{12} + S_{22}$$

con:

$$S_{12} = S_{21}$$

e anche:

$$W_{12} = L_{12} + S_{12} = L_{21} + S_{21} = W_{21}.$$

Questa reciprocità permette di esprimere l'energia totale di una combinazione lineare a coefficienti costanti di spostamenti $\vec{s} = c_i \vec{s}_i$ nella forma canonica:

$$(a) \quad W = c_1^2 W_{11} + c_2^2 W_{22} + \dots + 2 c_1 c_2 W_{12} + \dots$$

e questa simmetria si riflette nella simmetria dei calcoli occorrenti per risolvere quei problemi a vincoli incerti che sono del massimo interesse pratico.

La questione è: sono sempre fisicamente attendibili i risultati ottenuti col procedimento ordinario di imporre tante condizioni di vincolo lineari ed omogenee quante sono le costanti arbitrarie disponibili negli integrali delle equazioni indefinite dell'equilibrio neutro, annullando poi il determinante dei coefficienti, oppure non si rischia così - e proprio nei problemi più complessi, in cui ci sono parecchie costanti mentre il comportamento dei vincoli è dubbio - di scegliere le condizioni... in modo da semplificare il calcolo, piuttosto che secondo il giusto criterio di sicurezza di esaminare soprattutto il caso più sfavorevole?

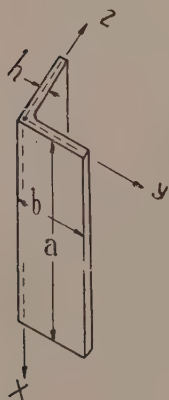


Fig. 1.

La risposta non può essere che per la seconda alternativa, ed il problema dei cilindri sottili compressi assialmente è già stato discusso come esempio ⁽⁶⁾.

Qui si nota che per la ricerca del caso più sfavorevole basta, se $\vec{s} = c_i \vec{s}_i$ è la più generale soluzione delle equazioni indefinite soddisfacente alle sole condizioni di vincolo certe, considerare nella (a) W come funzione quadratica omogenea delle c_i , i cui coefficienti W_{ij} dipendono dalle forze preesistenti, e calcolare il minimo valore della intensità di queste per cui uno dei minori principali del determinante simmetrico delle energie totali W_{ij} può divenire negativo.

Nel caso elementare del carico di punta di un pilastro a sezione piena, che col metodo energetico porta ad una equazione differenziale lineare del quart'ordine, se si suppone dato come vincolo certo il solo incastro all'origine, si ha per lo

(6) L. NORZI, «Giornale del Genio Civile», anno 85, pp. 420-427 (1947).

spostamento trasversale: $v(x) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ con $v_1(x), v_2(x)$ linearmente indipendenti, ed il procedimento ora accennato si svolge così:

$$2 W_{ij} = \left[-v_j \frac{d}{dx} (EJ \cdot v_i'') + EJ \cdot v_i'' v_j' - N \cdot v_i' v_j' \right]_0^x \quad (i, j = 1, 2).$$

L'annullamento del discriminante, calcolato come prodotto di due matrici, dà:

$$\begin{vmatrix} -v_1 & v_1' & -v_1 \\ -v_2 & v_2' & -v_2 \end{vmatrix}_{(x=a)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} (EJ \cdot v_1'') & EJ \cdot v_1'' & N \cdot v_1' \\ \frac{d}{dx} (EJ \cdot v_2'') & EJ \cdot v_2'' & N \cdot v_2' \end{vmatrix}_{(x=a)} = 0 =$$

$$= \left[v_2 v_1' - v_1 v_2' \right]_{(x=a)} \cdot \left[v_2'' \frac{d}{dx} (EJ \cdot v_1'') - v_1'' \frac{d}{dx} (EJ \cdot v_2'') - N \cdot (v_1' v_2' - v_2' v_1') \right]_{(x=a)}$$

cioè separatamente le condizioni risultanti dall'eliminazione delle costanti nelle due ipotesi di secondo estremo perfettamente incastrato oppure libero, e l'esempio, per quanto riferentesi ad un problema notissimo, dimostra l'automatismo del metodo.

Per dare almeno un esempio meno ovvio, considero un cantonale ad L ad ali uguali (e sottili) caricato di punta.

Come è noto, esso può divenire instabile per inflessione d'assieme, rimanendo sensibilmente piana la sezione trasversale, oppure per accartocciamento delle ali.

Con le notazioni della fig. 1, si tratta di considerare l'accoppiamento delle due deformazioni:

$$\begin{aligned} D_1) \quad w_1 &= v_1 = c_1 \sin(\pi x/a) & u_1 &= 0 \\ D_2) \quad w_2 &= c_2 \sin(\pi x/a) \cdot f(y) & v_2 &= u_2 = 0 \text{ sull'ala } xy \\ & & v_2 &= c_2 \sin(\pi x/a) \cdot f(z) & w_2 &= u_2 = 0 \text{ sull'ala } xz. \end{aligned}$$

Indicando con N la compressione per unità di lunghezza

$$\begin{array}{ccccccc} » & N_1 & » & » & » & » & \text{critica per la } D_1 \\ » & N_2 & » & » & » & » & \text{critica per la } D_2 \end{array}$$

il calcolo si abbrevia con l'osservazione che W_{11}, W_{22} sono lineari in N e si annullano rispettivamente per $N = N_1$ ed $N = N_2$ (7).

Dato che l'asse di minimo momento d'inerzia è normale alla bisettrice degli assi, si ha:

$$W_{11} = b \cdot (N - N_1) \int_0^a \left(\frac{dv_1}{dx} \sqrt{\frac{V_2}{2}} \right)^2 dx = (\pi^2/a) \cdot c_1^2 \cdot b \cdot (N - N_1)$$

$$W_{22} = (N - N_2) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx dy = (\pi^2/2a) \cdot c_2^2 \cdot (N - N_2) \cdot \int_0^b (fy)^2 \cdot dy.$$

(7) In generale, essendo $W_{ij} = L_{ij} + \varphi S_{ij}$ si potrebbe proporre la definizione dei fattori critici di intensità di carico φ_{ij} mediante la:

$$L_{ij} + \varphi_{ij} S_{ij} = 0 \quad \text{e così:} \quad W_{ij} = (\varphi - \varphi_{ij}) S_{ij}$$

col vantaggio che il calcolo delle S è per solito più rapido.

E siccome, col nostro grado di approssimazione, $L_{12} = 0$ perchè la D_1 produce sensibilmente solo sforzi normali σ_x diversi da zero, che non lavorano durante la D_2 (avendo la risultante nel piano neutro delle ali considerate come lastre sottili):

$$W_{12} = S_{12} = -N \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \left(\frac{dw_1}{dx} \right) dx dy = -N \cdot c_1 c_2 \cdot (\pi^2/2 a) \cdot \int_0^b (fy) \cdot dy.$$

Posto:

$$K^2 = \frac{\left[\int_0^b f \cdot dy \right]^2}{2b \cdot \int_0^b (fy)^2 \cdot dy}$$

la condizione di annullamento del determinante delle energie: $W_{11} W_{22} = W_{12}^2$ equivale all'equazione:

$$(N_1 - N) (N_2 - N) = K^2 N^2.$$

Ora, per b/a abbastanza piccolo (per esempio minore di $1/10$) e a parità di ogni altra dimensione, N_1 varia come b^2 mentre N_2 varia come $1/b^2$ ⁽⁸⁾.

Quindi N è massimo per $N_1 = N_2 = N^*$ e vale $N^*/(1 + K)$.

Allora $b = B$ ed è notevole che dalla uguaglianza $0,46 \cdot (\pi^2 D/B^2) = N_2 = N_1 = (\pi^2 EJ/2 a^2 B)$ risultati che B è circa media geometrica fra a ed h .

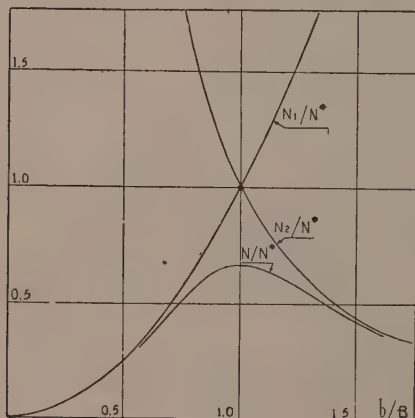


Fig. 2.

Benchè il calcolo di K , per la fy esprime la deformazione di svergolamento di una lastra sottile appoggiata su tre lati, si riduca alla integrazione di trascendenti elementari, preferisco osservare che la conoscenza precisa di fy influisce poco sul risultato finale mentre invece in pratica l'effetto del raccordo fra le due ali rende illusoria una maggior precisione.

Così per $fy \equiv y$, $N_{\max} \cong 0,62 \cdot N^*$; per $fy \equiv y^2$, $N_{\max} \cong 0,65 \cdot N^*$.

In fig. 2 è tracciata la $N(b)$ per $K = 1/2$, $N_{\max} = (2/3) \cdot N^*$.

Termino ricordando che gli esempi di più di due modi di svergolamento contemporaneamente efficaci sono frequenti; questo stesso cantonale soggetto a pressione eccentrica presenta il pericolo di torsione laterale delle ali, oltre a quelli ora esaminati di inflessione di insieme e di accartocciamento.

(8) Ved. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*. (Mac Graw & Hill 1936), Chap. VII, Sect. 65, 74.

Astronomia. — *Ricerca sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Numerose ricerche sull'assorbimento atmosferico nel cielo di Roma, sono state effettuate a partire dal 1929 all'Osservatorio Astronomico del Campidoglio prima, e a Monte Mario dopo; e più recentemente da M. Cimino che ha confrontato il coefficiente di trasmissione della radiazione solare a Roma, con l'umidità assoluta, trovando risultati particolarmente degni di rilievo. In due Note ⁽¹⁾ dei « Contributi scientifici dell'Osservatorio di Monte Mario », egli ha esaminato la radiazione solare, misurata al Campidoglio dal 1929 al 1935 e ne ha ricavato il coefficiente di trasmissione atmosferico, ponendolo in correlazione con i valori dell'umidità assoluta al suolo. Il risultato della ricerca di M. Cimino si può così riassumere:

Fatte le medie del coefficiente di trasmissione per decenni e mensili e confrontate con le corrispondenti medie dell'umidità assoluta, misurata negli stessi giorni, alla stessa ora (mezzogiorno vero) e riportando entrambe in un grafico, si ha fra le due grandezze una evidente relazione; ma l'aspetto forse più interessante del fenomeno — e che sembra non essere stato sufficientemente messo in luce da altri — è il fatto, rilevato da M. Cimino, che tra i valori dell'umidità assoluta al suolo e la radiazione solare *non vi è corrispondenza univoca: nel senso che, a parità di umidità al suolo, risultano diversi i valori autunnali e primaverili del coefficiente di trasmissione.* Questo fenomeno, non ancora ben chiarito, potrebbe attribuirsi — secondo il Cimino — a formazione di goccioline o cristallini o altro nell'alta atmosfera durante la stagione primaverile. Per avere una conferma del fenomeno, il prof. G. Armellini, Direttore dell'Osservatorio di Roma, mi ha incaricata di svolgere un'analogha indagine, usando del materiale di osservazioni sulla radiazione solare, che dal 1935 si è andato raccogliendo all'Osservatorio di Monte Mario e procedendo in modo analogo al Cimino; e ciò appunto forma l'oggetto della presente Nota.

2. Come è noto, se si indica con i la radiazione solare misurata al suolo, con i_0 la radiazione solare fuori dell'atmosfera, e con z la distanza zenitale del Sole, si ha l'equazione

$$(1) \quad i = i_0 a^{\sec z}$$

dove a è appunto il suddetto coefficiente di trasmissione, variabile nel corso dell'anno ed ovviamente sempre minore dell'unità.

Raccolte tutte le osservazioni ⁽²⁾ di Monte Mario sopra la radiazione solare, le ho ridotte alla distanza media Terra-Sole, misurata in unità astronomiche,

(*) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) Cfr. M. CIMINO, *Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma* in « Rend. Lincei », 1947; sem. II.

(2) Queste osservazioni si eseguono a Monte Mario ogni giorno sereno, a mezzodì, misurando la radiazione solare con un piroeliometro di Kipp a pila termoelettrica.

ottenendo con ciò i valori di i da sostituire nella formula (1). Per avere i_0 , mi sono servita dei valori dati, decade per decade, dalle pubblicazioni della « Smithsonian Institution di Washington »; e precisamente ho usato i valori indicati col « preferred » nella tabella 27 del volume VI degli « Annali »⁽³⁾ fino all'ottobre del 1939, e gli analoghi valori pubblicati nel n. 10 del vol. 107 fino al 1945. Per gli anni successivi infine, mi sono valsa delle previsioni della costante solare, pubblicate nello stesso volume e dedotte estrapolando dei valori medi mensili

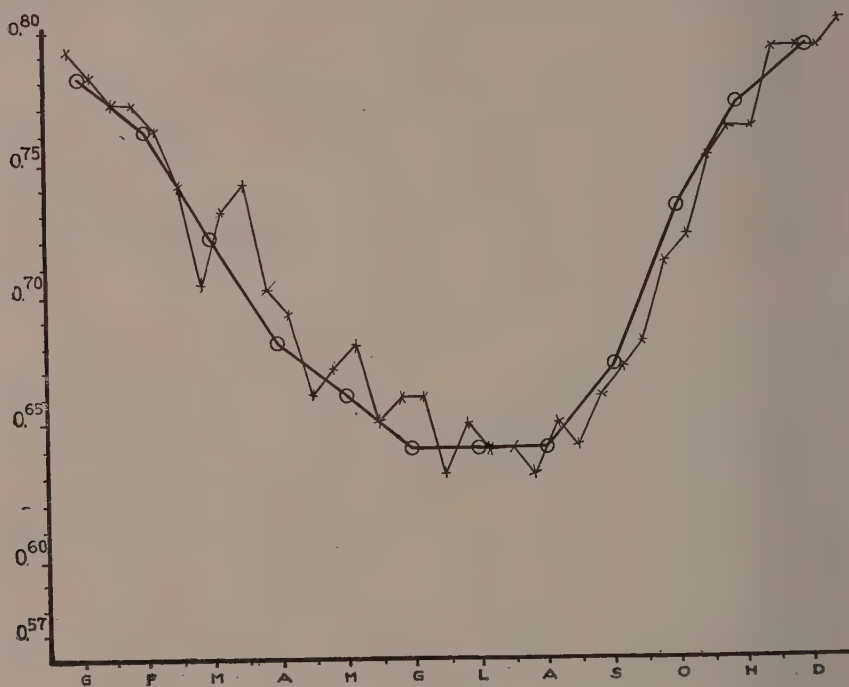


Fig. 1. - Valori mensili e per decadi del coefficiente di trasmissione atmosferica a Roma (1935-1944).

da una curva che approssima la variazione di i_0 , come può dedursi dalle misure di numerosi anni. I valori di i_0 così ottenuti sono più che sufficientemente esatti per la ricerca di carattere statistico, che ci proponiamo.

Ho quindi ricavato i valori di a per decadi e per mesi come sono riportati nella tabella I; dove - nelle ultime due colonne - ho riportato le medie relative ai due gruppi 1935-44 e 1944-50.

3. Dall'esame delle medie annuali si nota che il gruppo di anni che va dal 1936 al 1944 (il 1935 va considerato a parte, poichè le misure invernali furono eseguite al Campidoglio e sono trascurate nella tabella I, mentre quelle estive

(3) Cfr. « Annales of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution », vol. VI, 1942.

ed autunnali furono eseguite a Monte Mario) dà un valore medio per il coefficiente di trasmissione, un poco maggiore di quello per gli anni 1945-50. Per il primo gruppo si ha infatti: $a = 0,71$; mentre per secondo si ha: $a = 0,68$. In ambedue i casi però, le medie del coefficiente di trasmissione sono maggiori di quelle ottenute dal Cimino, i cui dati si riferivano al Campidoglio, mentre i nostri si riferiscono a misure eseguite a Monte Mario, che si trova nel centro di un vasto parco arboreo, ad una altezza di circa 150 metri sul mare e cioè

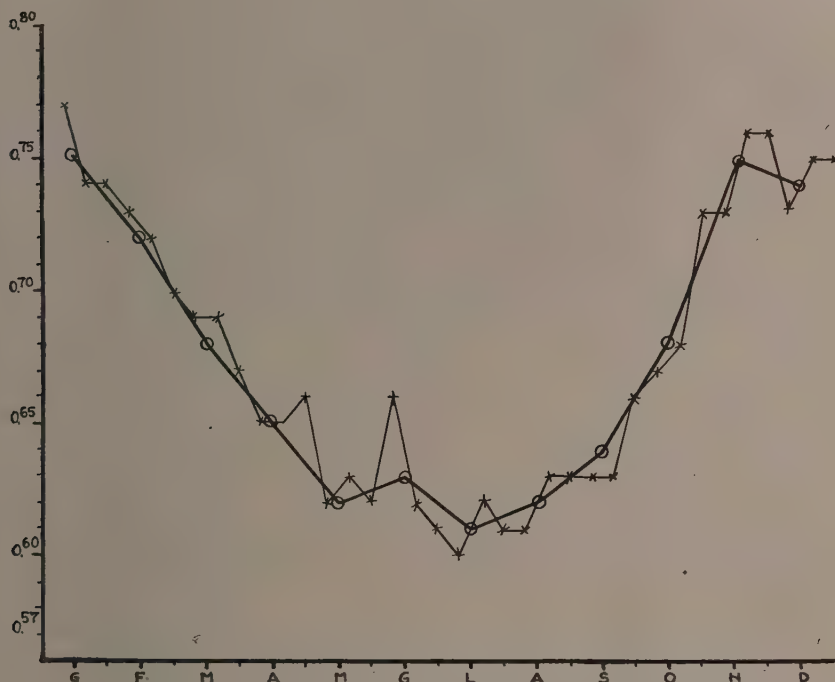


Fig. 2. - Valori mensili e per decadi del coefficiente di trasmissione atmosferica a Roma (1945-1950).

di circa 100 metri superiore a quella della antica sede dell'Osservatorio e sovrasta proprio lo strato più torbido dell'atmosfera, in immediato contatto con la città.

Le medie annuali sono state tratte dai valori mensili senza tener conto del peso, poichè i mesi estivi - dato il maggior numero delle giornate serene - avrebbero prevalso con i loro valori. Come si vede, tali medie sono concordanti fino al 1944, mentre diminuiscono lievemente negli anni successivi. Ora, non potendosi attribuire il fenomeno ad un aumento dell'umidità assoluta nel clima di Roma (come sarà visto nel seguito), bisogna presumibilmente che esso sia dovuto ad altre cause: forse alla minore pluviosità, che ha reso l'atmosfera più ricca di polveri. Per il momento ho perciò tenuti distinti i due gruppi di anni, eseguendo separatamente i calcoli ed i confronti che seguono.

	1935	1936	1937	1938	1939	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	medie per gli anni	
	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	O.	1935-44	1945-50
Luglio I . . .	62	2 64	1 63	3 68	2 65	8 60	1	70	1 68	4 60	5 65	1 60	3	64	1 59	65	22 60
» II . . .	60	3 63	3 63	2 67	1 61	4 65	4 67	2 63	2 69	4 65	7 66	3 58	6 66	2 57	4	64	25 62
» III . . .	63	1 58	1 62	3 63	4 70	3 60	4 66	6 63	4	—	64 8	6 57	3 61	4	—	64	26 61
Luglio . . .	61	6 62	5 63	8 65	7 65	15 63	9 66	8 64	7 68	8 64	20 63	10 58	12 63	6 58	5 58	64	73 61
Agosto I . . .	61	1	—	—	63	2	—	63	3 63	6 65	2 67	3 61	4 57	6 61	1 63	2 63	16 61
» II . . .	—	—	—	—	62	1 65	5 63	3 66	4 64	1 63	3	—	—	60	1	65	17 63
» III . . .	66	1 69	1	—	60	1	—	60	2 62	7 66	6 68	2	—	3 59	2 59	64	17 63
Agosto . . .	63	2 69	1	—	62	4 65	1 65	9 64	13 66	10 63	9 57	6 62	4 61	5 59	8	64	50 62
Settembre I . .	—	—	—	—	67	1	—	67	1 64	3 65	6 62	1 59	2 66	2 61	8	66	14 63
» II . . .	69	2	—	—	68	2 65	3 63	65	3 69	2 65	6	—	—	—	63	2 67	12 63
» III . . .	70	4	—	—	67	2 63	1 66	2 74	1 67	3 67	4	—	—	63	2 70	68	10 66
Settembre . . .	70	6	—	—	68	10 63	6 65	5 67	6 65	15 66	5 61	11 66	2 61	10 68	3	67	36 64
Ottobre I . . .	—	75	3	—	—	—	—	68	3 74	1 72	5 63	1 69	3 62	1	—	71	10 67
» II . . .	63	1	—	—	70	3 75	3 71	2	—	—	70	1	—	74	2	72	12 68
» III . . .	—	74	1 77	1 78	2 78	1 75	3 73	8 69	6 74	1 71	11 69	5 68	8 63	3 70	2 66	73	35 68
Ottobre . . .	63	1 75	4 75	2 74	4 77	2 75	7 73	3 76	1 77	1 73	2 73	1 71	4 74	1 76	1	76	9 73
Novembre I . .	—	—	—	—	75	2 75	2	—	76	3 76	2 74	2	—	—	—	76	10 76
» II . . .	74	2	—	—	74	1 78	2 80	1 78	2 73	2	—	—	76	4	—	79	9 76
» III . . .	79	1 78	4 79	1	—	81	1 79	2	—	78	3	—	76	6	—	77	28 75
Novembre . . .	76	3 78	4 79	1 75	3 77	5 79	3 77	5 74	3 77	1 76	7 74	3 72	6 76	11 76	1	79	9 73
Dicembre I . . .	—	—	—	—	79	4 82	1 71	1 80	1	—	77	1 75	1 73	5 70	2	79	4 75
» II . . .	—	—	—	—	77	2	—	80	2 78	1 73	1 75	3	—	—	—	80	13 75
» III . . .	—	—	—	—	79	2 81	1 80	3 81	2 75	3 76	4 74	1 76	1	—	—	79	26 74
Dicembre . . .	—	—	—	—	79	3 81	1 79	4 78	4 80	5 76	4 76	6 75	5 74	6 70	2	79	26 74
media annuale.	(67)	70	70	70	72	71	71	70	71	69	69	67	68	66	65		

Nei due grafici sono riportati i valori per decenni (a tratto fisso) e quelli mensili (a tratto più pieno) del coefficiente di trasmissione a Roma (Monte Mario), per la radiazione del Sole: il primo grafico si riferisce agli anni 1935-44; il secondo agli anni 1945-50.

Nella precedente tabella I riportiamo i valori (in centesimi) del coefficiente di trasmissione a per ciascuna decade dell'aprile 1935 (in cui si iniziano le osservazioni di Monte Mario) al dicembre 1950: insieme con le medie decadiche, sono anche indicate *in corsivo* le medie mensili. Ciascuna media è poi seguita da una cifra indicante il numero delle osservazioni su cui poggia; così, per esempio, nella prima decade del gennaio 1946 si ebbe per il coefficiente di trasmissione atmosferico il valore $a = 0,79$ risultante dalla media di tre osservazioni solari, fatte sempre a mezzodì in giorni sereni.

Geodesia. — *Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss.* Nota (*) di ANTONIO MARUSSI, presentata dal Corrisp. G. BOAGA.

1. Lo sviluppo sempre più largo assunto dalla rappresentazione conforme di Gauss o Trasversa di Mercatore, che anche in Italia è stata recentemente introdotta e viene largamente impiegata col nome di rappresentazione di Gauss-Boaga, ha originato una vasta fioritura di studi, alcuni con indirizzo squisitamente teorico, altri con indirizzo pratico⁽¹⁾; non mi è sembrato per questo inopportuno portare ancora un contributo alla conoscenza di questa importantissima rappresentazione, mostrando come si possa ottenere per il logaritmo del suo modulo di deformazione uno sviluppo in serie particolarmente semplice ed espressivo, la cui deduzione non richiede la preventiva conoscenza delle equazioni della rappresentazione stessa. Su questi sviluppi penso non sia inutile richiamare l'attenzione, poichè essi si prestano anche ad estensioni in casi più complessi.

2. In due precedenti Note^{(2) (3)} si è visto come in qualunque rappresentazione conforme di una superficie σ qualsivoglia su di un'altra superficie pure qualsivoglia σ' , il logaritmo naturale μ del modulo di deformazione lineare soddisfi alle equazioni alle derivate parziali (fra di loro equivalenti):

$$(I, I) \quad (\Delta_2 \mu)_\sigma = K - e^{2\mu} K'$$

$$(I, II) \quad (\Delta_2 \mu)_{\sigma'} = e^{-2\mu} K - K'$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1951.

(1) Vedi per la bibliografia le mie lezioni sulla proiezione di Gauss, pubblicate nel 1950 dall'Istituto Geografico Militare.

(2) *Su alcune proprietà fondamentali delle rappresentazioni conformi fra superfici.* « Boll. di Geodesia », n. 1, 1951.

(3) *Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. X, ser. VIII, fasc. 4, Roma, 1951.

in cui K e K' sono, rispettivamente, le curvature totali di σ e di σ' in punti che si corrispondono nell'assegnata rappresentazione; e $(\Delta_2 \mu)_\sigma$ è il secondo parametro differenziale di Beltrami calcolato su σ , $(\Delta_2 \mu)_{\sigma'}$ l'analogo calcolato su σ' . Le equazioni scritte rappresentano, in forma assoluta, l'equazione di Laborde.

Quando la σ' è il piano, $K' = 0$; e le equazioni ricordate si semplificano nelle altre

$$\begin{aligned} (2, I) \quad & (\Delta_2 \mu)_\sigma = K \\ & (\sigma' \text{ piana}) \\ (2, II) \quad & (\Delta_2 \mu)_{\sigma'} = e^{-2\mu} K; \end{aligned}$$

la prima equivale dunque ad un'equazione del tipo di Poisson.

Ci proponiamo ora di integrare queste equazioni, nel caso in cui la σ sia un ellissoide rotondo (o, più generalmente, una superficie regolare di rotazione), immaginando di riferire questa superficie ad un sistema di coordinate geografiche intrinseche; e nell'ipotesi che la rappresentazione assegnata sia quella di Gauss.

3. L'espressione generale di $(\Delta_2 \mu)_\sigma$, se a_{ij} è il tensore fondamentale di σ nelle coordinate x^i prescelte, ed a^{ij} il tensore ad esso associato (reciproco), si scrive

$$(3) \quad (\Delta_2 \mu)_\sigma = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial (\sqrt{A} a^{ij} \partial \mu / \partial x^j)}{\partial x^i}$$

A essendo il determinante delle a_{ij} ; nella (3) è ovviamente sottintesa la somministrazione per i valori 1 e 2 di tutti gli indici, come i, j , che vi figurano due volte.

Ma la (3) si semplifica se il sistema di coordinate x^i è, come nel nostro caso, ortogonale, allora $a_{12} = a^{12} = 0$; ponendo allora, come si usa,

$$(4) \quad a_{11} = H_1^2 \quad ; \quad a_{22} = H_2^2$$

si ha

$$(4') \quad a^{11} = \frac{1}{H_1^2} \quad ; \quad a^{22} = \frac{1}{H_2^2} \quad ; \quad A = H_1^2 H_2^2$$

e la (3) diviene

$$(3') \quad (\Delta_2 \mu)_\sigma = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \mu}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \mu}{\partial x^2} \right) \right].$$

Se il sistema di coordinate è altresì isoterma, ed introducendo i parametri isometrici, la (3') si semplifica ulteriormente, avendosi in questa ipotesi $H_1 = H_2 = H$; e dunque

$$(3'') \quad (\Delta_2 \mu)_\sigma = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^1{}^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2{}^2} \right).$$

4. Nel caso di una superficie di rotazione riferita alle coordinate geografiche intrinseche si ha (φ latitudine, λ longitudine)-

$$(5) \quad ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

con ρ raggio di curvatura del meridiano, N gran normale; o anche, introducendo la latitudine isotermo-isometrica Φ

$$(6) \quad d\Phi = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

$$(5') \quad ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\Phi^2 + d\lambda^2);$$

e dunque, in questo caso,

$$(7) \quad (\Delta_2 \mu)_\sigma = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2} \right).$$

La (2, I) si scriverà perciò, in queste coordinate, ricordando che $K = 1/\rho N$,

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2} = \frac{N \cos^2 \varphi}{\rho} = \mathfrak{K}.$$

È questa un'equazione alle derivate parziali di second'ordine di tipo ellittico (di Poisson); la sua integrazione dipende dalla conoscenza di μ e della sua derivata normale $d\mu/dn$ lungo una curva assegnata ad arbitrio γ su σ (curva portante dei valori al contorno).

Nel caso della rappresentazione di Gauss, si sceglie quale curva portante sull'ellissoide (sulla superficie di rotazione) un meridiano, e si assume su questo $\mu = d\mu/dn = 0$. Vediamo come con queste condizioni sia ben facile determinare la μ mediante integrazione per serie.

5. Per fare questo, assumeremo per μ la seguente forma di sviluppo in serie di potenze in λ

$$(9) \quad \mu = \mu_0 + \mu_1 \lambda + \mu_2 \lambda^2 + \mu_3 \lambda^3 + \dots$$

giustificata dalla considerazione che, dovendosi limitare la rappresentazione di Gauss, come si sa, ad un fuso piuttosto stretto, conviene appunto ricorrere ad uno sviluppo per le potenze di λ , ciò che assicura una rapida convergenza della serie. In questa, le μ_r sono funzioni della sola latitudine φ (o, ciò che equivale, della sola latitudine isometrica Φ).

Si ha subito

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \mu_1 + 2 \mu_2 \lambda + 3 \mu_3 \lambda^2 + \dots + r \mu_r \lambda^{r-1} + \dots \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2} = 2 \mu_2 + 6 \mu_3 \lambda + 12 \mu_4 \lambda^2 + \dots + r(r-1) \mu_r \lambda^{r-2} + \dots \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial \Phi^2} = \mu_0'' + \mu_1'' \lambda + \mu_2'' \lambda^2 + \mu_3'' \lambda^3 + \dots \end{cases}$$

avendo posto $\mu_r'' = \partial^2 \mu_r / \partial \Phi^2$.

Chimica fisica. — *Sulla misura delle tensioni superficiali cinematiche* (*). Nota (**) di ENZO FERRONI e GIULIO ROVAL, presentata dal Socio L. ROLLA.

In una pubblicazione⁽¹⁾ apparsa ai primi di quest'anno, furono resi noti i risultati relativi ad uno studio sulla tensione superficiale dei liquidi in movimento. Un dispositivo di deflusso particolarmente congegnato permetteva di rinnovare, dal centro alla periferia, una superficie liquida circolare, in modo costante e riproducibile, della quale veniva misurata la tensione superficiale col metodo dell'anello, utilizzando un tensiometro particolarmente modificato⁽²⁾. Liquidi cimentati: l'acqua, una soluzione di alcool etilico e varie soluzioni di sostanze tensioattive colloidali (dioctilsulfonsuccinato sodico, trimetilcellulosa, tanino, ecc.).

L'effetto del movimento rimase inapprezzabile nel caso dell'acqua e della soluzione di alcool etilico ma apparve invece vistosissimo nel caso di soluzioni di dioctilsulfonsuccinato sodico e di altre sostanze colloidali. Fu notato che all'aumentare della velocità di deflusso, la tensione superficiale aumenta linearmente.

Le tensioni superficiali misurate sul liquido in movimento furono dette *tensioni cinematiche*.

Fu notato anche che, una volta raggiunto un preciso valore della velocità di deflusso (*velocità critica*) la tensione cinematica rimane costante. Questo valore fu detto *tensione cinematica limite*.

L'andamento del diagramma tensione-flusso è quindi quello di una spezzata, costituita da un tratto ascendente e da uno orizzontale. Diminuendo la concentrazione, aumenta la pendenza del tratto ascendente ed il tratto orizzontale si sposta in alto. La differenza fra il valore della tensione a velocità zero (che coincide colla usuale tensione dinamica) e quello cinematico limite è talvolta assai notevole: nel caso della soluzione di dioctilsulfonsuccinato sodico allo 0.005 % è di oltre 16 dine/cm.

Nell'effettuare la misura della tensione superficiale cinematica si notò che l'anello, durante la trazione, isolava, delimitandola, una zona della superficie liquida impedendole di rinnovarsi completamente. Bisognava pertanto rendersi conto di quali differenze avrebbe portato l'uso di anelli di diametro diverso da quello usato.

Oggetto della presente Nota sono i risultati ottenuti studiando la tensione cinematica in funzione delle caratteristiche dell'anello del tensiometro.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica della Università di Firenze.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1951.

(1) G. PICCARDI e E. FERRONI, « Annali di Chimica », 41, 3 (1951).

(2) G. PICCARDI, Brevetto Italiano N. 462316, 18 febbraio 1950, 9 marzo 1951.

Prendemmo come liquido da studiare la soluzione che aveva dato le più grandi variazioni di tensione superficiale e cioè una soluzione di dioctilsulfonsuccinato sodico allo 0.005 % e su questa cimentammo 4 anelli dei quali elenchiamo il materiale, il diametro e la sezione del filo :

Materiale	Diametro del filo	Diametro dell'anello
1° Pt	0.035 cm	1.0 cm
2° Pt	0.030 cm	2.0 cm
3° Pt	0.030 cm	3.0 cm
4° Au	0.040 cm	4.0 cm

Si è riscontrato anzitutto che per tutti quanti gli anelli il diagramma tensione superficiale - velocità di efflusso è sempre una spezzata, costituita da un tratto ascendente ed uno orizzontale, come già avevamo trovato per l'anello di 2 cm; se non che queste spezzate non sono coincidenti, ma distinte le une dalle altre.

Ciò significa che la tensione superficiale varia per una data soluzione oltre che al variare del flusso anche al variare delle caratteristiche dell'anello usato (sempre si intende nel caso di un flusso radiale realizzato e descritto come nella pubblicazione citata).

I valori della tensione cinematica limite risultano tanto più alti quanto più piccolo è il raggio dell'anello, ad eccezione di quelli ottenuti con l'anello n. 4.

Per spiegare l'anomala posizione della spezzata relativa all'anello n. 4, si è ritenuto necessario studiare l'influenza del decentramento dell'anello sui valori della tensione cinematica, spostando l'anello n. 1 radialmente, mantenendo costante la velocità di efflusso: 8.6 cc/sec. Ecco i risultati:

Posizione dell'anello	Tensione superficiale cinematica
Al centro della vaschetta	61.2 dine/cm
A metà raggio della vaschetta	59.5 dine/cm
Tangente al bordo della vaschetta	60.1 dine/cm

Anche nel caso di altre velocità di deflusso la variazione della tensione superficiale in funzione del decentramento è contenuta entro gli stessi limiti.

La piccola variazione della tensione superficiale osservata nei vari punti della superficie, non dà ragione della posizione della spezzata relativa all'anello n. 4. Una giustificazione potrebbe allora essere ricercata nel fatto che l'anello n. 4 trovandosi a solo 1 cm dal bordo di deflusso è sottoposto ad altre sollecitazioni oltre quelle in senso radiale; oppure andrebbe ricercata nella diversità del materiale costituente l'anello in parola, oro anziché platino. Si sa infatti che, nel caso dell'acqua, l'angolo di contatto è assai diverso nei confronti dei due metalli: Acqua su platino $10^{\circ},43'$; acqua su oro $4^{\circ},16'$. Qualche cosa di simile si potrebbe quindi riscontrare nel caso delle soluzioni di dioctilsulfonsuccinato sodico.

I valori riportati nella fig. 1 sono quelli direttamente letti sul tensiometro e perciò non assoluti. Nonostante sia noto che i fattori di correzione appaiono validi soltanto nel caso di liquidi puri, si è voluto verificare se correggendo i dati sperimentali si otteneva almeno approssimativamente la sovrapposizione delle

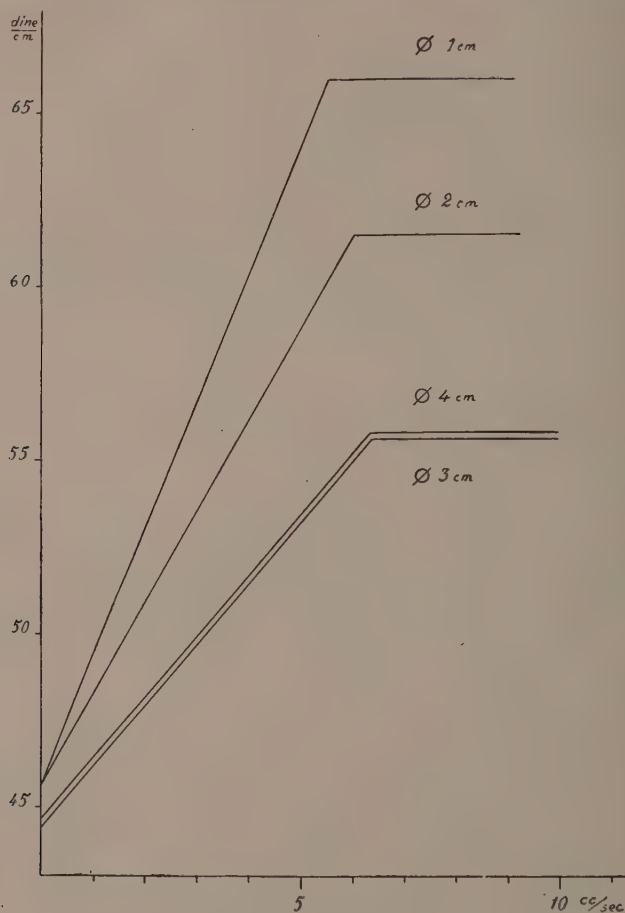


Fig. 1.

spezzate relative ai vari anelli. Ma l'applicazione dei fattori di correzione di Harkins e Jordan⁽³⁾ e dell'equazione di Zuidema e Watres⁽⁴⁾ ha portato soltanto ad una traslazione delle singole spezzate, mantenendo pressochè costanti le posizioni relative. Anche le tensioni dinamiche (a superficie immobile appena formata) risultano traslate e non coincidenti, per cui resta confermata l'inapplicabilità di

(3) W. B. HARKINS e H. F. JORDAN, «J. Am. Chem. Soc.», 52, 1751 (1930).

(4) H. H. ZUIDEMA e G. W. WATRES, «Ind. Eng. Chem. An. Ed.», 13, 312 (1941).

detti fattori non solo nel caso delle tensioni cinematiche, ma anche al campo delle tensioni dinamiche, com'era d'altra parte previsto per le soluzioni.

Tralasciando di considerare per le ragioni suddette i valori relativi all'anello n. 4, si è rilevato dunque che il valore della tensione cinematica e quello della tensione cinematica limite dipendono dalle caratteristiche dell'anello usato. Si è ritenuto allora utile il ricavare una relazione che permettesse, nelle nostre condizioni sperimentali, di calcolare la tensione superficiale cinematica in funzione della velocità di deflusso e del diametro dell'anello usato.

Un attento esame del grafico ha posto in evidenza come, all'aumentare del diametro dell'anello, diminuisca la pendenza del tratto ascendente delle spezzate, cosicchè si può scrivere la relazione seguente :

$$(1) \quad d\sigma/dv = -D + 4.75$$

dalla quale

$$(2) \quad \sigma = -Dv + 4.75 v + C.$$

Il valore di C nella (2) corrisponde alla tensione superficiale dinamica.

La concordanza fra i valori calcolati e quelli sperimentali è soddisfacente. Infatti :

Velocità di deflusso cc/sec	Anello da 1 cm		Anello da 2 cm		Anello da 3 cm	
	tens. sup.		tens. sup.		tens. sup.	
	cal.	trov.	cal.	trov.	cal.	trov.
1 cc/sec	49 25	49 25	48.25	48.20	46.25	46 24
2 cc/sec	53 00	53 00	51.00	50 90	48 00	48.20
3 cc/sec	56 75	56 70	53.75	53 70	49 75	49.80
4 cc/sec	60 50	60 40	56 50	56 20	51.50	51.70
5 cc/sec	64 25	64 10	59 25	58.80	53 25	53.50

Tutto ciò, almeno per ora, va ritenuto relativo alle condizioni delle nostre esperienze, nel campo delle tensioni cinematiche, escluso quello delle tensioni cinematiche limiti.

Gli Autori esprimono il loro vivo ringraziamento al prof. G. Piccardi, Direttore dell'Istituto, per i suggerimenti e i consigli dati.

Chimica inorganica. — *Complessi dei metalli con le carbilammine* (*). Nota II (**) di LAMBERTO MALATESTA e LUIGI GIUFFRÈ, presentata dal Socio L. CAMBI.

L'attitudine di alcuni metalli pesanti (ferro, rame, nichel, zinco ⁽¹⁾ e platino ⁽²⁾), a dare complessi di coordinazione con le carbilammine può essere posta in relazione con l'esistenza dei corrispondenti cianosali stabili; nel caso del ferro e del rame anche il rapporto di stabilità fra le forme ossidate e ridotte di questi complessi corrisponde a quello dei metallocianuri. Un metallo che non rientra completamente in questo schema è il cobalto poichè, da un lato il cobalticianuro di metile $\text{Co}(\text{CH}_3\text{NC})_3(\text{CN})_3$, quale si prepara dal sale potassico, corrisponde in tutto all'acido cobalticianidrico, dall'altro i composti di addizione tra i sali del cobalto bivalente e gli isonitrili alifatici sono poco stabili ⁽³⁾. Assumono invece notevole stabilità i complessi cobalto-fenilcarbilamminici, che si isolano allo stato cristallino e presentano notevole resistenza all'ossidazione del metallo coordinante.

Tale diverso comportamento tra carbilammine aromatiche e alifatiche porta a considerare che, se l'aggruppamento anionico $[\text{CN}]^-$ e quello neutro CH_3NC presentano notevoli analogie nella attitudine alla coordinazione, le carbilammine aromatiche possono presentare impedimento sterico e distribuzione elettronica diversi, che possono agire per la stabilità dei complessi.

Comunque, gli alogenuri del cobalto bivalente contenenti fenilcarbilammina come addendo coordinato, rappresentano per questo metallo un esempio, per ora unico, di complessi « al carbonio » cationici ed è manifesto l'interesse del loro studio, specialmente dal punto di vista delle proprietà magnetiche. Esse ci richiamano infatti gli esacianocobaltiti $\text{Me}_4[\text{Co}^{\text{II}}(\text{CN})_6]$ (nel senso che in quelli come in questi vi sono legami di coordinazione tra il cobalto bivalente ed il carbonio) i quali — come gli analoghi tricianonicheliti $\text{Me}_2[\text{Ni}^{\text{I}}(\text{CN})_3]$ — hanno un comportamento magnetico anormale, presentandosi diamagnetici ⁽⁴⁾ nonostante il numero dispari di elettroni nella molecola.

È noto che i composti del cobalto, dal punto di vista magnetico, a seconda della valenza del metallo, dovrebbero potersi ricondurre ai seguenti tipi ⁽⁵⁾:

A) *Cobalto bivalente*. — 1° Composti di tipo ionico, o complessi dipolari, che presentano il magnetismo pieno dello ione Co^{++} , che risulta dal momento dello spin di tre elettroni spaiati (3,84 magnetoni Bohr), composto con il residuo del momento orbitale, in questo ione non completamente depresso.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1951.

(1) L. MALATESTA, « Gazz. Chim. It. », 77, 241 (1947).

(2) ČUGAJEW, SKANAWY e POSNJAK, « Zeit. anorg. allg. Ch. », 148, 42 (1925).

(3) HANTSCH, « Zeit. anorg. allg. Ch. », 159, 294 (1927).

(4) P. RÂV, H. BHAR, « J. Indian Chem. Soc. », 5, 505 (1928); SZEGÖE, OSTINELLI, « Gazz. Chim. It. », 60, 946 (1930).

(5) L. CAMBI e A. CAGNASSO, « Rend. R. Ist. Lombardo », 67, 741 (1934).

2° Composti a legami coordinati con distribuzione tetraedica ($4s\ 4p^3$), con magnetismo corrispondente al solo spin dei tre elettroni $3d$ spaiati. Questi complessi si distinguono magneticamente assai male dai precedenti, dei quali hanno la stessa molteplicità, ed è qui possibile la risonanza tra la struttura ionica e la coordinata. La risoluzione negli antipodi ottici di un composto di questa classe — solo metodo che ci permetterebbe di convalidare la struttura corrispondente, cioè a legami coordinati tetraedici — non è stata sinora conseguita.

3° Composti a legami coordinati a struttura planare $3d\ 4s\ 4p^2$, in cui la molteplicità è diminuita per l'utilizzazione di un'orbita $3d$ nella coordinazione, con il paramagnetismo di un elettrone spin (1,73 magnetoni Bohr). Di questo tipo, previsto da Pauling⁽⁶⁾, si conoscono pochi esempi, la quasi totalità dei quali è risultata dalle ricerche posteriori alle deduzioni di quell'A., compiute presso questo Istituto⁽⁷⁾.

B) *Cobalto trivalente.* — Lo ione Co^{+++} ha un potenziale di ossidazione così elevato che esso non è stabile nè in soluzione acquosa nè come sale semplice (ad eccezione del fluoruro che ha un comportamento magnetico particolare). Tutti i complessi del cobalto trivalente sono a coordinazione del tipo $3d^2\ 4s\ 4p^3$, diamagnetici. Il criterio del diamagnetismo è perciò uno dei più sicuri per distinguere i complessi del cobalto trivalente da quelli bivalenti.

C) *Cobalto monovalente.* — Non si conoscono sali di questo tipo ad eccezione di un presunto cianosale⁽⁸⁾, per il quale è prevedibile una struttura coordinata a legami $3d\ 4s\ 4p^2$ diamagnetica.

D) *Cobalto tetravalente.* — I composti noti sono del tipo dei complessi binucleari, esacoordinati, a legami $3d^2\ 4s\ 4p^3$. La lacuna elettronica, rispetto al composto trivalente, si manifesta regolarmente con suscettività di 1,73 magnetoni Bohr⁽⁹⁾.

La serie degli alogenuri tetrafenilcarbilamminici da noi isolati è molto interessante per la grande varietà di comportamento magnetico di composti, pure chimicamente così vicini. Si ha infatti:

$$1^\circ \text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{Cl}_2 \quad \mu_{\text{eff}} = 3,27$$

$$2^\circ \text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{Br}_2 \quad \mu_{\text{eff}} = 2,01$$

$$3^\circ \text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2 \quad (\alpha) \quad \mu_{\text{eff}} = \sim 0$$

$$4^\circ \text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2 \quad (\beta) \quad \mu_{\text{eff}} = 1,86$$

$$5^\circ \text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2 \text{ (soluz.)} \quad \mu_{\text{eff}} = 1,83$$

Il cloruro 1° ha un comportamento intermedio tra quello della forma magneticamente compensata e della forma a legami sp^3 , con prevalenza di quest'ultima, mentre il bromuro e la forma β dello ioduro hanno un magnetismo molto vicino a quello calcolato per la forma compensata. Il fatto che composti di costituzione

(6) L. PAULING, « J. Am. Chem. Soc. », 53, 1367 (1931).

(7) L. CAMBI e E. TREMOLADA, « Gazz. Chim. It. », 65, 322 (1935); L. CAMBI e A. FERRARI, « Gazz. Chim. It. », 65, 1162 (1935); L. CAMBI e L. MALATESTA, « Rend. R. Ist. Lombardo Scienze e Lettere », 71, II (1938).

(8) W. D. TREADWELL e D. HUBER, « Helvetica Chim. Acta », 26, 10 (1943).

(9) L. MALATESTA, « Gazz. Chim. It. », 72, 287 (1942).

molto vicina (1° e 2°) possano presentare suscettività compresa entro i limiti del paramagnetismo dello ione corrispondente e del complesso magneticamente compensato era stato riconosciuto da L. Cambi. Sono stati descritti casi in cui questa variazione avviene gradualmente in funzione della temperatura e di finissime influenze costitutive⁽¹⁰⁾ e altri in cui l'esistenza dell'una o dell'altra forma è controllata dal reticolo cristallino⁽¹¹⁾. Poichè d'altra parte la deformabilità dello anione, anche quando, come presumibilmente in questo caso, esso non partecipi alla coordinazione, è un fattore favorevole al raggiungimento di strutture compensate, ci appare normale il passaggio che si osserva dal cloruro al bromuro. Inaspettato invece il fatto che lo ioduro, sempre di Co^{II} , si presenti anche in forma diamagnetica (forma α). Le eccezioni di composti i quali, pur possedendo un numero dispari di elettroni, manifestano un paramagnetismo inferiore a quello minimo di 1,73 magnetoni previsto per lo spin di un elettrone, si osservano specialmente tra i composti in cui si nota una tendenza a legami di tipo metallico (solfuri, seleniuri, ioduri, ossidi) oppure per quelli in cui la piccola distanza fra gli atomi nel reticolo cristallino permette una interazione tra gli elettroni spaiati che assumono, o tendono ad assumere, una posizione antiparallela (antiferromagnetismo degli ossidi e dei fluoruri).

Nel nostro caso si potrebbe forse considerare che nella forma α del composto $\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2$, essendo le molecole organiche distribuite nello stesso piano dell'atomo di cobalto, in una direzione del reticolo cristallino si abbiano legami ... Co .. I .. I .. Co ... che consentono uno stato che si avvicina a quello metallico. Questa spiegazione non può essere scartata a priori, ma non è estendibile ai cianosali $\text{K}_4\text{Co}(\text{CN})_6$ e $\text{K}_3\text{Ni}(\text{CN})_4$, pure, anormalmente diamagnetici⁽⁴⁾. Un caso di tipo diverso di apparente anormalità nel comportamento magnetico si può manifestare quando la valenza considerata del metallo è molto meno stabile di quella immediatamente inferiore o superiore. Così nel sale K_2SbBr_6 , diamagnetico⁽¹²⁾, benchè l'analisi roentgen ci indichi l'equivalenza di tutti gli atomi di antimonio, si ammette un equilibrio mesomero tra Sb^{+++} e Sb^{++++} . Anche nei sali di Roussin $\text{K}_2[\text{Fe}_2\text{S}_2(\text{NO})_4]$ e $\text{K}[\text{Fe}_4\text{S}_3(\text{NO})_7]$ diamagnetici, L. Cambi e L. Szegöe⁽¹³⁾ hanno attribuito il diamagnetismo alla struttura polinucleare e alla presenza di atomi di ferro oscillanti tra due diverse valenze. Analogamente si comportano tra l'altro Na_2ReO_2 ⁽¹⁴⁾, i ditiocarbammati e gli xantogenati del molibdeno pentavalente⁽¹⁵⁾. Una spiegazione del tipo richiederebbe che lo ione $\text{Co}^{\text{II}}(\text{CN})_6^{4-}$ fosse mesomero tra $\text{Co}^{\text{I}}(\text{CN})_6^{3-}$ e $\text{Co}^{\text{III}}(\text{CN})_6^{3-}$, $\text{Ni}^{\text{I}}(\text{CN})_3^{2-}$ tra $\text{Ni}^0(\text{CN})_3^{3-}$ e $\text{Ni}^{\text{II}}(\text{CN})_3^{1-}$ e lo ioduro tra $[\text{Co}(\text{CNR})_4]^{1-}$ e $[\text{Co}(\text{CNR})_4]^{3-}$.

(10) L. CAMBI e L. SZEGÖE, « Rend. R. Accad. Lincei », 15, I, 268, 330 (1932); « Berichte », 64, 2591 (1931), 66, 656 (1933).

(11) L. CAMBI e L. MALATESTA, « Berichte », 70, 2067 (1937); I. LIFSCHITZE, J. G. BOS e K. M. DIJKEMA, « Zeit. anorg. allg. Chem. », 242, 97 (1939).

(12) K. A. JENSEN, « Zeit. anorg. allg. Chem. », 232, 193 (1937).

(13) L. CAMBI e L. SZEGÖE, « Rend. R. Accad. Lincei », 13, VI, 168 (1931); L. CAMBI e L. SZEGÖE, « Zeit. anorg. allg. Chem. », 247, 22 (1941).

(14) W. KLEMM e G. FRISCHMUTH, « Zeit. anorg. allg. Chem. », 230, 220 (1937).

(15) L. MALATESTA, « Gazz. Chim. It. », 68, 195, 408 (1938).

Ciò non appare oggi inammissibile, poichè $K_4Ni^0(CN)_4$ ⁽¹⁶⁾ e $Ni^0(C_6H_5NC)_4$ ⁽¹⁷⁾ sono ben noti ed anzi il derivato tetrafenilcarbamilminico del nichelavalente è più stabile del sale corrispondente, come risulta da nostre ricerche in corso. Il Co^I avrebbe poi come cianosale un potenziale assai vicino a quello di Co^{II} ⁽¹⁸⁾. È nostra convinzione che, qualunque essa sia, la causa del comportamento diamagnetico anormale sia la stessa per questi tre composti e che una struttura ad elettroni non localizzati, che in definitiva è richiesta qualora non abbia luogo un legame diretto tra due atomi di metallo, appare certamente favorita dal tipo di legame mesomero fra quello coordinativo normale ed un vero e proprio doppio legame fra carbonio e metallo, cui possono dar luogo CO ⁽¹⁸⁾, l'isostero $[CN]^-$ e le carbilammine.

PARTE SPERIMENTALE.

Prodotti. — La fenilcarbamilammina venne preparata secondo il metodo modificato di A. W. Hofmann e rettificata con una colonna raschig di circa cm. 50, raccogliendo la frazione passante a 36–40 °C a 1 mm (l'anilina nelle stesse condizioni passava a 65–67 °C). Gli alogenuri di cobalto vennero preparati da carbonato di cobalto esente da nichel e gli acidi corrispondenti. Le analisi vennero eseguite: il cobalto per via elettrolitica, gli alogeni con la bomba di Parr e l'azoto col semi-micro Dumas.

Preparazioni ed analisi. — 1° $Co(C_6H_5NC)_2Br_2$. Da bromuro di cobalto anidro, sciolto in etere assoluto, e carbilammina in eccesso. La polvere verde venne filtrata in aria secca e seccata a vuoto.

Analisi: Per $CoC_{14}H_{10}N_2Br_2$ calc. Co% 13,86; N% 6,58; Br% 37,61
Trov. 13,25 7,47 36,20.

Il prodotto deve essere considerato impuro per la presenza di poco composto 3°.

2° $Co(C_6H_5NC)_4Cl_2$. Di tutta la serie questo è il composto di più difficile preparazione ed il prodotto ottenuto non era purissimo. g 2 di $CoCl_2$ vennero sciolti in cc 20 di alcool metilico anidro e trattati a goccia a goccia con g 6,32 di carbilammina. La soluzione lasciata a sè 24 ore in frigorifero venne filtrata in aria secca, il filtrato (aghi verdi) venne lavato con poco alcool metilico ghiacciato e il prodotto seccato a vuoto. Vennero eseguite una diecina di preparazioni diverse nelle stesse condizioni, e si ottenne sempre lo stesso prodotto, ma con rese sempre basse ed assai variabili, da zero al 18–20%. Il prodotto si scioglie in cloroformio, ma non è ottenibile cristallino da questo solvente.

Analisi: Per $CoC_{28}H_{20}N_4Cl_2$ calc. Co% 10,80; N% 10,33; Cl% 13,07
Trov. 10,24 11,06 13,32.

(16) J. W. EASRES e W. M. BURGESS, «J. Am. Chem. Soc.», 64, 1189 (1942).

(17) W. HIEBER, «Z. Naturforschung», 56, 129–30 (1950); F. KLAGES e K. MÖNKEMEYER «Berichte», 83, 501 (1950).

(18) L. PAULING, «Nature of chemical Bond—Cornell—University Press», p. 251.

3° $\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{Br}_2$. Il prodotto si ottiene facilmente trattando una soluzione diluita di bromuro di cobalto (g 2 in cc 60 di alcool metilico anidro) con carbilammina a goccia a goccia (g 3,78 in cc 10 dello stesso solvente), filtrando dopo pochi minuti la soluzione raffreddata a -5°C , lavando con alcool metilico e seccando a vuoto. Cristallizza in magnifici aghetti verdi ed è assai puro. Si scioglie in cloroformio con colorazione marrone scuro. La soluzione odora di carbilammina ed è stabile a freddo. Per evaporazione sotto vuoto si ottiene il prodotto sotto forma di croste verdi marrone.

Analisi: Per $\text{CoC}_{28}\text{H}_{20}\text{N}_4\text{Br}_2$ calc. Co% 9,33; N% 8,87; Br% 25,30
Trov. 9,14 8,57 26,00.

4° $\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2$. Forma α . Procedendo come per il bromuro (da g 2 di CoI_2 e g 2,63 di carbilammina) si ottiene con rese quantitative un prodotto cristallizzato in minutissimi aghetti a riflessione verde metallica. Il prodotto schiacciato su carta da filtro è invece viola intenso e le soluzioni cloroformiche, bromoformiche, acetoniche ed eterree (queste ultime due instabili, vedi oltre) sono di colore marrone rossastro. Il prodotto benchè molto stabile si dissocia parzialmente in cloro- e bromoformio e perciò la determinazione del peso molecolare non fu possibile.

Analisi: Per $\text{CoC}_{28}\text{H}_{20}\text{N}_4\text{I}_2$ calc. Co% 8,12; N% 7,72; I% 34,95
Trov. 8,10 7,77 33,90.

5° $\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2$. Forma β . Il prodotto α , si scioglie molto facilmente in acetone e in etere, ma dopo pochi minuti riprecipita in cristalli neri lucenti insolubili in questo solvente. La trasformazione è quantitativa e si può ottenere anche per ebollizione prolungata dalla forma α in alcool metilico. La forma β è ancora solubile in cloro- e bromoformio dai quali si riottiene però la forma α .

Analisi: Per $\text{CoC}_{28}\text{H}_{20}\text{N}_4\text{I}_2$ calc. Co% 8,12; N% 7,72; I% 34,95
Trov. 8,23 7,99 34,28.

Determinazione della suscettività magnetica. - Le misure furono eseguite con la bilancia di Gouy. Oltre alla misura sul sale solido, la forma α dello ioduro, venne misurata in soluzione di cloroformio.

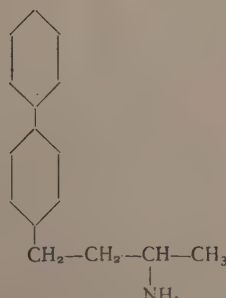
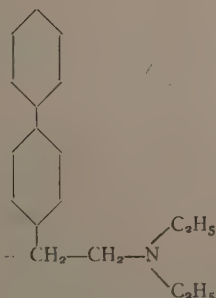
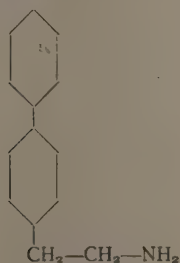
COMPOSTO	Suscettività molecolare $\chi_M \cdot 10^6$	$\mu_{\text{eff}} = 2,84 \sqrt{\chi_M \cdot T_k}$	T_k
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_2\text{Br}_2$	8230	4,47	297
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{Cl}_2$	4443	3,27	297
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{Br}_2$	1698	2,01	297
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2 \alpha$	142	~ 0	297
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2 \beta$	1440	1,86	297
$\text{Co}(\text{C}_6\text{H}_5\text{NC})_4\text{I}_2$ (soluz. cloroformica)	1400	1,83	297

Chimica organica. — *Ammine arilalifatiche della serie del bifenile* (*). Nota II (**) di ROBERTO TRAVE e GIUSEPPE BIANCHETTI, presentata dal Socio L. CAMBI.

In una precedente Nota (1) abbiamo riferito sulla sintesi di varie ammine strutturalmente collegate al sympathol bifenilico (2), prive peraltro di ossidril alcolici nella catena laterale. L'esame farmacologico dello stesso sympathol (che ne denunciava l'azione broncodilatatrice su cavie sottoposte a choc istaminico) e le osservazioni di Machlis e Blanchard (3) relative all'attività pressoria della norefedrina bifenilica ci hanno successivamente indotto a sintetizzare un composto che riassume le caratteristiche strutturali dei due termini citati. Abbiamo così ottenuto la «ossiefedrina bifenilica»:



il cui esame farmacologico (al pari di quelli relativi ai prodotti di cui riferiremo oltre) è tuttora in corso. Ci siamo in pari tempo rivolti alla sintesi d'una nuova serie di ammine bifenilalifatiche che differiscono da quelle elencate nella Nota precedente per l'assenza di sostituenti nel nucleo bifenilico. Si tratta dei seguenti termini:



(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1951.

(1) TRAVE e BIANCHETTI, «Rend. Acc. Naz. Linc.», vol. XI, fasc. 1-2, pp. 94-101 (1951).

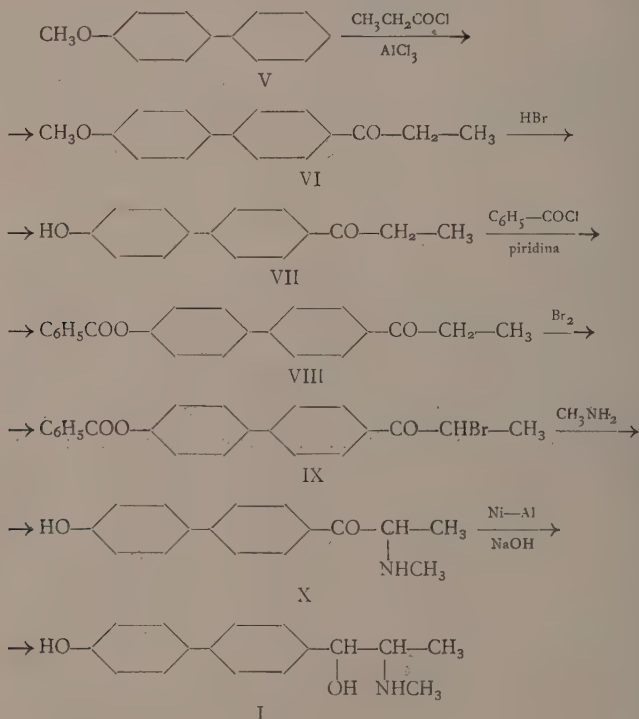
(2) FUSCO e RENIERI, «Gazz. chim. ital.», 78, 435 (1948).

(3) MACHLIS e BLANCHARD, «J. Am. Chem. Soc.», 57, 176 (1935).

Scopo sostanziale di questo lavoro è di consentire un confronto farmacologico di carattere generale fra quattro gruppi di ammine bifenililfatice; e precisamente:

- a) termini dotati di carattere fenolico e d'un gruppo alcoolico secondario (sympathol e ossiefedrina bifenilici);
- b) termini dotati d'un gruppo alcoolico secondario, privi di ossidril fenolico (norefedrina bifenilica);
- c) termini a carattere fenolico, privi di funzioni alcooliche (ammine di cui alla Nota I);
- d) termini a carattere esclusivamente amminico (prodotti II, III e IV).

La ossiefedrina bifenilica è stata ottenuta in modo perfettamente analogo al sympathol:

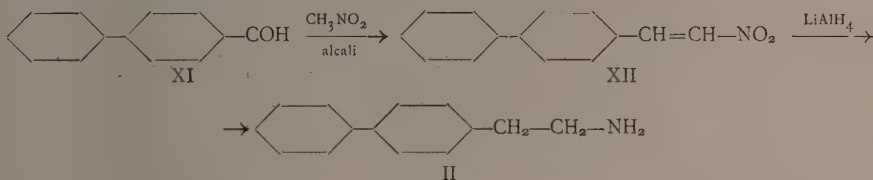


Gl'intermedi VII (4), VIII, IX e X non erano noti. La reazione di Friedel-Crafts sul 4-metossibifenile conduce ai due isomeri 3,4 e 4,4', facilmente sepa-

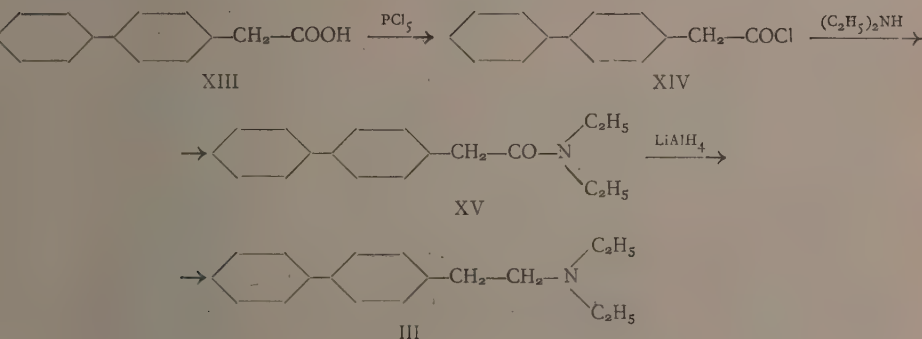
(4) Si è tentato di ottenere direttamente l'idrossichetone VII operando la trasposizione di Fries con fluoruro di boro sul propionato di bifenile e sull'ossibifenile e acido propionico, in varie condizioni di temperatura. Tentativi analoghi sono stati condotti sull'acetato di bifenile e sull'ossibifenile in acido acetico. In nessun caso è stato possibile isolare sostanze a carattere chetonico; i prodotti di partenza si recuperano inalterati.

rabili per cristallizzazione frazionata⁽⁵⁾. Per la riduzione del chetone X ad aminoalcol I si è saggiato con successo un metodo che risulta nuovo per questo tipo di riduzioni: l'azione della lega nichel-alluminio in ambiente alcalino a freddo. Non è improbabile che questo metodo, col quale si evita l'impiego di autoclavi, possa trovare applicazioni anche per la sintesi di altre ammine simpaticomimetiche della serie benzenica.

Per l'ottenimento dell'ammina II è stata tentata la riduzione dell'ammide dell'acido bifenilil-4-acetico con idruro di litio e alluminio; ma, come già osservato nella Nota precedente riguardo ad altra ammido primaria, la riduzione non ha condotto a buoni risultati. È invece stata coronata da successo l'applicazione d'un metodo recentemente escogitato da Erne e Ramirez, consistente nella riduzione degli ω -nitrostirololi con idruro di litio e alluminio⁽⁶⁾. Nel nostro caso abbiamo condensato la 4-bifenilaldeide⁽⁷⁾ con nitrometano e ridotto quindi il p-fenil- ω -nitrostirololo XII come già detto:



Lo schema generale di sintesi esposto nella Nota I è stato seguito con buon esito nel caso del composto III: clorurazione dell'acido bifenilil-4-acetico, reazione con dietilammina, riduzione della dietilammide con idruro di litio e alluminio:



All'acido XIII siano pervenuti applicando la trasposizione di Willgerodt sul 4-acetilbifenile secondo Schwenk e Papa⁽⁸⁾.

(5) CAMPBELL e CHATTAWAY, «Proc. Roy. Soc.» (London), 130 B, 435-47 (1942); riportato in «Ch. Abs.», 2731⁸ (1943).

(6) ERNE e RAMIREZ, «Helvetica chim. Acta», 33, 912 (1950).

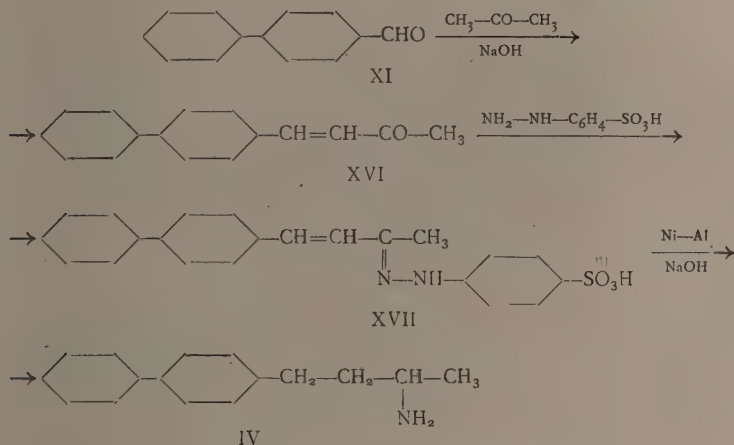
(7) KEY, «J. Chem. Soc.», 2476 (1931).

(8) SCHWENK e PAPA, «J. Org. Chem.», 11, 798 (1946).

Tabella riassuntiva dei nuovi derivati bifenilici ottenuti nel corso del presente lavoro.

N. form.	Formula di struttura	p. f.	Analisi	
			calc. %	trov. %
VII		174°	C=79,65 H= 6,24	C=79,5 H= 6,1
VIII		167-8°	C=79,98 H= 5,56	C=80,5 H= 5,5
IX		158°	C=64,75 H= 4,18	C=64,4 H= 4,1
X		267° dec.	N= 4,80	N= 4,8
I		247° dec.	N= 4,77	N= 4,8
XII		127°	N= 6,22	N= 6,1
II		237° dec.	N= 5,99	N= 5,9
XV		-18°-16°	—	—
III		167°-70°	N= 4,84	N= 4,8
XVI		134,5°	C=86,84 H= 5,92	C=86,6 H= 6,0
XVIII		190,5°	N=11,77	N=11,7
IV		232° dec.	N= 5,35	N= 5,2

Il termine IV, infine, è stato esso pure ottenuto partendo dalla 4-bifenil-aldeide XI: la condensazione di detta aldeide con acetone in ambiente alcalino conduce con alte rese al p-fenilbenzalacetone XVI; il solfofenilidrazone di questo chetone, XVII, ridotto con lega nichel-alluminio secondo lo schema generale di Fusco e Canonica⁽⁹⁾ porta all'ammina IV con elevati rendimenti:



Le ammine terminali citate e i relativi intermedi costituiscono un complesso di 12 nuovi prodotti bifenilici, di cui descriviamo le caratteristiche essenziali nella precedente tabella.

PARTE SPERIMENTALE

4-metossi-4'-propionilbifenile (form. VI).— Caratteristiche e preparazione di questo prodotto si trovano sommarariamente descritte in una Nota dei Chemical Abstracts⁽⁸⁾; noi abbiamo adottato le seguenti modalità. In pallone a 3 colli (agitatore, ricadere, imbuto a rubinetto) s'introducono g 62 di metossibifenile (0,33 moli), g 53 di cloruro d'alluminio (0,42 moli) e 150 cm³ di solfuro di carbonio. Si scalda fino a completa soluzione del metossibifenile e si aggiungono a gocce, agitando, g 34 di cloruro di propionile. L'addotto, di colore nero, precipita rapidamente; terminata l'introduzione del cloruro si fa bollire fino a che dal refrigerante non si sviluppino più fumi d'acido cloridrico (45' circa). Agitando fortemente si decompone l'addotto con acido cloridrico 1 : 3; la reazione è violenta e richiede cautela. Si allontana il solfuro di carbonio e si filtra alla pompa il prodotto giallo-rosa. Cristallizzando da 500 cm³ di etanolo con poco nero animale si ottengono 24 g di chetone perfettamente puro. Resa 30%.

4-ossi-4'-propionilbifenile (form. VII). — Una miscela di 20 g di 4-metossi-4'-propionilbifenile (VII), 250 cm³ di acido acetico glaciale e 75 cm³ di acido

(9) FUSCO e CANONICA, «Chimica e industria», 32, 208-10 (1950).

bromidrico al 48 % in peso viene bollita a ricadere per 7-8 ore, dopodichè si aggiungono a caldo 200 cm³ d'acqua e si filtra all'ebollizione con nero animale. Si scalda il filtrato fino a dissoluzione completa: per lento raffreddamento si forma una pappa di scaglette rosa facilmente filtrabili. Resa 70 %; p. f. 171 °C. Il prodotto perfettamente incolore si ottiene per cristallizzazione da etanolo, con poco nero animale: p. f. 174 °C. (Analisi in tabella).

4-benzoilossi-4'-propionilbifenile (form. VIII). - In 100 cm³ di piridina anidra, a leggero calore, si sciolgono 13 g di ossichetone (VII); si raffredda a 15 °C e si aggiungono a porzioni 14 cm³ di cloruro di benzoile (eccesso 100 %). Si osserva l'istantanea precipitazione di cloridrato di piridina. Dopo 20' si diluisce con 500 cm³ d'acqua e si filtra lavando più volte. Resa 82 %. Il benzoilderivato puro si ottiene cristallizzando da poco acetone: p. f. 167-68° C. (Analisi in tabella).

4-benzoilossi-4'-(β-bromo)-propionilbifenile (form. IX). - In pallone a 3 colli (agitatore, imbuto separatore, tubo di efflusso per l'acido bromidrico) s'introduce una soluzione di 15,5 g del benzoilderivato VIII in 200 cm³ di cloroformio; mantenendo la temperatura a 15°, agitando e illuminando intensamente il pallone si addiziona a gocce una soluzione di 8,25 g di bromo in 50 cm³ di cloroformio, attendendo di volta in volta la scomparsa della colorazione, e scaldando leggermente ove la reazione tardi a innescarsi. Terminata l'aggiunta si lava con acqua, poi con bisolfito per eliminare l'eccesso di bromo, poi con carbonato e infine ancora con acqua. Lo strato cloroformico, asciugato su solfato sodico, viene concentrato a 1/3 circa del volume iniziale: per raffreddamento cristallizzano 14 g di prodotto praticamente puro; concentrando ulteriormente se ne ottengono altri 4 g (purificabili da acetato d'etile), col che la resa sale al 94 %; p. f. 158°. Solubilità buona in benzolo, scarsa in acido acetico, nulla in etere etilico e in ligroina. (Analisi in tabella).

4-ossi-4'-(β-metilamino)-propionilbifenile (form. X). - Si scalda a ricadere fino a soluzione completa una miscela di 7 g di bromoderivato IX, 70 cm³ di metilammina acquosa al 40 % e 70 cm³ di etanolo; si evapora sotto vuoto fino a secchezza, si riprende con acido cloridrico diluito e si filtra a caldo. Per raffreddamento precipita il cloridrato in fiocchi gelatinosi difficili da filtrare. Il prodotto dà un precipitato con la p-nitrofenilidrazina, e forma con alcali sali intensamente colorati in giallo. Una piccola porzione fu purificata per l'analisi mediante soluzione in etanolo e precipitazione con etere. Resa 64 %; p. f. del cloridrato puro 267 °C con decomposizione. (Analisi in tabella).

4-ossi-4'-(α-ossi-β-metilamino)-propilbifenile cloridrato (form. I). - Una soluzione di 2 g di metilaminochetone X e 2,5 cm³ di idrato sodico al 30 % in 100 cm³ di etanolo al 50 % viene trattata con 1 g di lega nichel-alluminio. Si lascia procedere la riduzione a freddo fino a che il colore è quasi scomparso; indi si bolle per qualche minuto, si filtra, si acidifica con acido cloridrico e si

elimina l'etanolo sotto vuoto. Il raffreddamento determina la precipitazione del cloridrato, che si può purificare sciogliendolo in pochissimo etanolo e riprecipitandolo con molto etere. Il prodotto non reagisce con p-nitrofenilidrazina e fonde a 247°C con decomposizione. (Analisi in tabella).

p-fenil- ω -nitro-stirol (form. XII). — 4,5 g di 4-bifenilaldeide (preparata secondo Key ⁽⁷⁾ e purificata per distillazione diretta a 2 mm e 160° , anzichè attraverso il composto bisolfittico: si ottiene rapidamente un prodotto più puro) vengono sciolti in una trentina di cm^3 di metanolo e addizionati prima di 1,55 g di nitrometano e poi 1,7 g di idrato sodico in 7 cc d'acqua. Precipita rapidamente il sale sodico del nitrostirol; si agita energicamente per mezz'ora e si versa in 300 cm^3 di acido cloridrico diluito: il nitrostirol che si separa in fiocchi gialli viene filtrato alla pompa e lavato a fondo con acqua. Per cristallizzazione da etanolo lo si ottiene in scaglie gialle che fondono a 127° . Resa 75 %. Solubilità discreta in etere e acetone. (Analisi in tabella).

4-(β -ammino)-etilbifenile cloridrato (form. II). — In condizioni di rigorosa anidrità s'introducono in una soluzione di 2 g dello stirol XII in 100 cm^3 di etere assoluto g 1,9 di idruro di litio e alluminio polverizzato. Rapporto molare idruro: stirol = 5:1. La reazione è abbastanza vivace; allorchè cessa il rivolgimento spontaneo si porta a lieve ebollizione per 7-8 ore. Si decompone quindi con acido cloridrico 1:3, si caccia l'etere, si scalda all'ebollizione e si filtra. Per raffreddamento precipita il cloridrato in scagliette di facile filtrazione; si lava sul filtro con pochissima acqua fredda: il cloridrato è infatti relativamente solubile. Si scioglie facilmente in alcool. La resa di riduzione è del 25 %; il cloridrato fonde con decomposizione a 237°C . (Analisi in tabella).

Cloruro dell'acido bifenil-4-acetico (form. XIV). — In un palloncino a smeriglio collegato con un refrigerante Liebig si fanno reagire a bagno d'acqua uguali quantità di acido e di pentacloruro di fosforo, fino a che il miscuglio è diventato completamente limpido; a questo punto si applica il vuoto e si elimina l'ossicloruro di fosforo mantenendo la temperatura del bagno sui 40° . Si ottiene un residuo brunastro che solidifica in una massa scura, non distillabile nè cristallizzabile. Si estrae ripetutamente questa massa con etere di petrolio caldo, fino a che il solvente non si colora più di giallo. Nel pallone rimane un residuo pecioso. La soluzione del cloruro in etere di petrolio può senz'altro essere usata per le successive operazioni.

Dietilammide dell'acido bifenil-4 acetico (form. XV). — La soluzione di cui sopra si tratta direttamente in imbuto separatore con dietilammina in forte eccesso. Precipita immediatamente il cloridrato della base, che si estrae con acqua dopo aver eliminato l'eccesso di ammina con acido cloridrico diluito. Lo strato etereo contiene la dietilammide; lo si asciuga su solfato sodico e si evapora il solvente. Residua un liquido vischioso, giallochiario, che solidifica in miscela frigorifera dando una massa vetrosa, la quale torna a fondere fra -18° e -16° .

4-(β -dietilammino)-etilbifenile (form. III). - In 100 cm³ di etere rigorosamente anidro si sciolgono 10 g dell'ammide XV (precedentemente scaldata a 40° sotto vuoto per 4-5 ore onde essicarla completamente). Alla soluzione così ottenuta si aggiungono 2 g di idruro di litio e alluminio (eccesso 100 %); si lascia a blanda ebollizione per 8-10 ore. Dall'alto del ricadere si fanno defluire allora 20 cm³ d'acqua, per decomporre l'eccesso di idruro; si aggiunge qualche cm³ di idrato sodico e si separa lo strato etereo, che viene filtrato e seccato su carbonato potassico. Vi si fa quindi passare una corrente di acido cloridrico secco: precipita allo stato cristallino il cloridrato praticamente puro (foglioline incolori). La resa di riduzione è dell'ordine dell'80 %. Un campione, purificato per dissoluzione in etanolo e riprecipitazione con etere, risultò fondere a 167-70°. Solubilità buona in acetone, etanolo, acido acetico. (Analisi in tabella).

p-fenilbenzalacetone (form. XVI). - A una soluzione di 9 g di bifenilaldeide in 50 cm³ di acetone si aggiungono a freddo 10 cm³ di idrato sodico al 2 % circa. Si forma quasi istantaneamente una pappa cristallina che rende difficile l'agitazione. Si sbatte per circa un'ora, si acidifica con 40-50 cm³ di acido cloridrico 1 : 5 e si filtrano le scaglie giallastre separatesi. La resa è dell'ordine del 90 %; il grezzo fonde a 125-29 °C. Cristallizzando da etanolo si ottiene puro, a p. f. 134,5 °C. Solubilissimo in acetone e in cloroformio; abbastanza solubile in etere e in tetracloruro di carbonio, insolubile in acqua e in etere di petrolio. Scolora istantaneamente una soluzione di bromo in cloroformio. (Analisi in tabella).

p-nitrofenilidrazone. Si addiziona a una soluzione calda di *p*-fenilbenzalacetone in acido acetico concentrato una soluzione acetica di *p*-nitrofenilidrazina (in piccolo eccesso). Precipita un fenilidrazone rosso cupo, cristallino, che ricristallizzato da molto etanolo fonde con decomposizione a 190,5°. (Analisi in tabella).

Solfofenilidrazone del p-fenilbenzalacetone (form. XVII) e *4-(γ -ammino)-butilbifenile cloridrato* (form. IV). - Si sciolgono in alcali idralcoolico 7 g di acido fenilidrazin-*p*-solfonico, si scalda a 40° circa e si aggiungono alla soluzione 8 g di *p*-fenilbenzalacetone. Il solfofenilidrazone, che colora intensamente la soluzione, non viene isolato; si raffredda a 30° circa e si addiziona a piccole porzioni un eccesso del 50 % di lega Raney (5 g in tutto) alternando con aggiunte di idrato sodico al 10 %. La riduzione, che va seguita attentamente onde evitare schiumeggiamenti, può ritenersi ultimata dopo circa un'ora: a questo punto il liquido è debolmente colorato. La soluzione alcalina viene estratta tre volte con etere; gli estratti riuniti vengono seccati su carbonato potassico e sottoposti a una corrente di acido cloridrico secco. Precipita il cloridrato IV in scaglie cristalline giallastre, che disciolte in poco etanolo e riprecipitate con molto etere diventano perfettamente incolori. La resa di riduzione, calcolata sul prodotto grezzo, è superiore al 75 %; p. f. del prodotto puro 232 °C con decomposizione. (Analisi in tabella).

Fisiologia. — *Sull'azione epilettogena della tiamina*^(*). Nota di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata^(**) dal Socio C. CIACCIO.

Nel 1947 Vianna Dias osservò come la tiamina applicata sulla corteccia cerebrale dei cani, in corrispondenza della zona sensitivo-motrice, sia capace di esercitare, in taluni casi, una azione epilettogena⁽¹⁾.

Questa sostanza, secondo le osservazioni del Dias, si comporterebbe addirittura come si comporta la stricnina secondo le ormai classiche osservazioni di Amantea⁽²⁾. Proprio come avviene sotto l'azione della stricnina infatti, la stimolazione della zona riflessogena cutanea corrispondente al centro trattato scatena, soltanto in alcuni animali, l'accesso. Stando a queste osservazioni si dovrebbe classificare la tiamina tra gli agenti « preparanti » secondo la definizione di Amantea. Invero alcune considerazioni sui più probabili meccanismi coi quali la tiamina esercita quest'azione, tenderebbero piuttosto a farla rientrare tra i fattori disponenti. Infatti, la tiamina è capace di potenziare l'azione dell'acetilcolina per diverse vie, sia in opportune concentrazioni impedendone la scissione enzimatica⁽³⁾, sia rappresentando un fattore indispensabile per l'acetilazione della colina⁽⁴⁾, sia fors'anche sensibilizzando i ricettori verso l'azione di questo estere^(5,6).

Se la tiamina agisce in effetti determinando una maggiore formazione di acetilcolina o, comunque, accrescendo l'attività di questa sostanza a livello dei ricettori, è ovvio che la sua azione deva dipendere dalla tipica azione esercitata dall'acetilcolina sull'intensità dell'effetto postumo degli eccitamenti afferenti. A. Alibrandi ha dimostrato che a questa accresciuta intensità dell'effetto postumo deve riferirsi l'effetto disponente di alcune sostanze⁽⁷⁾. Egli ha pure osservato come i fattori disponenti, sempre, in virtù di questa elettiva azione sul fenomeno dell'after-discharge da essi esercitato, possano talora, e precisamente allorché la loro concentrazione superi un certo limite, assumere il ruolo di fattore preparante.

Pertanto l'azione preparante dimostrata dal Dias sarebbe da considerare soltanto come conseguenza di una energica azione disponente di questa sostanza. Tale eventuale azione ci siamo proposti di indagare mediante le presenti ricerche.

In cani sicuramente non predisposti verso l'epilessia riflessa veniva iniettato endovena cloridrato di tiamina in ragione di 7 mg. pro Kg.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) VIANNA DIAS, « Science », 105, 211 (1947).

(2) G. AMANTEA, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1, 387 (1926).

(3) D. GLICK e V. ANTROPOL, « J. of Pharmac. a. exper. Therap. », 65, 389 (1939); « Proc. Soc. exper. Biol. a. Med. », 42, 396 (1939).

(4) B. MINZ, *La transmission chimique de l'influx nerveux*. Ed. Flammarion, p. 169 (1947).

(5) B. MINZ e R. AGID, « C. R. de l'Acad. des Sciences », 205, 576 (1937).

(6) R. ABDERHALDEN, « Pflügers Arch. », 245, 165 (1941).

(7) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 49, 105 (1949).

L'animale veniva riesplorato dopo che era trascorso da questa iniezione un intervallo non minore di 20' ⁽⁸⁾.

In otto cani su dieci il suddetto trattamento instaurò uno stato di disposizione verso l'epilessia riflessa netto e marcato, in nulla distinguibile dallo stato di disposizione naturale ⁽⁹⁾.

Questi risultati ci autorizzano pertanto a considerare esatta la nostra su enunciata ipotesi sul meccanismo dell'azione epilettogena della tiamina.

Fisiologia. — *Influenza dell'ormone paratiroideo sullo spessore del guscio dell'uovo di gallina* ^(*). Nota ^(**) di GIOVANNI MANUNTA, presentata dal Socio G. LEVI.

L'asportazione delle paratiroidi provoca sempre la morte in media dopo 24 ore, sia nel piccione (Riddle, Rauche e Smith 1945 ⁽¹⁾) che nell'anitra (Benoit e Clavert 1945-1947 ⁽²⁾). Romanoff e Romanoff (1949) ⁽³⁾ riportano che esse aumentano di volume durante la stagione della deposizione ed in questo Istituto è stato osservato che le paratiroidi sono più grosse nelle galline che ovulano, mentre nel gallo sono molto piccole e difficili a reperirsi. Perciò si ritiene che nel periodo della deposizione, durante il quale il metabolismo del calcio è particolarmente elevato, si abbia negli uccelli una maggiore attività delle paratiroidi.

Non concorda con queste vedute quanto era stato rilevato da Bottini e Spisni (1947) ⁽⁴⁾ i quali con la somministrazione di paratormone avevano ottenuto nelle galline non un aumento, ma una diminuzione del peso del guscio dell'uovo. Tale osservazione è contraria alle attuali conoscenze sul meccanismo di azione dell'ormone paratiroideo e poichè l'argomento ha un'importanza di carattere generale per il metabolismo del calcio si sono voluti ripetere gli esperimenti di Bottini e Spisni (loc. cit.) con tecnica diversa.

Wilhelm (1940) ⁽⁵⁾ e Berg (1945) ⁽⁶⁾ avevano osservato che lo spessore del guscio varia a seconda della posizione dell'uovo in ogni singolo ciclo di deposizione e precisamente esso va progressivamente diminuendo per aumentare nell'ultimo uovo del ciclo, o negli ultimi due quando il ciclo è composto di più di

(8) Particolari circa la tecnica usata possono rilevarsi dai numerosissimi lavori della nostra Scuola, le cui indicazioni bibliografiche sono state riassunte da A. ALIBRANDI, «Atti R. Acc. Peloritana», 44, 122 (1942).

(9) È noto come nei cani non predisposti il trattamento generale con adeguate dosi di stricnina, classico fattore preparante, non sia capace di instaurare lo stato di disposizione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Veterinaria dell'Università di Sassari.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1951.

(1) O. RIDDLE, V. M. RAUCHE e G. C. SMITH, «Endocrinol.», 36, 41 (1945).

(2) J. BENOIT e J. CLAVERT, «C. R. S. B.», 139, 743 (1945); «Ass. Anatomistes», Paris, 50 27 (1947).

(3) A. ROMANOFF e A. ROMANOFF, *The Avian Egg*. Wiley e Sons, 1949, New York.

(4) F. BOTTINI e D. SPISNI, «Zootecnica e Veterinaria», 2, 121 (1947).

(5) L. A. WILHELM, «Poultry Sci.», 19, 246 (1940).

(6) L. R. BERG, «Poultry Sci.», 24, 555 (1945).

tre uova. Manunta (1951)⁽⁷⁾ occupandosi dello stesso argomento, in esperimenti preliminari per questo lavoro, aveva concluso che la secrezione del carbonato di calcio per la formazione del guscio va, nelle uova succedentesi in ogni ciclo, affievolendosi e che il maggiore spessore del guscio delle ultime uova dipende da una prolungata permanenza di esse nella camera calcigena. Lo spessore del guscio è poi maggiore all'inizio della stagione di riproduzione e va quindi diminuendo (Conrad 1939⁽⁸⁾, Wilhelm loc. cit.). Bottini e Spisni (loc. cit.) avevano condotto la loro indagine prendendo come peso di confronto il peso medio del guscio delle uova prodotte durante un determinato periodo di tempo. In un periodo successivo essi iniettavano, a giorni alterni, dell'estratto paratiroideo prendendo quindi in esame il peso medio del guscio delle uova deposte in questo secondo periodo. È evidente che con questo metodo non si potevano osservare variazioni del peso del guscio (a meno che queste non fossero molto rilevanti) in quanto esse venivano ad essere mascherate dal progressivo assottigliarsi del guscio.

MATERIALE E TECNICA. — Vennero impiegate n. 6 galline del peso medio di Kg. 1,5-2,0, di razza comune. I soggetti, tenuti isolati in apposite gabbie, venivano alimentati con una dieta costante e con sali di calcio *ad libitum*. Per ogni gallina venne preso in considerazione il peso dell'uovo e del guscio di due cicli di deposizione successivi. La somministrazione dell'ormone paratiroideo venne fatta durante il secondo ciclo. L'iniezione veniva praticata sottocute quando l'uovo sul cui guscio si voleva influire era appena giunto nella camera calcigena dove esso soggiorna per 20-24 ore. Per saggiare l'azione dell'ormone paratiroideo si è praticata l'iniezione prima della deposizione del secondo uovo in un ciclo di due o tre uova (galline nn. 1, 2, 3, 4, 6) e prima della deposizione del terzo uovo in un ciclo di cinque uova (gallina n. 5). Queste avrebbero dovuto avere sempre un guscio di spessore minore di quello dell'uovo precedente.

Per i primi cinque casi è stato usato ormone paratiroideo preparato secondo il metodo di L'Heureux, Teppermann e Wilhelmi⁽⁹⁾ partendo da paratiroidi fresche prelevate nel locale macello. L'attività dell'estratto venne volta per volta saggiata sul cane. Al soggetto n. 6 vennero iniettate 100 U. S. Ph. dell'ormone paratiroideo Lilly.

Le uova venivano coagulate con l'ebollizione e sgusciate. Il guscio veniva seccato in stufa a 95°-100° fino a peso costante. Si è calcolato quindi il peso del guscio per unità di superficie dell'uovo. L'area è stata ottenuta applicando la formula riportata da Romanoff e Romanoff (loc. cit.) $S = KP^{2/3}$ (dove S = superficie, K = 4,558, P = peso dell'uovo).

RISULTATI. — I dati numerici figurano per brevità soltanto nei grafici a p. 222. Questi sono stati costruiti riportando il peso del guscio per cm² di superficie dell'uovo. La proporzione che esiste fra i vari valori è data dalla scala annessa. Per comodità i singoli grafici sono stati poi riuniti in un solo diagramma.

(7) G. MANUNTA, « Arch. Sc. Biol. », 35, 233 (1951).

(8) D. M. CONRAD, « Poultry Sci. », 17, 240 (1939).

(9) M. V. L'HEUREUX, H. M. TEPPERMAN e A. E. WILHELMI, « J. Biol. Chem. », 168, 167 (1947).

I tracciati affiancati si riferiscono alla stessa gallina: quello di sinistra rappresenta le variazioni normali dello spessore del guscio durante un ciclo di deposizione, quello di destra le variazioni di detto spessore sotto l'influenza dell'ormone paratiroideo. Il punto segnato con un cerchietto indica l'uovo deposto dopo la somministrazione del paratormone.

Dall'esame dei grafici risulta che il peso del guscio per unità di superficie è aumentato rispetto al peso del guscio dell'uovo precedente in seguito alla somministrazione di ormone paratiroideo nelle galline nn. 1, 3, 4, 5, 6, non è diminuito, come avrebbe dovuto essere di norma) nella gallina n. 2. Nel soggetto n. 4 dove il ciclo è composto di due uova l'aumento dello spessore del guscio

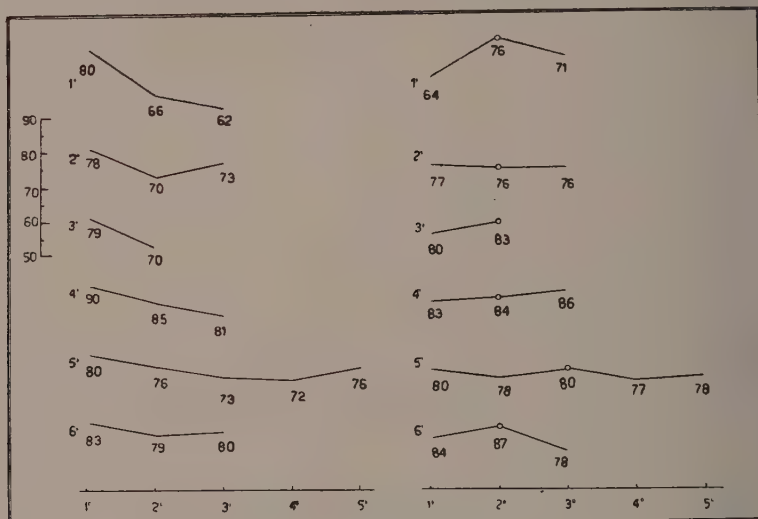


Fig. 1. - Peso di un cm² di guscio espresso in mg. in due cicli successivi di deposizione di sei galline diverse. Il cerchietto nel secondo ciclo (a destra) di ciascuna gallina indica il peso del guscio deposto sotto l'azione dell'ormone paratiroideo. A sinistra l'andamento dei valori nel ciclo di confronto.

del 2° uovo non è un indizio sicuro dell'azione dell'ormone paratiroideo in quanto, sebbene non frequentemente, il peso del guscio del secondo uovo, nei cicli di due uova, può essere maggiore di quello del primo.

Il periodo di permanenza dell'uovo nell'ovidotto non ha subito variazioni.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - L'aumento dell'eliminazione del calcio per opera dell'ormone paratiroideo è un fenomeno d'intensità variabile (pur essendo l'aumento dello spessore del guscio costante) e tanto più significativo se si considera che nelle uova ottenute dopo il trattamento esso avrebbe dovuto essere in tutti i casi più sottile. La variabilità dev'essere imputata alla diversa attività degli estratti impiegati.

Nel caso n. 6 per esempio nel quale è stata impiegata una quantità nota e cioè 100 U. S. Ph. di ormone paratiroideo e dove i gusci delle prime due uova

di ciascun ciclo avevano approssimativamente lo stesso peso e cioè gr. 5,73 (nel 1° ciclo) e gr. 5,87 (nel 2° ciclo) con una superficie di 71,47 cm² e 71,93 cm², il guscio del secondo uovo del primo ciclo pesava gr. 5,44 con una superficie di 69,24 cm², mentre il guscio del secondo uovo del secondo ciclo (ottenuto dopo iniezione di paratormone) pesava gr. 5,83 pur avendo una superficie minore e cioè di 67,51 cm². Ammettendo che il secondo uovo del secondo ciclo avesse il guscio dello spessore dell'omologo del primo, il peso del suo guscio può essere calcolato moltiplicando il peso dell'unità di superficie del guscio dell'uovo omologo per la sua superficie. Il valore così ottenuto, gr. 5,33, sottratto da gr. 5,83 (peso reale del guscio dell'uovo trattato con ormone paratiroideo) rappresenta la quantità di guscio che è stata formata in più sotto l'azione del paratormone; questa è uguale a gr. 0,5 pari al 9,4%.

I risultati dei presenti esperimenti si possono considerare omologhi a quelli osservati in pecore in lattazione dove con la somministrazione di estratti paratiroidei si è avuto un notevole aumento del contenuto in calcio del latte (Manunta e Mureddu 1951⁽¹⁰⁾).

Evidentemente il paratormone aumentando la quota diffusibile del calcio, come risulta anche dagli esperimenti di Gilligan e collaboratori (1933)⁽¹¹⁾ i quali iniettando paratormone hanno visto aumentare il contenuto in calcio del liquido cefalo-rachidiano e dei trasudati, favorisce la sua eliminazione.

CONCLUSIONI. — Nella gallina la somministrazione di estratto paratiroideo fa aumentare il peso del guscio dell'uovo per unità di superficie e favorisce quindi l'eliminazione del calcio anche attraverso l'ovidotto.

Biologia. — *Morfologia comparata e causale delle connessioni tra cinto pelvico e colonna vertebrale e tra cinto anteriore e sterno negli Anfibi*^(*). Nota^(**) di TEODORO PERRI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

La morfologia comparata degli arti, e delle connessioni del cinto pelvico con la colonna vertebrale e del cinto anteriore con lo sterno, è stata già argomento di numerosi studi, nei quali si è tenuto ampiamente conto del modo di locomozione delle varie forme di Vertebrati.

Le ricerche di embriologia sperimentale sulle varie regioni della colonna vertebrale non hanno avuto finora adeguato svolgimento. Invece per i rapporti tra colonna vertebrale e cinto pelvico vi sono le esperienze, di notevolissimo interesse, del Dürken⁽¹⁾ sugli Anuri, più recentemente estese negli Urodeli dalla

(10) G. MANUNTA e F. MUREDDU, « Archivio di Fisiologia », 1951 in corso di stampa.

(11) D. R. GILLIGAN, M. C. VOLK e D. M. ALTSCHULE, « J. Biol. Chem. », 103, 745 (1933).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1951.

(1) B. DÜRKEN, « Z. wiss. Zool. », 99, 1912; *Experimental analysis of development*. New York, 1932.

Dragomirowa⁽²⁾. Il comportamento della regione sacrale è uno degli argomenti dove si vede molto chiaramente quanto sia vantaggioso seguire, confrontandone i risultati, i vari indirizzi di studio della morfologia: comparata, ecologica, sperimentale.

Da alcuni anni mi occupo della determinazione di arti soprannumerari soprattutto in *Bufo vulgaris*⁽³⁾, ed ho ottenuto numerosi casi di arti, completi di emicinto, con lo scheletro assai ben conformato. Nei lavori di quest'anno⁽⁴⁾ non ho mancato di accennare all'interesse che alcuni miei risultati presentano dal punto di vista della morfologia comparata. Mi sembra non sia fatica vana approfondire il significato di detti risultati, confrontandoli con i dati che già conosciamo dall'anatomia comparata; mi sono cioè proposto di ricercare quali contributi lo studio degli arti soprannumerari, ed i risultati delle altre esperienze collaterali che vado eseguendo, possano apportare alla conoscenza della morfologia degli arti (scheletro, muscolatura, innervazione). In questa Nota desidero occuparmi dei rapporti tra cinto pelvico e colonna vertebrale, cioè a dire della morfologia causale della regione sacrale, avendo ottenuto su questo punto risultati che mi paiono di un certo interesse; tratterò pure, ma molto più brevemente, dei rapporti tra cinto anteriore e sterno. Ho in preparazione il lavoro in esteso con la relativa documentazione iconografica.

LA REGIONE SACRALE. - Come ho sopra accennato, la morfologia comparata dei Vertebrati e la morfologia ecologica mettono in evidenza una stretta correlazione tra regione sacrale, cinto pelvico e arti posteriori. Questi ultimi a loro volta presentano uno sviluppo diverso a seconda della loro importanza nella locomozione. Alcune forme, quali ad esempio i Gimnofioni tra gli Anfibi e gli Ofidi tra i Rettili, non hanno per nulla arti e non presentano i cinti, nè pelvico nè toracico, e neppure una regione sacrale.

Nei Mammiferi pisciformi, cioè nei Cetacei e nei Sirenni, nei quali l'organo locomotore è la coda, gli arti posteriori sono del tutto rudimentali, mentre gli anteriori sono pinniformi. Il loro cinto pelvico è ridottissimo. Nei Cetacei non prende rapporti con la colonna vertebrale e non vi si ha il differenziamento di una regione sacrale: cioè a dire le relative vertebre si presentano costituite come le precedenti o come le seguenti. Nei Sirenni il cinto pelvico, pur sempre rudimentale, è un po' meglio conservato e si mette in rapporto, mediante legamenti,

(2) N. DRAGOMIROWA, «Jb. Abt. allg. Zool. u. Physiol.», 54, 1935 (Rec. in «Ber. wiss. Biol.», 34, 1935).

(3) Quest'anno ho avuto in *Hyla arborea* un caso (su due) di arto soprannumerario con iniziato il differenziamento cartilagineo del suo scheletro, e senza alcun rapporto nè con lo scheletro assile nè con lo scheletro degli arti del portatore. La tecnica è consistita nel trapianto, sul tronco di embrione normale, della parte apicale della testa di embrioni trattati con dosi nettamente letali di raggi X. Questo caso merita di essere segnalato perchè i reperti sperimentali di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri sono stati finora ottenuti solo su pochissime specie.

(4) T. PERRI, Ricerche sperimentali sull'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri («*Bufo vulgaris*») in «Memorie dell'Accad. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. III, fasc. 2°, sez. III, 1951; Sui rapporti tra cinto pelvico e colonna vertebrale negli Anfibi desunti dalla Morfologia sperimentale e dalla Morfologia comparata in «Lavori dell'Istituto di Anatomia comparata B. Grassi dell'Università di Roma», vol. IX, 1951.

con una vertebra sacrale; la quale però non è ritenuta veramente tale da alcuni autori, che quindi considerano i Sireni come anch'essi mancanti di una regione sacrale. Nei Pinnipedi, che sono adattati a vita essenzialmente acquatica, le condizioni sono diverse perchè essi nuotano non con la coda bensì con gli arti, o posteriori (foche) o anteriori (otarie).

Per quanto dovrò dire nel seguito di questo lavoro, è bene esporre un po' più a lungo le condizioni che si hanno negli Anfibi Anuri. La regione sacrale è in essi più sviluppata che negli Urodeli, in rapporto con il salto, particolarmente accentuato in alcune forme di Anuri.

È interessante notare che il differenziamento della regione sacrale, cioè lo stabilirsi dei rapporti tra colonna vertebrale e cinto pelvico, avviene poco prima che si completi la metamorfosi, il che coincide con il momento in cui l'organo locomotore non è più la coda bensì gli arti, e coincide pure, per la massima parte degli Anuri, con la fine della vita interamente acquatica.

Rammento che, secondo la concezione di Gegenbaur, le vertebre sacrali vere o primarie sono caratterizzate dall'essere articolate con l'ileo; e dal fatto che tale rapporto avviene mediante una costa (per quanto molto breve a causa del differenziamento regionale), detta appunto costa sacrale. Questa è generalmente fusa con il sacro, e solo in alcune forme (ad esempio nei Coccodrilli) conserva la sua individualità. È tuttavia generalmente ammesso che negli Anuri manchi una costa sacrale, ma su questo punto dovrò ritornare tra poco.

Negli Anuri vi sono, nella maggior parte delle specie, otto vertebre presacrali e una (la nona) sacrale, cui segue l'urostilo. Numerose discussioni furono fatte a proposito del significato morfologico delle coste degli Anfibi: Gegenbaur, Fick, Knickmeyer, Göppert e molti altri se ne occuparono giungendo a conclusioni tutt'altro che concordanti, tanto che tuttora la loro omologia ha dei punti dubbi. Qui è sufficiente ricordare che all'idea che le coste rappresentino solo un maggiore accrescimento dei processi trasversi, finì con il prevalere la concezione che le coste hanno una loro individualità, la cui valutazione morfologica, negli Anfibi Anuri, mi propongo di riesaminare con la cooperazione dei vari metodi d'indagine.

Le sopradette ricerche sulle coste riguardano essenzialmente gli Urodeli. Gli Anuri presentano una notevolissima riduzione delle coste, e molte specie ne sono prive. Nei Discoglossidi ve ne sono tre, in rapporto con la 2^a-3^a-4^a vertebra; in esse si notano processi detti *Processi recurvati* o *uncinati*, che sono presenti pure in alcune specie di Anuri senza costole; e perciò in quest'ultime specie si ammette che le costole non sono assenti bensì fuse con i processi trasversi. Da notare che in *Bufo* le costole sono, nell'ontogenesi, dimostrabili per la 2^a-3^a-4^a vertebra come piccoli centri cartilaginei. Negli Urodeli si è riconosciuta la presenza di una coppia di coste sacrali, che invece negli Anuri mancherebbero. Si ammette adunque che negli Anuri il processo trasverso (qui detto pure processo laterale) della vertebra sacrale sia essenzialmente omologo ai processi trasversi delle altre vertebre.

Se, per riferirci ad un esempio concreto, osserviamo quanto avviene nello sviluppo di *Bufo vulgaris* (ho avuto occasione di osservarne numerosi casi), ci si accorge che ad uno stadio di larva abbastanza avanzata, la nona vertebra possiede

un processo trasverso che ben poco differisce da quello, ad esempio, dell'ottava vertebra. Si osserva poi il costituirsi di un grosso cordone di cellule mesenchimatiche che dall'apice del processo trasverso della nona vertebra si estende sino all'apice dell'ileo, che intanto sviluppandosi si è avvicinato al margine laterale della vertebra sacrale, il quale apparirà poi in continuazione, perdutasi la linea di separazione, con il processo trasverso, mentre nell'altro capo, in corrispondenza dell'ileo, si formerà l'articolazione sacro-iliaca. Si ha quindi l'impressione di trattarsi di qualcosa che si aggiunge al processo trasverso, e non di un suo semplice accrescimento. Potrebbe trattarsi di una costa sacrale. Questa esiste negli Urodeli, ed al fatto che la si ritenga mancante negli Anuri non si può dare un valore assoluto, particolarmente per le incertezze che ancora rimangono su questo argomento.

Ho accennato alle esperienze del Dürken sui rapporti tra cinto e colonna vertebrale. Questo autore (1912) in una serie di ricerche su giovanissime larve di *Rana fusca* estirpò unilateralmente l'abbozzo dell'arto posteriore; in tal modo riuscì ad avere individui in metamorfosi privi di un arto posteriore. Notò in questi, sul lato operato, l'assenza dell'emicinto e della relativa muscolatura, e notevole deficienza dei nervi corrispondenti. Inoltre osservò la mancanza, sullo stesso lato, del processo laterale della vertebra sacrale e parlò chiaramente di correlazione tra cinto e vertebra sacrale. Più recentemente (1935) la Dragomirowa ha esteso questi risultati all'*Axolotl*, notando, con esperienze di trapianti e di asportazioni, che la sacralizzazione della 17ª vertebra è in correlazione con la presenza dell'ileo.

I miei risultati provengono da due serie di esperienze: da asportazioni nelle quali ebbi la mancanza di un arto posteriore; e da esperienze d'induzione di un arto posteriore soprannumerario (sono quest'ultime, in sostanza, la parte originale delle mie ricerche).

La mancanza di un arto può ottenersi sperimentalmente in varie maniere. Così nei casi del Dürken la si ebbe mediante ampia asportazione del relativo abbozzo sicchè, anche in rapporto con la specie usata, non si ebbe rigenerazione. Altri casi furono ottenuti dal Filatow mediante trapianto, in vicinanza della zona dell'arto, di un'otocisti: egli interpreta che l'otocisti attragga a sè le cellule mesenchimatiche destinate a formare l'arto e che ora invece formeranno la capsula otica: si avrebbe quindi un cambiamento di destino. Anche altri trapianti, secondo le esperienze di vari Autori ed anche mie, possono inibire lo sviluppo di un arto senza però che in questi casi entri in gioco un cambiamento di destino: ebbi occasione di osservarne alcuni casi, tra cui uno in *Discoglossus pictus* (v. la mia Memoria, caso n. 161).

Nei casi che qui descrivo avevo asportato, in embrioni di *Bufo vulgaris* allo stadio in cui sono da pochissimo iniziate le contrazioni, un'ampia parte di cute della metà posteriore del tronco insieme con il sottostante mesenchima e con tuorlo. In alcuni degli embrioni così operati e che giunsero alla metamorfosi, la soluzione di continuo si riparò in gran parte ma non interamente, sicchè una parte dell'ammasso intestinale faceva ernia in una stretta zona simmetrica all'origine apparente dell'arto normale. In questi casi, sul lato operato, l'arto mancava completamente, oppure se ne sviluppò uno piccolissimo, atrofico ed atipico.

L'esame microscopico del materiale finora seriato mostra anzitutto, nei casi di assenza totale di un arto, che manca pure e completamente l'emicinto corrispondente e la relativa muscolatura. Casi di mancanza dell'arto libero e contemporanea presenza dell'emicinto non ne ho finora osservati, benchè teoricamente possibili in base ai risultati, ottenuti con tutt'altra tecnica, di Balinsky e miei d'induzione di un emicinto pelvico senza il corrispondente arto libero. È inoltre chiarissima la deficienza dei nervi relativi all'arto mancante. Quest'ultimo fatto rientra nel più vasto quadro dei rapporti tra gli arti e la loro innervazione, del quale argomento si sono già occupati vari autori; tra i primi che vi applicarono la tecnica dei trapianti, ricordo Braus, Banchi, Gemelli, Dürken⁽⁵⁾.

Passando ora alla parte che qui interessa di più, cioè al comportamento della vertebra sacrale, osservo (ved. fig. 1) che mentre dal lato normale si è regolarmente

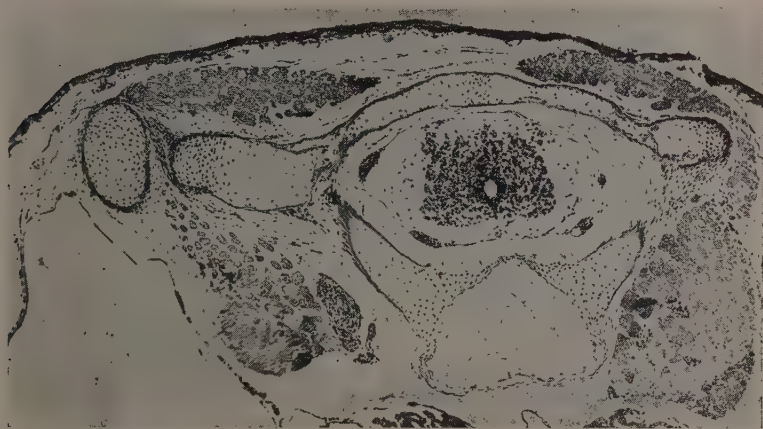


Fig. 1. — *Bufo vulgaris* in metamorfosi. Mancanza totale dell'arto posteriore sinistro e del suo emicinto. Si osservi che il processo laterale sinistro della vertebra sacrale è assai piccolo (come nelle vicine vertebre); a destra condizioni normali.

sviluppato il processo laterale che si articola con l'apice dell'ileo, invece sul lato operato vi è un semplice processo trasverso, come quello delle vicine vertebre, o, a volte, ancora più piccolo.

Nei casi nei quali sul lato operato si è sviluppato un arto assai piccolo, manca, come nei casi di assenza totale dell'arto, il processo laterale della vertebra sacrale.

Adunque questa serie di ricerche conferma i risultati del Dürken, e ribadisce la correlazione tra emicinto e sacralizzazione della nona vertebra.

Dalle esperienze sopradette rimane ancora impreciso il senso del termine « correlazione », in quanto non chiarisce se trattisi di un'induzione da parte dell'ileo o se trattisi di qualcos'altro. È proprio questo il punto che viene chiarito dai risultati delle mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari.

(5). Ho finora trascurato pressochè del tutto di occuparmi dei rapporti tra arti soprannumerari da induzione anormale, nervi e sistema nervoso centrale, essendo mia intenzione dedicarvi uno studio apposito.

In *Bufo vulgaris* ho ottenuto numerosissimi casi di arti soprannumerari usando soprattutto la tecnica del trapianto, sul tronco di embrioni normali, della parte apicale della testa di embrioni trattati con dosi nettamente letali di raggi X: in tali condizioni si ha che il trapiantato costituisce, a causa della sua citolisi conseguente alla röntgenirradiazione subita, un forte stimolo che attiva la piastra laterale, la quale prolifera mesenchima formando un arto soprannumerario (abbozzo scheletrico).

Orbene, in casi di arti posteriori ben conformati, si è avuta l'induzione, contemporaneamente: 1° di un arto libero; 2° di un emicinto pelvico; 3° di una cartilagine (ved. fig. 2) che si articola con l'apice dell'ileo dell'emicinto soprannumerario; detta cartilagine, per questo suo rapporto con l'ileo, per le sue dimensioni, ed anche per la forma, risulta essere, probabilmente, un processo laterale



Fig. 2. - Determinazione, in *Bufo vulgaris*, di un arto soprannumerario posteriore scheletricamente ben conformato e con emicinto (v. Perri, Memoria Accademia Lincei, 1951, caso n. 55). In figura: parte dell'ileo che al suo apice si articola con una cartilagine a sezione rotondeggiante, interpretabile come processo laterale di vertebra sacrale.

di vertebra sacrale. Preciso che gli arti soprannumerari dei quali qui parlo sono del tutto indipendenti dallo scheletro assile (e dallo scheletro degli arti) del rospetto portatore; e che l'apice dell'ileo è assai lontano dalla colonna vertebrale (a volte addossato alla parte mediana della parete ventrale del portatore).

Adunque, dal complesso dei fatti esposti risulta, come molto probabile, che anche negli Anuri esista una costa sacrale; e che questa si formi in rapporto con l'ileo e prenda connessioni con la vertebra sacrale, con la quale si fonde. In questo modo di vedere rientra, come caso particolare, la mancanza (di cui ho avuto prova sperimentale) di un processo laterale in mancanza dell'ileo. A questa conclusione, sulla formazione di un processo laterale di vertebra sacrale da parte dell'ileo, ero già giunto nella mia Memoria del marzo di quest'anno.

STERNO E CINTO SCAPOLARE. - È ben noto che negli Anfibi Anuri il cinto anteriore è costituito dal procoracoide (nell'adulto in parte o totalmente sostituito

dalla clavicola), dal coracoide, dalla scapola e dal soprascapolare; il coracoide ed il procoracoide sono tra loro uniti dall'epicoracoide, che negli Arciferi (ai quali appartiene il *Bufo*) sono accavallati. Lo sterno consta dell'omosterno (o episterno o elemento prezonale) d'incerta omologia e che manca negli Arciferi; e di un pezzo posteriore che è lo xisterno (o sterno o elemento postzonale). Lo sterno degli Anfibi (perciò detto Archisterno) è generalmente considerato non omologo allo sterno degli Amnioti (Neosterno o Sterno costale). Da notare che negli Anuri le varie parti del cinto e dello sterno assumono un completo differenziamento intorno al periodo della metamorfosi (vi sono variazioni secondo la specie), cioè quando inizia l'effettiva funzionalità degli arti. È interessante osservare che nei Lacertili apodi lo sterno si riduce e può perdere ogni connessione con le coste, e che nei serpenti manca uno sterno: ciò può essere in rapporto oltre che con la riduzione o assenza del cinto anche con riduzioni muscolari. Anche nei Gimnofioni manca lo sterno.

Per l'origine dello sterno negli Anfibi, alcuni Autori seguono la teoria della sua provenienza dal cinto; altri sono per una sua origine a sè stante, indipendente dal cinto. Molto notevoli a questo riguardo sono le ricerche del Braus del 1919 (citato dal Remane⁽⁶⁾), che osservò in *Bombinator* che l'asportazione dell'abbozzo dell'emicinto non impediva lo sviluppo dello sterno. Ciò particolarmente per l'elemento postzonale perchè per l'elemento prezonale (omosterno), la cui omologia ho già ricordato essere incerta, l'origine dal cinto è considerata probabile.

Le mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari hanno mostrato, nei casi scheletricamente meglio conformati di arti anteriori, la presenza, oltre che dell'arto libero, di un emicinto completo con coracoide, procoracoide, epicoracoide, scapolare e soprascapolare; ma non ho mai osservato l'induzione di cartilagini che si possano considerare come sternali.

Per questa parte delle mie ricerche mi limito a rilevare che vi è accordo con i risultati sopraricordati del Braus. Tuttavia esse non mi permettono ancora di esprimermi in modo reciso sull'origine dello sterno. Vi occorre più ampia sperimentazione e da vari punti di vista: è tra l'altro da esaminare se l'induzione abbia potuto estrinsecare, nelle mie esperienze, tutte le sue capacità morfogenetiche, tenendo presente che in molti casi l'arto soprannumerario indotto è stato incompleto.

CONCLUSIONI. — Da quanto è stato sopra esposto risulta molto probabile che debba ammettersi anche negli Anfibi Anuri l'esistenza di una costa sacrale; e che poi questa si salda e si fonde con il processo trasverso della vertebra sacrale, mentre all'altro capo si articola con l'apice dell'ileo.

La costa sacrale, assai probabilmente, appartiene morfologicamente all'emicinto e più precisamente all'ileo.

Nell'induzione di arti anteriori soprannumerari non si sono finora avute parti interpretabili come sternali.

(6) A. REMANE, in: «Hdb. d. vergl. Anatomie d. Wirbeltieren», Bd. IV, Berlin, 1936.

Fisiologia vegetale. — *Azione dell'eteroauxina sulla sintesi d'amido dal glucosio-I-fosfato in stomi isolati di Iris* (*). Nota (**)
di ERASMO MARRÉ e PAOLA PROFUMO, presentata dal Corrisp.
E. REMOTTI.

Numerosi dati dimostrano l'azione delle sostanze di crescita sul ricambio dell'amido nella pianta. Così, un acceleramento della lisi risulta dal trattamento con eteroauxine diverse degli organi più disparati (cfr. Borgstroem⁽¹⁾, per la radice; Mitchell e coll.^(2,3), per la foglia; Beal⁽⁴⁾, per sezioni di internodi di fagiolo; King⁽⁵⁾ per i semi germinanti). D'altro lato, l'azione sull'amido non sembra limitarsi allo stimolo della lisi: Bausor⁽⁶⁾, mentre ritrova un'accelerazione di questa, su sezioni di fusto, per le più basse concentrazioni di auxina, osserva, per concentrazione di 0,02 %, un ritardo dello stesso processo; mentre dai dati di Zica⁽⁷⁾ sui cereali risulterebbe addirittura uno stimolo alla sintesi, da parte delle massime concentrazioni auxiniche, su semi in via di maturazione.

In una serie di ricerche intese a studiare l'eventuale componente auxinica nell'effetto amilofissatore esplicato dal seme e dai centri fiorali sui tessuti vicini, uno di noi (Marré⁽⁸⁾) aveva trovato che l'applicazione di preparati eterauxinici blocca energicamente quella lisi dell'amido e quella parallela attivazione amilaseica, che subentrano normalmente come effetto della castrazione e della semectomia⁽⁹⁾. D'altro lato in fiori ovariectomizzati all'antesi, l'applicazione di auxina ad alta concentrazione viene ancora a sostituire l'effetto normale della fecondazione, nel determinare un'intensa sintesi d'amido nel peduncolo e nei ricettacoli⁽⁸⁾.

Questi dati aprono un nuovo campo di lavoro, il cui interesse deriva, da un lato, dalla universale diffusione delle auxine nelle piante, dall'altro, dalla grande importanza che in queste assume il problema della regolazione delle riserve glucidiche.

Come primo punto, la molteplicità delle azioni, anche opposte, sin qui segnalate implica la necessità di definire ulteriormente le effettive possibilità di questi ormoni nel giuoco glucidico: quanto cioè gli effetti osservati dipendano dalle concentrazioni usate, in rapporto alla sensibilità del materiale studiato, e quanto, eventualmente, da differenze di meccanismo. Questo, infatti, può essere diretto, per un'azione dell'auxina sul protoplasma, o indiretto, per il tramite

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1951.

(1) BERGSTRÖM (1939). *The transverse reactions of plants*. — Lund.

(2) J. W. MITCHELL, E. J. KRAUS and M. R. WHITEHEAD (1940). « Bot. Gaz. », 102, 1.

(3) J. W. MITCHELL and M. R. WHITEHEAD (1940). « Bot. Gaz. », 102, 2.

(4) J. M. BEAL (1940). « Bot. Gaz. », 102, 2.

(5) KING CHEN CHUNG (1947). « Bot. Bull. Acad. Sinica », 1, p. 9.

(6) C. BAUSOR (1942). « Bot. Gaz. », 104, 1.

(7) M. ZICA (1940). « Sch. Agric. and Forestry », Brno, Czechoslovakia, « Zemedel Arch. », 31, p. 509.

(8) E. MARRÉ (1949). « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 25, 3.

(9) E. MARRÉ (1947). « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 23, 1; (1948), *ibid.*, 24, 5.

di altri principi che, risvegliati (Dettweiler⁽¹⁰⁾) o richiamati dall'auxina, siano gli immediati fattori della reazione sull'amido.

Il che porta, di conseguenza, la necessità di un materiale dove sia possibile, sia ottenere con relativa facilità sintesi e lisi, sia poi, agire direttamente sulle cellule, dove queste reazioni si svolgono, senza l'interposizione di elementi annessi.

Un materiale rispondente a queste esigenze ci è apparso negli stomi. Facilmente isolabili, con lembi epidermici, dalla trama dei tessuti fogliari, essi sono dotati di una singolare possibilità di sopravvivenza (Thielmann⁽¹¹⁾, Ruge⁽¹²⁾, Alvim⁽¹³⁾) e, si prestano assai bene, d'altro lato, all'osservazione del movimento dell'amido, come emerge dalle ricerche di Yin e Tung⁽¹⁴⁾, che ottengono — dopo la lisi, determinata dal digiuno, dell'amido originariamente presente — un intenso effetto di sintesi per immersione in soluzioni contenenti glucosio-1-fosfato.

Su questo materiale, abbiamo studiato l'azione dell'eteroauxina a concentrazioni diverse, sia sulla sintesi che sulla lisi.

MATERIALI E METODI. — Per la facilità con cui è possibile ottenerne estese spellature epidermiche, nelle nostre esperienze abbiamo usato foglie di *Iris florentina*. I lembi epidermici, accuratamente selezionati, venivano conservati in liquido di Shive diluito a 1/5 e tamponato a pH 6,7 con fosfato di potassico; l'utilità del tamponamento era suggerita, oltre che da ovvi motivi d'ordine generale, dai dati di Small⁽¹⁵⁾, William e Shipton⁽¹⁶⁾ ecc., sulla relazione tra comportamento degli stomi e acidità del mezzo.

Il glucosio-1-fosfato necessario per la sintesi era stato da noi preparato come sale potassico, secondo Summer e Somers⁽¹⁷⁾, e si presentava praticamente puro, esente da esteri esosiofosforici riducenti, da glucidi riduttori e da fosfati inorganici.

Nelle prime esperienze l'eteroauxina (acido indol-acetico o, in talune, indolbutirrico) veniva aggiunta direttamente al liquido di cultura, contemporaneamente al Gl. 1 P, nello stesso momento in cui vi si immergevano gli stomi; ma, dopo una serie di tentativi con risultati alquanto irregolari, abbiamo standardizzato la tecnica sul seguente schema:

1° prelievo del materiale nelle prime ore del mattino e sua permanenza in acqua di fonte fino a scomparsa dell'amido eventualmente presente;

2° preparazione, dal medesimo lembo epidermico, di piccoli quadrati di 5 mm. di lato e passaggio dei saggi al trattamento auxinico, per immersione di due-tre ore in liquido di Shive addizionato a eteroauxina alle diverse concentrazioni, mentre i controlli vengono mantenuti per lo stesso periodo in liquido di Shive semplice;

(10) C. DETTWEILER (1942). « *Planta* », 33, 2.

(11) M. THIELMANN (1924). « *Ber. d. Bot. Gesell.* », 42, p. 429.

(12) U. RUGE (1943). *Uebungen zur Wachstumsphysiologie der Pflanze*, Springer, Berlin.

(13) P. T. ALVIM (1949). « *Am. J. of Bot.* », 36, p. 781.

(14) YIN and V. T. TUNG (1948). « *Science* », 103, p. 87.

(15) J. SMALL and K. M. MAXWELL (1939). « *Protoplasma* », 32, p. 272.

(16) W. T. WILLIAMS and M. E. SHIPTON (1950). « *Phys. Plantarum* », 3, p. 479.

(17) J. B. SUMMER and G. F. SOMERS (1943). « *Arch. of Bioch.* », 4, p. 11.

3° aggiunta, per i saggi come per i controlli, di Gl. 1 P fino a concentrazione del 0,25 %.

Questo per quanto riguarda la sintesi. Per la lisi, stomi, preventivamente caricati d'amido con Gl. 1 P, venivano portati in sol. minerale, contenente o meno auxina.

Le esperienze venivano condotte, per tutta la loro durata, all'oscurità. A intervalli determinati due frammenti venivano prelevati, rispettivamente dalle capsule di saggio e da quelle di controllo, fissati e passati al reattivo jodo-jodurato, per la valutazione dell'amido.

È questo un punto delicato della ricerca. Come segnalato da altri autori (William e Spencer⁽¹⁸⁾), esistono tra i diversi stomi di uno stesso lembo notevoli variazioni individuali di comportamento; queste ritornano anche nella sintesi dal Gl. 1 P, sì che la comparsa dell'amido appare a momenti notevolmente sfasati da stoma a stoma; d'altro lato, la carica dell'amido si rende in genere manifesta in modo brusco, sì da non permettere una valutazione precisa dell'andamento progressivo fenomeno. Infine, per ogni lembo, rimane sempre una percentuale di stomi in cui la sintesi non avviene.

La seconda difficoltà è superabile con una accuratissima scelta dei frammenti epidermici di controllo, che devono essere prelevati immediatamente vicini a quelli di saggio, dallo stesso lembo, secondo quanto già esposto sopra. Quanto alla prima, non essendo possibile, come abbiamo detto, seguire il progressivo carico medio, siamo ricorsi, per la espressione dei risultati, al conteggio percentuale del numero di stomi visibilmente carichi in intervalli successivi di tempo.

RISULTATI.

Eterauxina e sintesi dell'amido. - L'esperienza descritta nella tabella I ci dà il fenomeno in funzione del tempo. *L'eteroauxina esalta la sintesi dell'amido, aumentando nettamente la percentuale degli stomi caricatisi durante la prima fase dell'esperienza.*

TABELLA I.

Percentuale di stomi carichi d'amido dopo:

	180'	300'	480'	600'
Controlli	13	16	26	45
Indolacetico 10-5	39	41	45	47

Sintesi d'amido in stomi isolati alle 7 antimeridiane, mantenuti 5 ore in acqua, portati in soluzione di Shive diluita a 1/5, tamponata a pH 6,7. Conc. finale del Gl. 1 P, aggiunto dopo due ore, 0,25 %.

(18) W. T. WILLIAMS and G. S. SPENCER (1950). « Nature », 166, p. 34.

Peraltro, la differenza tra saggi e controlli viene attenuandosi col procedere del tempo, con una chiara tendenza, da parte dei secondi, a raggiungere i primi: evidentemente, l'effetto della auxina incide essenzialmente sulla velocità della reazione, come è anche dimostrato dal fatto che alla fine il numero di stomi rimasti privi d'amido risulta quasi eguale tra trattati e non trattati.

TABELLA II.

Percentuale di stomi carichi d'amido dopo:

	30'	90'	180'
Controlli	12	23	25
Indolacetico 10^{-8}	11	27 ^{1/2}	41
Indolacetico 10^{-7}	13	32	45
Indolacetico 10^{-6}	12	30	52
Indolacetico 10^{-5}	16	33	60
Indolacetico 10^{-4}	22	25	33

Sintesi d'amido in stomi di Iris. Condizioni di esperienza come alla tabella precedente.

Questa esperienza è in funzione della concentrazione: la stimolazione della sintesi appare direttamente proporzionale alla concentrazione, nell'intervallo tra 10^{-8} e 10^{-5} , invertendosi, presumibilmente per fattori tossici, per la concentrazione più alta.

I dati qui riportati non sono che una piccola frazione delle numerose serie di esperienze da noi condotte, tutte fra loro concordanti. Le oscillazioni di comportamento, dall'una all'altra, sono essenzialmente di ordine quantitativo, il che è facilmente comprensibile in un materiale, come lo stoma, così sensibile ai più diversi fattori ambientali.

In alcune esperienze abbiamo sostituito all'acido indolacetico l'indolbutirrico: l'effetto di questo è apparso qualitativamente uguale, ma notevolmente più attenuato (circa 10 volte), differenza che corrisponde a quella nota tra le due sostanze nei riguardi dell'effetto di crescita.

Eterauxina e lisi. - Anche qui ci limitiamo alla tabella più significativa, avvertendo che essa completamente concorda con i risultati di tutte le altre esperienze del gruppo.

L'eterauxina ritarda la lisi dell'amido con un effetto che è direttamente proporzionale alla concentrazione e che si mantiene tale anche per concentrazione elevata, a differenza di quanto osservato per la sintesi. Ciò potrebbe significare una diversa sensibilità di qualche anello dei due processi ad eventuali azioni tossiche dell'eterauxina o, forse più verosimilmente, a un diverso terreno d'azione da parte dell'auxina tra i due processi.

TABELLA III.

Stomi mantenuti 10 ore in:

	Shive 1/5	Shive 1/5 e indolacetico a concentrazione:				
		10 ⁻⁸	10 ⁻⁷	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁵
Percentuale stomi carichi d'amido.	32	39	46	56	60	63

Lisi dell'amido in stomi preventivamente caricati d'amido dal Gl. 1 P. portati in soluzione nutritizia tamponata a pH 6,8. All'inizio dell'esperienza il 66⁰/₁₀ degli stomi risultavano carichi d'amido.

CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI - I dati sopra riportati possono quindi riassumersi:

I. *Su lembi epidermici isolati l'eterauxina stimola, negli stomi, la sintesi dell'amido dal glucosio-1-fosfato e ne ritarda la lisi; stimolazione e ritardo, rispettivamente, sono in largo raggio proporzionali alla concentrazione auxinica del mezzo.*

II. *L'effetto dell'auxina sembra interessare essenzialmente la velocità dei due processi.*

Da questi risultati, il cui interesse è definito dal fatto che essi emergono da un'azione diretta dell'auxina sulla cellula, possiamo considerare dimostrata la capacità, per le sostanze di crescita, di stimolare la sintesi dell'amido e, quindi, di intervenire nell'accumulo delle riserve amilacee della pianta. Particolarmente significativo a questo riguardo è il fatto che l'effetto osservato si ottiene per concentrazioni assai minori di quelle sinora impiegate nelle esperienze sopracitate di Bausor, Zica e Marré; ed è ancora ben visibile per le più basse (10⁻⁸), che ricadono nei limiti fisiologici.

Se, dal dato di fatto passiamo a considerare il problema del meccanismo, i risultati sinora raccolti ci suggeriscono la possibilità di due vie di interpretazione.

La prima è quella di un'azione dell'auxina sulla base enzimatica del fenomeno, anche se non appare facile precisare il sistema interessato. Negli stomi la sintesi dell'amido nelle condizioni di esperienza è certamente fosforilasi; ma un'azione esclusiva su quest'enzima, che può partecipare anche alla lisi, non ci permetterebbe di comprendere il ritardo di quest'ultima. D'altro lato, è oltre-modo probabile che anche in queste cellule, come nella foglia e in genere negli altri tessuti, la lisi sia essenzialmente affidata a enzimi del tipo dell' α e β amilasi. Ora noi sappiamo che, in altro materiale (Marré⁽⁸⁾), questi enzimi sono fortemente inibiti dall'eterauxina, con parallelo effetto di blocco delle riserve amilacee: è quindi ragionevole pensare che un tale effetto inibitore giuochi anche nei nostri stomi, dove l'accelerata sintesi d'amido sarebbe allora dovuta a uno spostamento dell'equilibrio tra le due opposte azioni - sintetica della fosforilasi, litica della amilasi - a tutto favore della prima. La reazione degli stomi all'auxina verrebbe così a portare un'ulteriore conferma al concetto, già da noi in altra sede prospettato

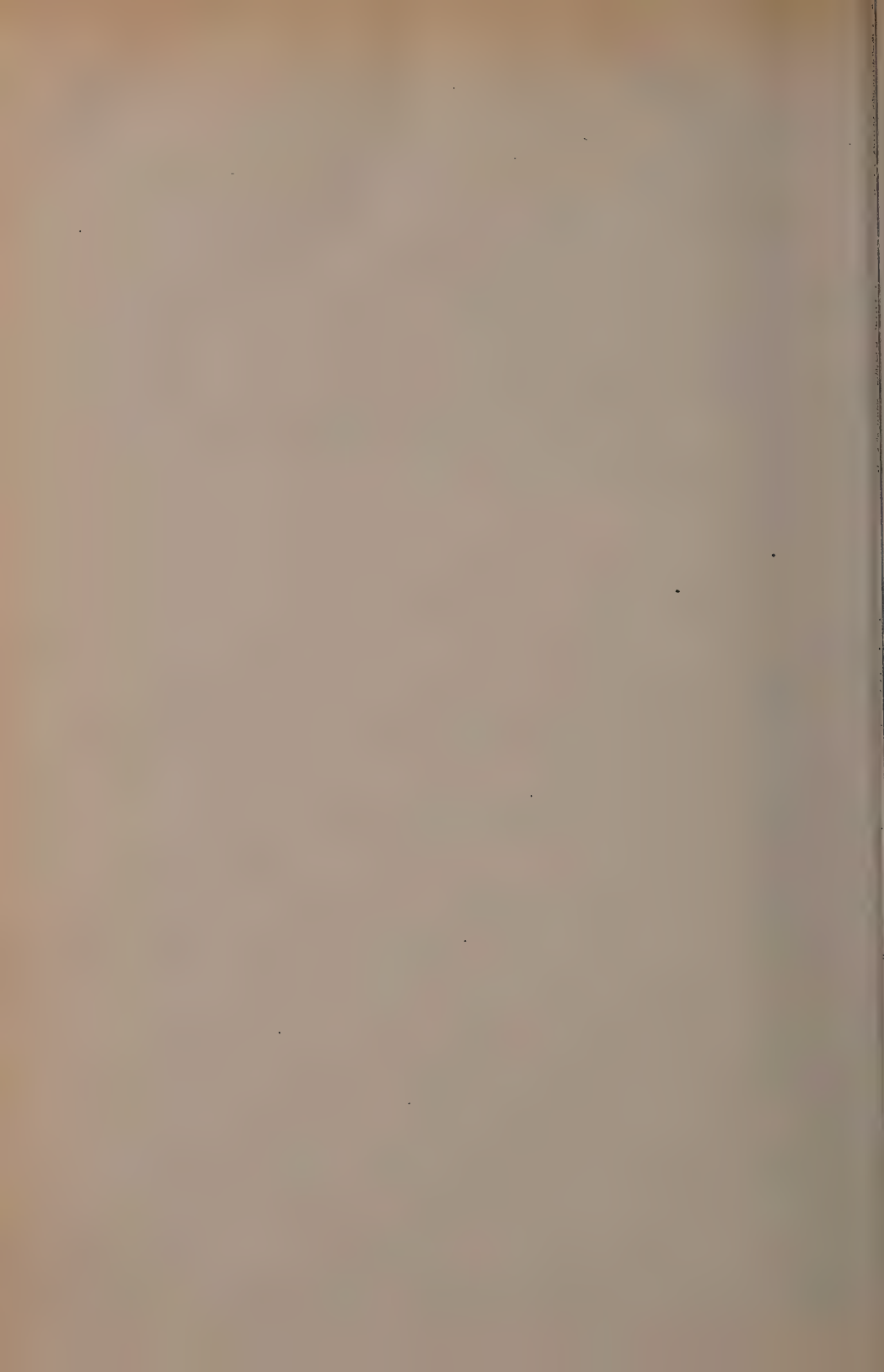
(Marré⁽¹⁹⁾), secondo cui il senso del movimento dell'amido nei tessuti sarebbe essenzialmente funzione di un tale equilibrio, tra enzimi sintetizzanti, fosforolitici ed enzimi litici, idrolitici.

Accanto a questo meccanismo enzimatico che, come abbiamo visto, ha a suo favore i risultati di numerose esperienze circa la sensibilità dell'amilasi all'auxina, ne resta tuttavia possibile un secondo. Dati nostri tuttora inediti ci dimostrano che l'eteroauxina aumenta il tenore in glucidi solubili nelle cellule prossime al punto di applicazione; si potrebbe quindi pensare a un aumento della capacità di assorbimento del Gl. 1 P da parte degli stomi trattati con ormoni di crescita, con un conseguente spostamento degli equilibri endocellulari a favore della sintesi.

È del resto evidente che i due meccanismi prospettati non si escludono a vicenda, essendo anzi probabile una loro complementarietà di azione.

(19) E. MARRÉ, « Atti Acc. Ligure Sc. e Lett. », 6, 1.

D. DE BLASI.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 novembre 1951

Presiede il Presidente G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geofisica. — *Determinazione della densità media della Terra per mezzo di misure gravimetriche.* Nota di GIOVANNI BOAGA e GIUSEPPE TRIBALTO, presentata (*) dal Corrisp. G. BOAGA.

L'Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di ingegneria dell'Università di Roma ed il Servizio Geologico d'Italia hanno compiuto nell'estate del 1950 una vasta campagna gravimetrica nella zona della superba creazione naturale del sottosuolo carsico delle Murge di Bari (grotte di Castellana) ⁽¹⁾.

In tale occasione si pensò di effettuare opportune stazioni all'esterno, lungo l'asse delle grotte, ed all'interno, in corrispondenza delle medesime posizioni planimetriche e quindi all'incirca sulle stesse verticali.

Le gravità nelle singole stazioni all'esterno ed all'interno delle grotte sono state trasportate con il gravimetro Western G. C. n. 49 dalla *stazione fondamentale* — istituita nella « Sala attrezzi » della « Direzione delle grotte » — in precedenza opportunamente collegata alla stazione di riferimento di Roma.

Le quote di tutte le stazioni sono state ricavate dal rilievo topografico eseguito dal Ten. Col. E. Andreucci dell'Istituto Geografico Militare ⁽²⁾.

(*) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) Cfr. G. BOAGA, G. TRIBALTO, G. ZACCARA, *Rilievi geo-gravimetrici nella regione delle grotte di Castellana (Bari)* — Comunicazione fatta al IV Congresso Speleologico Italiano — in « Boll. del Serv. Geol. d'Italia », vol. LXXII, 1951; *Misure gravimetriche nelle grotte di Castellana* in « Annali di Geofisica », vol. III, 1950.

(2) Cfr. E. ANDREUCCI, *Relazione sul rilevamento delle grotte di Castellana* in « Rivista l'Universo », vol. XXX, 1950.

TABELLA I.

MISURE EFFETTUATE ALL'ESTERNO DELLE GROTTE						MISURE EFFETTUATE ALL'INTERNO DELLE GROTTE					
N.	Quota (m)	Lettura (l)	Δl	$g_p - g_R$ (mgal)	g_p (gal)	N.	Quota (m)	Lettura (l)	Δl	$g_p - g_R$ (mgal)	g_p (gal)
R	331,84	746,3	—	—	980,270,65	R	331,84	745,3	—	—	980,270,65
I	332,80	760,0	— 13,3	— 1,13	269,52	I	274,92	670,5	+ 74,8	+ 6,33	276,98
II	334,80	764,2	— 17,5	— 1,48	269,17	II	265,68	663,0	+ 82,3	+ 6,96	277,61
III	334,50	757,8	— 11,1	— 0,94	269,71	III	268,03	664,8	+ 80,5	+ 6,81	277,46
IV	334,50	758,8	— 12,1	— 1,02	269,63	IV	271,26	669,2	+ 76,1	+ 6,44	277,69
V	336,20	766,2	— 19,5	— 1,65	269,00	V	273,35	674,0	+ 71,3	+ 6,03	276,68
VI	337,50	770,0	— 23,3	— 1,97	268,68	VI	270,65	677,2	+ 68,1	+ 5,76	276,41
VII	337,30	771,2	— 24,5	— 2,07	268,58	VII	269,45	671,2	+ 74,1	+ 6,27	276,97
VIII	334,60	760,0	— 13,3	— 1,13	269,52	VIII	264,84	658,8	+ 86,5	+ 7,32	277,97
IX	333,90	758,5	— 11,8	— 1,00	269,65	IX	271,24	667,4	+ 77,9	+ 6,59	277,24
X	332,50	757,0	— 10,3	— 0,87	269,78	X	274,64	669,2	+ 76,1	+ 6,44	277,09
XI	332,30	755,0	— 8,3	— 0,70	269,95	XI	264,33	656,6	+ 88,7	+ 7,50	278,15
R	334,84	747,0	—	—	—	R	331,84	745,3	—	—	—
R (medio)		(746,7)				R (medio)		(745,3)			

Indicando con Δl la differenza di lettura eseguita sul tamburo graduato del gravimetro, nella posizione prestabilita dell'indice, nelle due stazioni: di riferimento e di campagna, la gravità g_P nella stazione di campagna si ottenne da quella di riferimento $g_R = 980,270.65$ gal, secondo la formula:

$$g_P = g_R + 0,0846 \cdot \Delta l$$

rappresentando il coefficiente numerico la costante strumentale.

Il prodotto $0,0846 \cdot \Delta l$ risultò affetto da un errore medio di importo $\pm 0,05$ mgal.

Nella tabella I sono riportate ordinatamente le seguenti indicazioni: numero della stazione, la rispettiva quota, la lettura l eseguita sul tamburo del gravimetro, le differenze Δl , le differenze $g_P - g_R$, le gravità g_P , il tutto per le stazioni ubicate all'esterno ed all'interno delle grotte.

Come è noto, secondo il Teorema di Saygey ⁽³⁾, la gravità nell'interno della Terra, a partire dalla superficie, aumenta (fino ad una certa profondità valutabile a circa 830 Km) ed indicando con ΔQ la profondità, con ρ_m e ρ rispettivamente le densità terrestri media e superficiale, con $\epsilon \doteq 6,67 \times 10^{-9}$ (c. g. s.) la costante gravitazionale, l'aumento Δg di gravità è fornito dalla ⁽⁴⁾:

$$\Delta g = 4 \pi \epsilon \left(\frac{2}{3} \rho_m - \rho \right) \cdot \Delta Q$$

e conseguentemente:

$$\rho_m = \frac{3}{2} \left(\rho + \frac{\Delta g}{4 \pi \epsilon \cdot \Delta Q} \right).$$

Utilizzando per tutte le stazioni i valori ΔQ e Δg (osservati) messi in evidenza nella tabella II ed assumendo per ρ il valore 2,25 corrispondente mediamente alla roccia carsica interposta fra le due stazioni, non tenendo conto del vuoto al di sopra delle stazioni interne, si traggono per la *densità media* i valori riportati nella penultima colonna della stessa tabella II.

Da questi valori mediamente si ha:

$$\rho_m = 5,55 \pm 0,01.9 \text{ (e. m.)}$$

in equilibrio con la incertezza delle Δg valutabile a $\pm 0,07$ mgal.

Tenuto conto dell'errore medio conseguito, il risultato è in buon accordo con il valore 5,52 attualmente adottato dai geodeti e dai geofisici.

Trascurando i valori delle stazioni I e X (ubicate nelle vicinanze di vasti vuoti) presentando questi, scostamenti dalla media superiori a tre volte l'errore medio, si trova:

$$\rho_m = 5,53 \pm 0,01.4 \text{ (e. m.)} \text{ (4)}.$$

⁽³⁾ Cfr. G. BOAGA, *Trattato di Geodesia*, Ed. Cedam, Padova, 1948, vol. I, alle p. 136 e sgg.

⁽⁴⁾ Una ricerca analoga è stata fatta nel Canada nelle miniere di Lake-Share e Noranda alle profondità di 7200 e 6015 piedi rispettivamente. I risultati ottenuti sono stati 5,523 e 5,557 (Cfr. A. H. MILLER, *Summary Report on Gravity Investigations of the Dominion Observatory, Ottawa, Ontario from 1948 to 1950 inclusive*).

TABELLA II.

N.	ΔQ (m)	Δg (mgal)	ρ_m	ρ
I	57,88	7,46	5,67	2,15
II	69,12	8,44	5,56	2,22
III	66,47	7,75	5,46	2,29
IV	63,24	7,46	5,49	2,27
V	62,85	7,68	5,56	2,22
VI	66,85	7,73	5,49	2,27
VII	67,85	8,34	5,58	2,21
VIII	69,76	8,45	5,53	2,24
IX	62,66	7,59	5,55	2,23
X	57,86	7,31	5,64	2,17
XI	67,97	8,30	5,56	2,22

Si faccia presente anche il fatto che, nota la densità media ρ_m , è possibile, ricorrendo alla formula soprascritta, determinare la densità del materiale interposto fra le due stazioni gravimetriche eseguite sulla medesima verticale.

Nel nostro caso, assunto per ρ_m il valore 5,52 si trova per ρ i valori riportati nell'ultima colonna della tabella II.

Per tale densità mediamente si ottiene:

$$\rho = 2,23 \pm 0,01.3 \text{ (e. m.)}$$

e trascurando come in precedenza i contributi delle stazioni I e X:

$$\rho = 2,24 \pm 0,00.9 \text{ (e. m.)}$$

in ottimo accordo con le indicazioni geologiche.

Il procedimento qui indicato può essere particolarmente impiegato nelle miniere, dove sovente si hanno serie di gallerie a quote diverse, fra loro intersecantisi o fra loro parallele, per determinare la densità degli strati interposti.

Fisica. — *Sulla « Trasformazione di Einstein », detta di « Lorentz »*
Nota del Socio (*) QUIRINO MAJORANA.

La teoria speciale della relatività si basa sul ben noto gruppo di equazioni, che dovrebbero chiamarsi « Trasformazione di Einstein », giacchè è alquanto differente da quello precedentemente scritto da Lorentz, ed ancora perchè i ragionamenti di questi si basavano sull'ammissione dell'etere cosmico, la quale ipotesi fu abbandonata, nella teoria di Einstein. A parte questa precisazione, seguendo l'uso comune, chiamerò quel doppio gruppo: « Trasformazione di Lorentz » (T. L.). Esso dice:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \beta (x - vt) \\ t' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases}, \quad (2) \quad \begin{cases} x = \beta (x' + vt') \\ t = \beta \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{cases}, \quad \text{con } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

dove x, t ed x', t' , indicano le coordinate spazio-temporali dei punti di due sistemi rigidi, S, S' , reciprocamente in moto rettilineo, uniforme, con la velocità v , nella direzione e col senso positivo delle x ; c è la velocità della luce, costante (per il 2° postulato) per qualsiasi osservatore. Poichè $y = y', z = z'$, si tralascia di includere tali identità nel gruppo.

Sono note le deduzioni che Einstein trae dalla T. L. Le due più importanti sono la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi, giudicate da un sistema detto « fisso », per l'altro sistema detto « in moto ». Il cambiamento di segno della v , passando dalle (1) alle (2), dipende dal riferimento di x, t al sistema fisso e di x', t' , al sistema in moto. La velocità v , come si è detto, ha il senso positivo delle x ; se si trattasse di velocità in senso contrario, i detti segni si invertirebbero.

La contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi, secondo la relatività, si manifestano nel rapporto β o nel suo inverso. La quantità $1/\beta$ coincide con il coefficiente di contrazione della teoria di Lorentz. Ma, mentre in questa $1/\beta$ aveva un senso reale (contrazione della materia, dovuta alla corrente di etere), nella relatività corrisponde al giudizio di un sistema per l'altro in moto. Non avendo il moto uniforme (per l'abolizione dell'etere) carattere assoluto, si può considerare indifferentemente in quiete od in moto, uno qualsiasi dei due sistemi. Quel giudizio non pare così che possa esprimere qualcosa di reale, dovendo ciascuno dei due sistemi apparire contratto nelle lunghezze e dilatato nel tempo, all'altro sistema. Vogliamo esaminare le difficoltà fisiche di ammettere tale principio.

Dalla T. L., può trarsi un'altra conseguenza. Ammettiamo che i detti due sistemi abbiano coincidenti, in un certo istante, le origini spazio-temporali, O ed O' . In quell'unico punto-istante, si hanno le coordinate $x = 0, t = 0, x' = 0, t' = 0$. Supponiamo che S' si muova, rispetto ad S , nel senso positivo.

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1951.

Consideriamo un punto P , che abbia, nel sistema S , le coordinate $x = l, t = 0$. Per la T. L., al punto P , ne corrisponde un altro P' , nel sistema S' , di coordinate $x' = \beta l, t' = -\beta (v/c^2) l$. La prima di tali relazioni (essendo $\beta > 1$) ci dice che l'unità di misura di S' si è contratta, perchè il tratto l appare a tale sistema più lungo. La seconda ci dice che l'orologio di S' , nel punto P' , è alquanto indietro, rispetto a quello di S , il quale sistema indica zero in tutti i suoi punti. Il valore di t' è diverso da punto a punto di S' ; il ritardo, cioè, va crescendo al crescere di l e diventerebbe infinito per l infinito. Se si considerano i valori negativi di l , si vede che gli orologi di S' , nei punti corrispondenti, sono in anticipo, avendosi $t' = +\beta (v/c^2) l$. Tale anticipo diventa ∞ , per $l = -\infty$. Sicchè, mentre al tempo zero di S , i punti di tale sistema hanno tutti tale tempo, nel sistema S' , passando dai valori negativi ai positivi di l , gli orologi indicano da $+\infty$ a $-\infty$. Se si inverte la notazione del senso delle x , contando cioè le x positive dal lato delle negative di prima, il risultato non cambia, purchè la velocità sia diretta ancora come prima. Infatti, allora, algebricamente, cambia il segno di v . Se si inverte il senso di v , cioè la velocità di S' rispetto ad S , si invertono anche le indicazioni degli orologi, cioè di ritardo o di anticipo. Si rileva dunque che, mentre per il sistema S tutti gli orologi sono concordi, indicando l'ora zero, lo stesso S giudica che quelli di S' ritardano progressivamente sempre più, dal lato verso cui la origine O' si andrà spostando, mentre anticipano, dal lato da cui essa proviene.

Non è ammissibile, formulando un'asserzione del genere, che ha reale significato fisico, che non si debba dare di essa una spiegazione, presentante carattere fisico. Per accettarla, infatti, non ci si può accontentare della sua origine matematica; occorre anche che essa soddisfi pienamente, alla nostra logica intuizione fisica, scevra, beninteso, da presupposti o teorie obbligate. Si può fare, in tale senso, un tentativo. Supponendo che la valutazione delle x dipenda da ipotetici segnali ottici, si potrebbe pensare che gli orologi di S' , verso le x positive, appariscano in ritardo ad S , all'istante zero, perchè O' si trovava, nel tempo passato, più discosto dai punti di S , che quegli orologi raggiungono in tale istante. Il ritardo si cambierebbe in anticipo, per gli orologi dal lato negativo. Tale giuoco sarebbe dovuto al valore finito di c , impiegando la luce un certo tempo, a superare le varie distanze. Ma tale spiegazione, non potendosi concretare in un preciso modello fisico, rimane vaga e non persuasiva. E pensando alla relatività (nel senso letterale e non di Einstein) del moto uniforme, si comprende che essa non regge affatto. Questo moto ha senso soltanto, se si considera che la posizione del mobile è variabile col tempo, rispetto ad un altro oggetto. Dei due sistemi S, S' , nessuno, ha moto assoluto. La condizione di moto, di ciascuno o solo di uno di essi, rispetto all'osservatore, non ha importanza, giacchè i nostri ragionamenti riguardano i giudizi di un sistema rispetto all'altro. Come ho fatto rilevare in una precedente Nota, l'inosservanza di tale semplice principio, può essere la causa di inesattezze, nell'esposizione della teoria speciale della relatività. In tali inesattezze, è caduto lo stesso Einstein.

In conseguenza di ciò, come abbiamo considerato S' in moto rispetto ad S , possiamo dire che sia S a muoversi rispetto ad S' . Avverto ancora una volta

che non si deve ritenere illecita simile asserzione; e che nessuna dissimetria può esistere tra S ed S' . Infatti, a parte l'asserito nonsenso del moto assoluto, non si è mai constatato che il conferimento di velocità uniforme ad un corpo o sistema di corpi, ne alteri la struttura. Si può supporre dunque che S ed S' siano perfettamente identici e che differiscano solo per la loro reciproca velocità uniforme, rettilinea. Si deve perciò ammettere che le verifiche spazio-temporali, compiute nell'interno dei due sistemi, debbano risultare perfettamente identiche.

È da riconoscere però, che tale identità possa apparentemente risultare falsata, da osservazioni fatte a distanza, mediante segnali luminosi, che esigono un certo tempo per trasmettersi. Ma se osservatori diversi, pur essendo fra di loro in moto (di qualsiasi natura), essendo coincidenti, rilevano, nell'istante di coincidenza, fatti svolgentisi nelle immediate loro vicinanze (e per vero anche in distanza), tali fatti non possono essere che identici.

In base a tale principio, vediamo che cosa debba avvenire, se due osservatori A ed A' , appartenenti rispettivamente ad S ed S' , trovantisi alquanto discosti dalle origini coincidenti O ed O' , coincidano, anch'essi. Tali osservatori leggeranno entrambi (per esempio, mediante fotografie e istantanee), le loro distanze dalle rispettive origini O ed O' (segnate su opportuni regoli sui sistemi) e le ore dei due loro orologi. Per il principio ora enunciato, tali letture non possono che essere identiche per i due osservatori, che le rilevano insieme, proprio nel luogo dove si trovano senza bisogno di usare segnali luminosi a distanza.

Ma relativisticamente, deve avvenire qualcosa di diverso. L'osservatore A dovrebbe leggere il tempo zero per S ed un tempo arretrato per S' . L'osservatore A' dovrebbe leggere anch'esso il tempo zero per S' ed un tempo in anticipo per S . E tali letture sono in qualche modo contraddittorie, perchè incompatibili col principio enunciato. Risulta perciò non vero il principio della dilatazione dei tempi, ed, implicitamente, quello della contrazione delle distanze.

Per quanto riguarda quest'ultima deduzione relativistica, si considerino ancora due regoli di misura, rispettivamente nei sistemi S , S' , rigidi ed in moto uniforme reciproco. Essi, essendo di uguale lunghezza, si appoggino con uno dei loro estremi ciascuno, sulla origine spazio-temporale del rispettivo sistema, e siano volti verso il lato positivo delle x . Nel comune istante di origine, zero, i regoli sono così coincidenti, almeno in parte, nelle loro lunghezze. Si dice ciò, perchè tale coincidenza non può avvenire in vicinanza degli altri due estremi dei regoli, apparendo ciascuno di essi all'altro, più corto, ai termini della relatività. Esaminando simile asserzione, essa non appare soddisfacente. Diciamo, infatti, O l'origine spazio-temporale comune dei due sistemi, al tempo zero. Su di essa si appoggiano gli estremi di entrambi i regoli. Nei sistemi S , S' e sulle altre due estremità dei regoli, si trovano due osservatori, A , A' . Per la relatività, si deve ammettere che A veda succedersi i punti A , A' , O , in tale ordine; mentre A' li vede nell'altro A' , A , O . Ciò rappresenta una inaccettabile conclusione, perchè tale ordine di successione non può essere che unico. Si comprende perciò che, per ragioni di simmetria, A deve coincidere con A' , e che viene a cadere il principio fondamentale, relativistico, della contrazione delle lunghezze. Ma di ciò si darà ancora più chiara conferma.

Le precedenti obiezioni alla relatività fanno seguito alle altre, che ho avuto occasione di formulare, in precedenti pubblicazioni. Tuttavia, una di queste⁽¹⁾ deve essere modificata, anche in conseguenza di un rilievo sommario, fatto dal prof. G. Lampariello. Consideravo una retta con due osservatori A, B, fissi, alla distanza l , ed uno A' mobile, dalla parte di A, avvicinandosi a questo. Se B manda un segnale luminoso, verso A, consistente nella proiezione dell'immagine del suo orologio, questa vien raccolta contemporaneamente da A e da A' perchè essa arriva nell'istante in cui essi, per il loro moto reciproco, vengono a coincidere. Fisicamente, A ed A' non possono che rilevare la stessa ora, nella detta immagine. Ma, rilevavo che, relativisticamente, sarebbe dovuto avvenire qualcosa di diverso. Avevo così affermato, che A' avrebbe dovuto osservare, nella località di B, l'ora che, con la T. L., si può calcolare per il sistema dell'osservatore A'. Ora, ciò, come giustamente osserva Lampariello, non corrisponde all'orologio di B, ma ad un altro solidale con A', che però non esiste nel mio modello, e che non manda così alcun segnale luminoso. Per cui, l'ora da me calcolata non può essere ricevuta da A'. Piuttosto, è da rilevare che l'osservatore A' giudica il tratto AB (in causa del moto) alquanto ridotto, cioè uguale a l/β . Quando egli giunge in A, arriva lì il segnale di B; ma egli stima che esso provenga da una località più prossima di B, cioè a l/β viaggiando pur sempre con la velocità c . L'osservatore A' pensa perciò che tale segnale debba aver impiegato il tempo $l/\beta c$, e non l/c , a percorrere la distanza BA. Questo tempo, alquanto ridotto, corrisponde alla cosiddetta dilatazione dei tempi, ammessa dalla relatività. Per cui, relativisticamente, l'orologio B, per l'osservatore A', dovrebbe indicare nella sua immagine il tempo $l/\beta c$, invece di l/c , la cui lettura, avviene, per contro, sicuramente da parte di A ed A', come si è detto. Si vede dunque che la contraddizione da me rilevata, sia pure ridotta dal 1° al 2° ordine, e con segno cambiato, esiste sempre.

Per dar maggiore evidenza a tale contraddizione mi ero riferito anche ad una esperienza ideale, che pur potrebbe avere pratica esecuzione. Essa consisteva nel raccogliere segnali ottici (o più propriamente elettromagnetici) da una località molto discosta, come la Luna. Osservo ora, che tale modello potrebbe ancora avere pratica attuazione, benchè l'ordine di grandezza del preteso effetto relativistico sia ridotto, come ora si è detto. Ciò sarebbe possibile, sperimentando con elettroni che abbiano velocità poco inferiore a quella della luce.

A giustificare la inesattezza in cui sono incorso, debbo rilevare che lo studio della relatività, che mi occupa da molti anni, si compone di due parti, nettamente distinte, ma ben connesse. Nella prima, mi occupo di ricercare argomenti che *a priori*, possano fornire prove logiche dell'infondatezza della teoria; nella seconda, mi occupo di ricerche sperimentali. Si osserva però, che specialmente in una questione controversa come l'attuale, l'osservazione ed i fatti rilevabili con nuove esperienze, possono fornire elementi decisivi di giudizio. In base a tale principio, la seconda parte della mia attività, ora detta, mi occupa principalmente, con possibile scapito della accuratezza della prima. Ciò è tanto più comprensibile, data la

(1) Ved. questi « Rendiconti », vol. VII, p. 32 (1949); e « Zentralblatt für Mathematik », B. 37, S. 421 (1951).

quasi assoluta mancanza di mezzi speciali, mai a me concessi. A tale difetto, debbo sopporre con la mia esclusiva opera personale.

Per chiudere, desidero ancora chiarire qui, con un modello sperimentale puramente ideale, un'asserzione fatta, in fine della precedente Nota, da me presentata⁽²⁾. Si abbiano due sistemi o nastri S, S' (fig. 1), reciprocamente in moto, con la velocità v . Essi hanno ciascuno due fori, o fenditure, A, B , ed A', B' , essendo $AB = A'B' = L$. Rispetto ad un piano di simmetria P , fisso, i due nastri abbiano la velocità $+1/2 v$ e $-1/2 v$. Una sorgente, situata nella parte superiore della figura, fa cadere della luce sui due nastri. La luce può così passare al disotto di questi, soltanto negli istanti di coincidenza di una o delle due coppie di fori. Tale luce, convergendo in basso, è raccolta da osservatori come O , siti sul piano P . L'osservatore O è fornito di opportuno specchio o di specchi, in guisa da lasciare riflettere la luce ricevuta, verso altri osservatori siti in A, B, A', B' . Consideriamo gli istanti delle due coincidenze BA' e AB' . I due fasci

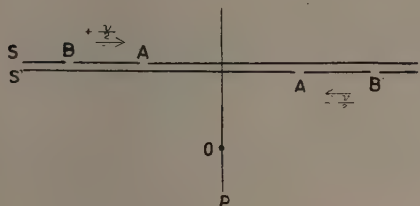


Fig. 1.

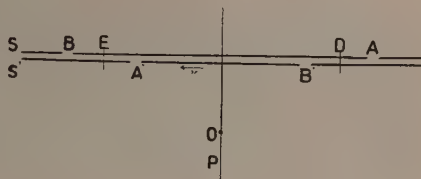


Fig. 2.

luminosi, così occasionati, sono osservati da O , per ragioni di simmetria, simultaneamente. Questa affermazione è valida tanto classicamente, quanto secondo la relatività. Infatti, questa teoria lascia giudicare, da O , le lunghezze AB ed $A'B'$, egualmente contratte. In conseguenza, i due fasci luminosi vengono riflessi da O , come se si trattasse di un fascio unico, che, ancora così, è ricevuto dai singoli quattro osservatori A, B, A', B' . In conseguenza del moto dei nastri, tale fascio unico è ricevuto alquanto prima da B e B' che non da A ed A' , essendosi questi due punti (in causa del tempo impiegato dalla luce a pervenire da O su di essi) alquanto più discostati. Questo fatto non ha però importanza alcuna. Ciò che importa è concludere che i due fasci luminosi, generati dalle due coincidenze BA' ed AB' , siano perfettamente coerenti e simultanei, anche a giudizio di ciascuno degli osservatori dei due sistemi, in moto reciproco. Da ciò risulta, in modo assai chiaro, che entrambi tali sistemi giudicano $AB = A'B'$. Tale risultato conferma quanto dicevo nella Nota citata, ed è contrario alle asserzioni della relatività.

Ad una simile conclusione si potrebbe, tuttavia, obiettare quanto segue: Si potrebbe pensare che la simultaneità, ora indicata, dipenda dall'aver disposta l'esperienza ideale descritta, con completa simmetria, rispetto all'osservatore O . Ma è da osservare che, se si è fatta una simile ammissione, ciò è indipendente dalla reale esistenza di questo osservatore, al quale si è ricorso allo

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1951.

scopo puramente dimostrativo. A parte ciò, si potrebbe ancora pensare che la asserita simmetria dei due nastri, possa dipendere dall'aver imposto ad essi eguali accelerazioni temporanee, nel portarli a velocità eguali e contrarie; e che, se si fosse accelerato soltanto uno di essi, lasciando l'altro fermo, la detta simmetria sarebbe stata compromessa. Ho già altre volte fatto osservare (e qui confermo ciò) che un fatto del genere non può in alcun modo sospettarsi. Se esso fosse attendibile, bisognerebbe ammettere che certe proprietà della materia possono dipendere dalla storia delle accelerazioni ad essa impresse: un vibratore allontanato violentemente, e poi, nella stessa guisa, riportato fermo, in vicinanza di altro, che era esattamente eguale, dovrebbe subire variazioni di frequenza. Si dice ciò, perchè tali variazioni si presumerebbero proporzionali ai quadrati delle accelerazioni. Un effetto del genere, non è mai stato esplicitamente presunto, nemmeno dai relativisti; e tanto meno osservato. Per di più, se anche lo si volesse ammettere, ciò porterebbe ad una dissimmetria reale fra i tratti AB ed A'B', che potrebbe venire facilmente controllata, anche perchè irreversibile.

Secondo un'ultima obiezione, potrebbe ritenersi che, ammettendo la contrazione relativistica delle lunghezze, a giudizio di ciascun sistema nei riguardi dell'altro, i segnali luminosi provenienti dalle coincidenze AB ed A'B' non fossero contemporanei, per ciascuno dei sistemi in moto reciproco; e che, inoltre, tale fatto, malgrado le diverse distanze (giudicate relativisticamente) tra gli osservatori A, B, A', B', e l'osservatore fisso O, possa pur sempre esser compatibile con l'indiscutibile simultaneità degli arrivi dei fasci luminosi istantanei, dalle coincidenze AB' ed A'B all'osservatore O. Vogliamo esaminare se ciò sia realmente possibile. Si sa, che relativisticamente, il sistema AB giudica l'altro alquanto racciato. Per AB, $A'B' = l/\beta$ per A'B', $AB = l/\beta$. Consideriamo la prima di tali eguaglianze. Per il moto dei nastri, in un certo istante essi avranno assunto posizione simmetrica rispetto ad O, anche ammettendo $AB > A'B'$, come indica la fig. 2, dove i tratti AB ed A'B' sono rappresentati ingranditi rispetto alla fig. 1. La lunghezza di BA' ed AB' è $(l/2)(1 - 1/\beta)$. Nell'istante a cui corrisponde la fig. 2, la coincidenza fra A e B', era già avvenuta, quella fra B ed A' dovrà ancora avvenire. L'intervallo di tempo tra tali coincidenze è $(l/v)(1 - 1/\beta)$. Consideriamo i punti D, E, medii, rispettivamente, di AB' e BA'. Essi sono entrambi alla stessa distanza da O, o da qualunque osservatore sito sul piano di simmetria P. Per cui, i segnali luminosi provenienti da D e da E (quando ciascuna coincidenza avviene) percorrono distanze eguali per arrivare in O. Questo osservatore li riflette quindi in tempi diversi, su tutti e quattro gli osservatori A, B, A', B', contrariamente a quanto si è detto debba avvenire, ammettendo o no la relatività, nei rapporti con l'osservatore O. Se si considera, invece, il giudizio di di A'B', cioè $AB = l/\beta$, si ha ancora lo stesso risultato, ma invertito; cioè la coincidenza BA' avviene prima della AB', pur restando D ed E simmetrici rispetto ad O. Si vede dunque che anche la seconda obiezione è inconsistente, rimanendo confermata la contraddizione a cui la relatività dà luogo.

Chimica organica. — *Spettro Raman della 2-pirrolaldeide allo stato cristallino* (*). Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio GIOV. B. BONINO.

Lo spettro Raman dell' α -pirrolaldeide in soluzione è stato ampiamente studiato dal 1934 ad oggi in questo Istituto da Bonino e Collaboratori (1).

Non ci risulta che altri ricercatori nel frattempo si siano occupati dello spettro Raman delle aldeidi pirroliche.

Come è già stato discusso nei citati precedenti lavori, scopo delle ricerche compiute era ed è quello di indagare se all'aldeide del pirrolo compete una struttura carbonilica ovvero una struttura ossimetilenica come quella sostenuta a suo tempo da Angeli e Collaboratori (2), o ancora, se si debba ammettere nella molecola dell'aldeide pirrolica il verificarsi di qualche fattore speciale e non rappresentabile con le formule strutturistiche classiche della chimica organica.

Quest'ultima idea non è nuova e non è nostra, ma risale ad Emilio Fischer, il quale così si esprimeva in un lavoro apparso nel « *Berichte* » già nel 1913 (3): « ... Man kann sich vorstellen, dass im Pyrrolaldehyd eine Beziehung zwischen der Imid- und Aldehydgruppe besteht, die in der jetzigen Formel nicht zum Ausdruck kommt. Ich will mich aber bescheiden, darauf hinzuweisen, da für die Aufstellung einer neuen Strukturformel die tatsächlichen Beobachtungen zu unvollständig erscheinen ... ».

I fatti rilevati da Bonino e Collaboratori, e che starebbero in appoggio all'ipotesi di una forma carbonilica perturbata e non ossimetilenica dell' α -pirrolaldeide sono i seguenti:

1° presenza nello spettro Raman della pirrolaldeide di una riga a 1645 cm^{-1} circa che ha tutte le caratteristiche di una riga carbonilica, però profondamente perturbata;

2° sdoppiamento in soluzione benzenica diluita della riga Raman attribuita al gruppo $\text{C}=\text{O}$ dell'aldeide pirrolica (4), in analogia con quello che si verifica nelle stesse condizioni per la riga carbonilica dell' α -acetilpirrolo (5), e già allo stato puro liquido per la corrispondente riga dell'aldeide furilica (6) e dell'aldeide tiofenica (7);

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica-fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1951.

(1) BONINO, MANZONI, PRATESI, « *Z. phys. Chem.* », 25, 348 (1934); MANZONI, « *Ricerca sci.* », vol. II, p. 224 (1937); GHIGI, CHIORBOLI, « *Boll. sci. fac. Chim. ind.* ». Bologna, in corso di stampa; CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, « *Gazz. chim. ital.* » in corso di stampa.

(2) ANGELI, « *Rend. Accad. Lincei* », 16, 382 (1907); id., 23 (II), p. 100 e sgg.

(3) FISCHER, « *Ber.* », 46, 2508 (1913).

(4) CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, « *Gazz. chim. ital.* » in corso di stampa.

(5) BONINO, CHIORBOLI, « *Rend. Accad. Lincei* », VIII, 10, 104 (1951).

(6) ROLLA, CHIORBOLI, « *Gazz. chim. ital.* », 79, 513 (1949).

(7) Ricerche in corso di pubblicazione.

3° persistenza nello spettro Raman dell' α -pirrolaldeide delle righe Raman caratteristiche nel nucleo pirrolico, quali si riscontrano nel pirrolo puro e nei monosostituiti del pirrolo. Questo nucleo non accusa perciò nello spettro Raman dell' α -pirrolaldeide quelle profonde perturbazioni interne che sarebbe logico attribuirgli qualora l'aldeide sussistesse nella forma ossimetilenica.

E neppure si può plausibilmente pensare ad un equilibrio fra la forma carbonilica e la forma ossimetilenica, dato che la presenza di due tipi di molecole distinte e diverse dovrebbe portare come conseguenza nello spettro Raman di questa aldeide un numero di righe maggiore di quello che si riscontra, in quanto dovrebbero esser presenti contemporaneamente quelle (permesse e sufficientemente isolate) che corrispondono ai due tipi di nuclei possibili caratteristici per le due forme.

È noto che fra le varie ipotesi che sono state fatte per spiegare alcune difficoltà nell'interpretazione degli spettri Raman ed ultrarossi del pirrolo era quella di supporre la coesistenza di due forme molecolari l'una a bassa simmetria C_{2v} o C_s e l'altra a simmetria elevata, per esempio D_{4h} o D_{2h} ⁽⁸⁾. Ma il numero relativamente piccolo di righe Raman che si rilevano per il pirrolo aveva già creato delle difficoltà per ammettere senz'altro una tale ipotesi ⁽⁹⁾ e gli autori che si sono occupati di spettri molecolari del pirrolo sono sempre stati più propensi ad attribuire le anomalie, o meglio le difficoltà interpretative dello spettro Raman ed ultrarosso del pirrolo, alla troppo piccola intensità supponibile di certe righe, intensità insufficiente per poter registrare le stesse negli spettrogrammi ⁽¹⁰⁾. Queste stesse ragioni si opporrebbero all'ipotesi di un equilibrio fra due forme, una carbonilica e l'altra ossimetilenica, nell'aldeide pirrolica.

Nell'interpretazione degli spettri Raman dell'aldeide pirrolica in soluzione in solventi organici, discussa in un precedente lavoro ⁽⁴⁾, restano d'altra parte ancora delle difficoltà che richiedono un ulteriore approfondimento delle ricerche sperimentali. Taluni punti meritano una particolare attenzione.

1° Necessita chiarire meglio le ragioni perchè nello spettro Raman dell' α -pirrolaldeide non compaia la riga Raman caratteristica dell'imino pirrolico. Questo fatto a prima vista potrebbe avvalorare una ipotesi ossimetilenica che è appunto riferibile ad una forma pirroleninica del gruppo pirrolico. Ma tale assenza della riga del gruppo NH potrebbe anche interpretarsi con l'ipotesi di azioni perturbatrici tra l'imino pirrolico ed il gruppo carbonilico nel senso preconizzato da Emilio Fischer, e del resto almeno in parte ragionevolmente attribuibili alle interazioni, di natura però intermolecolare, messe in evidenza negli spettri Raman che sono stati discussi nell'ultimo citato lavoro ⁽⁴⁾.

D'altra parte anche Bernardo Oddo ⁽¹¹⁾ nel proporre la sua formula « mesodrica » dell'aldeide pirrolica veniva a porre, in fondo, una ipotesi di questo tipo, considerando però esclusivamente interazioni intramolecolari.

(8) BONINO, « Atti Congr. inter. Chimica », Roma, 2, 141 (1938).

(9) REITZ, « Z. phys. Chem. », 33, 179 (1936); id., 38, 276 (1938).

(10) GARACHE, LECOMTE, « Compt. rend. », 222, 74 (1946); LECOMTE, « Bull. Soc. chim. France », 13, 415 (1946).

(11) B. ODDO, « Gazz. chim. ital. », 64, 593 (1934).

2° Le prime ricerche sullo spettro Raman dell'aldeide pirrolica eseguite da Bonino e Manzoni⁽¹²⁾ e da Manzoni⁽¹³⁾ utilizzavano soluzioni metilalcooliche di questa aldeide. Poteva darsi che il solvente di natura alcoolica in qualche modo interagisse con il gruppo carbonilico dell'aldeide, falsando così l'immediata interpretazione dei risultati. Per ciò sono state recentemente riprese in questo laboratorio ricerche sullo spettro Raman dell'aldeide pirrolica ordinaria in soluzione benzenica. I risultati di queste indagini, che sono attualmente in corso di pubblicazione⁽¹⁴⁾ hanno portato un nuovo contributo allo studio del problema.

3° Si presenta di grande interesse lo studio dello spettro di oscillazione (Raman od ultrarosso) del così detto sale sodico dell' α -pirrolaldeide, che (come si sa)⁽¹⁵⁾ si può preparare egregiamente sotto forma cristallina. Questo sale sodico dovrebbe stabilizzare una eventuale forma ossimetilenica, seguendo l'ordinaria concezione chimico-organica. Però sarebbe sommamente imprudente anticipare su questo punto delle ipotesi, prima di aver visto gli spettri di oscillazione che a tutt'oggi sono ancora sconosciuti e che sono in corso di studio presso questo Istituto.

4° Resta ancora piuttosto oscuro perchè la riga attribuita al gruppo carbonilico nella N-metil α -pirrolaldeide si trovi in una posizione tanto vicina (1656 cm^{-1}) alla riga analoga dell' α -pirrolaldeide libera all'azoto (1645 cm^{-1}), mentre la N-metil α -pirrolaldeide preparata da Emilio Fischer ha caratteristiche chimiche ed anche organolettiche profondamente distinte da quelle dell'aldeide pirrolica ordinaria.

5° Sarebbe pure interessante poter conoscere lo spettro Raman della pirrolaldeide ordinaria allo stato cristallino eliminando cioè ogni perturbazione proveniente dal solvente. Anche tale spettro non era noto a tutt'oggi ed è stato studiato in questo laboratorio e ne riferiamo qui brevemente.

Sono note le difficoltà che si incontrano quando si vogliano compiere le esperienze Raman direttamente sulle polveri ed è noto altresì che per poter ottenere qualche risultato è necessario ricorrere spesso a tecniche speciali.

L'ostacolo essenziale che si incontra nel realizzare queste esperienze sta nell'intenso fondo continuo che ricoprirebbe tutto lo spettro se si utilizzasse la solita tecnica sperimentale e da cui emergerebbero solo le righe Raman più intense, mentre quelle di media e debole intensità verrebbero senz'altro mascherate, anche dopo lunghi tempi di posa che tenderebbero anzi a render più intenso ancora il « fondo ».

Questo intenso fondo continuo proviene dalla notevole intensità delle radiazioni diffuse in tutte le direzioni a causa delle rifrazioni e riflessioni multiple che si verificano fra i granuli cristallini e che poi, entrando nello spettrografo,

(12) BONINO, MANZONI, PRATESI, « Z. phys. Chem. », 25, 348 (1934).

(13) MANZONI, « Ricerca sci. », vol. II, p. 224 (1937).

(14) GHIGI, CHIORBOLI, « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, in corso di stampa: vedi anche nota (4).

(15) ANGELI, ALESSANDRI, « Rend. Accad. Lincei », 23, II, 99 (1914); ALESSANDRI, « Rend. Accad. Lincei », 24 (II), 197 (1915).

producono una dannosa illuminazione parassita. In questa radiazione diffusa sono presenti in notevole percentuale componenti della stessa composizione spettrale della radiazione incidente.

Uno dei metodi utilizzati con maggior successo onde diminuire questi inconvenienti è stato quello dei « filtri complementari », messo soprattutto a punto da Ananthakrishnan⁽¹⁶⁾, e poi utilizzato da altri ricercatori⁽¹⁷⁾. E ricordiamo anche Manzoni il quale applicò questa tecnica allo studio dello spettro Raman del pirrolo⁽¹⁸⁾, per render lo spettrogramma libero dal fondo continuo. Si tratta, in sostanza, di due filtri che, come dice la denominazione data, agiscono complementariamente l'uno rispetto all'altro: il primo infatti, sul cammino dei raggi incidenti sulla sostanza in esame, elimina, o meglio attenua, le radiazioni componenti a più bassa lunghezza d'onda, quelle cioè, *grosso modo*, che corrispondono alla zona spettrale ove compaiono le righe Raman, mentre il secondo, interposto fra la sostanza irradiata e la fenditura dello spettrografo, attenua l'intensità della radiazione eccitatrice (sempre fortissima) ma anche purtroppo l'intensità delle radiazioni a lunghezza d'onda prossima ad essa, in modo comunque da non indebolire troppo estesamente lo spettro Raman. Da questo metodo dei filtri complementari trae origine un'altra tecnica introdotta e utilizzata con successo da Kohlrausch e Collaboratori⁽¹⁹⁾ per lo studio degli spettri Raman di varie sostanze organiche allo stato cristallino. I citati autori hanno sostituito i due filtri colorati « complementari » con due interi sistemi dispersivi, il primo costituito da un doppio monocromatore per isolare con precisione la radiazione eccitatrice, ed il secondo realizzato con un sistema di spettrografi che raccoglie la radiazione diffusa per riflessione dalla superficie della polvere cristallina e che consente di escludere dalla fenditura dello spettrografo che fornisce lo spettro Raman la radiazione eccitatrice. Quest'apparecchiatura è complessa e richiede sorgenti di elevatissima potenza luminosa. Tale metodo ha incontrato meno seguaci che non la classica tecnica assai più semplice dei filtri complementari.

Un terzo metodo, semplice nei suoi schemi e assai promettente e che ancora può considerarsi una evoluzione di quello di Ananthakrishnan, è stato introdotto con molto successo da Cabannes⁽²⁰⁾. Noi abbiamo appunto utilizzato questo metodo per le presenti ricerche sull'aldeide pirrolica cristallina. Con esso si irradia semplicemente con luce monocromatica (ottenuta al solito con un buon monocromatore) la sostanza in esame, poi con uno spettrografo si esamina la radiazione diffusa per trasparenza nella direzione stessa del fascio incidente, ossia nè per riflessione nè a 90°, senza interporre alcun filtro.

(16) ANANTHAKRISHNAN, « Proc. Ind. Acad. », 5, 76 (1937).

(17) WOOD, « J. Chem. Phys. », 5, 287 (1937); SIKKAR, « Ind. J. », 11, 417 (1938); TABANY, « Bull. Soc. Chim. », 5, 1934 (1938).

(18) MANZONI, « Ricerca sci. », p. 328 (1939).

(19) KOHLRAUSCH e Collaboratori, « Z. Elektrochem. », 43, 292 (1937); REITZ, « Z. phys. Chem. », 28, 181 (1940).

(20) CABANNES, LENNUIER, HARRAND, « Compt. rend. », 223, 301 (1946); « J. Chimie Phys. », 46, 69 (1949).

Spettro Raman dell' α -pirrolaldeide.(frequenze espresse in cm^{-1})

Pirrolo Bonino Manzoni 1936	Pirrolo Reitz 1936	α pirrolaldeide in sol. benzenica satura (Ghigi e Chiorboli) 1951	α pirrolaldeide cristallina (questo lavoro)
—	—	169 (2)	165 (1)
—	—	508 (2)	507 (1)
571 (0)	—	—	—
649 (1)	643 (3)	—	—
748 (2)	741 (4)	—	—
885 (1 1/2)	887 (3)	—	—
866 (2)	865 (3)	879 (2)	879 (1)
1001 (0)	—	962 (1)	—
1046 (1 1/2)	1049 (3)	—	—
1084 (1 1/2)	—	1087 (2)	1091 (1)
1142 (10)	1143 (12)	1140 (1)	—
1204 (2)	—	—	—
1235 (0)	1231 (0)	1251 (1)	1253 (0)
—	—	1314 (1)	1313 (0)
1380 (6)	1376 (8)	1353 (8)	1360 (4)
1414 (7/2 ?)	—	1403 (3)	1402 (2)
1405 (5)	1403 (6)	—	—
—	—	1554 (0)	—
—	—	1647 (7)	1636 (5)
—	—	1719 (0)	1712 (0)
2786 (Hg ?)	2760 (2)	—	—
—	2913 (00)	—	—
—	—	2995 (1)	—
3062 (7/2 Hg ?)	—	—	—
3107 (3)	3104 (4)	—	—
3138 (5)	3133 (8)	3136 (1)	—
3390 (3 dif)	3420 (3)	—	—

Nora. — La 2-pirrolaldeide cristallina purissima è stata preparata in questo Istituto dalla Prof. ssa Elisa Ghigi che teniamo vivamente a ringraziare.

Anche qui naturalmente bisogna cercar di ottenere una radiazione eccitatrice monocromatica la più intensa possibile, sicchè è necessario usare un monocromatore ad alta luminosità. L'autore citato era da questo punto di vista nelle migliori condizioni, avendo adattato come monocromatore uno spettrografo di apertura eccezionale ($F/0,7$) della Società generale d'ottica di Francia, col quale isolava la radiazione a 4358 \AA dello spettro di un arco di mercurio da 350 watt.

Noi, nelle attuali esperienze, abbiamo potuto utilizzare come monocromatore uno spettrografo Zeiss di luminosità $1/1,9$, che naturalmente ha richiesto tempi di posa più lunghi di quelli sfruttati dall'autore francese e dai suoi collaboratori. Alla fenditura di uscita del monocromatore è applicata la cella porta-polvere, costituita da due vetrini copri-oggetto da microscopia tenuti separati da una guarnizione di opportuno spessore, da scegliere secondo la trasparenza della sostanza in esame. Noi per l'aldeide pirrolica, abbiamo usato spessori di $3/10$ di mm. La polvere nella cella deve essere naturalmente suddivisa il più finemente possibile. Le radiazioni trasmesse contengono sia la radiazione eccitatrice primaria ($\lambda = 4358 \text{ \AA}$), la quale per le molte riflessioni e rifrazioni subite entro la massa della polvere cristallina non ha all'uscita dalla cella un'intensità eccessiva e dannosa, sia le radiazioni diffuse Raman. Esse radiazioni totali vengono condensate sulla fenditura dello spettrografo che fornisce lo spettro.

Per fotografare lo spettro noi abbiamo usato uno spettrografo Zeiss a tre prismi, del tipo Försterling e di luminosità $1/5$.

Con questo montaggio, come risulta dalla allegata tabella si sono potute rilevare anche righe Raman di bassa frequenza, ossia molto vicine alla riga eccitatrice (165 cm^{-1} circa).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - L'esame della Tabella ci mostra come, entro i limiti della sensibilità del metodo sperimentale, le righe Raman riscontrate nell' α -pirrolaldeide allo stato cristallino corrispondono alle righe dell' α -pirrolaldeide in soluzione benzenica.

E cioè, a parte ben s'intende le righe dovute alla sostituzione del nucleo pirrolico, ed al gruppo funzionale sostituito, le righe principali dell' α -pirrolaldeide allo stato cristallino coincidono con le principali righe caratteristiche del nucleo pirrolico riscontrate nel pirrolo puro.

La riga intensa riscontrata nell'aldeide pirrolica cristallina a 1636 cm^{-1} corrisponde alla riga pure intensa riscontrata a 1647 cm^{-1} nello spettro Raman dell'aldeide pirrolica in soluzione benzenica satura.

Questa riga è stata attribuita al gruppo $C=O$ ed è stata considerata perciò come una manifestazione del gruppo carbonilico. Se si ammette che la riga 1647 cm^{-1} dell'aldeide pirrolica in soluzione benzenica sia da riferirsi al gruppo carbonilico $C=O$ ipoteticamente presente nella molecola del composto in esame e particolarmente perturbato, si dovrà ammettere che la riga a 1636 cm^{-1} riscontrata nell'aldeide pirrolica allo stato cristallino corrisponda pure essa ad un gruppo $C=O$ leggermente più perturbato del gruppo legato nella molecola allo stato di soluzione. E sarebbe invero logico attenderci allo stato cristallino una maggiore

perturbazione di questo gruppo funzionale data la più stretta ed immediata vicinanza delle molecole e quindi la maggior probabilità di una intensa perturbazione.

In conclusione lo spettro Raman dell'aldeide pirrolica allo stato cristallino conferma, per ciò che riguarda la struttura molecolare di questa aldeide, quanto già si poteva dedurre dagli spettri Raman dell'aldeide pirrolica in soluzione benzenica satura e non porta in effetti elementi contraddittori capaci di orientare in un modo diverso la discussione già iniziata nei precedenti lavori.

L'ipotesi emessa da Lecomte e Collaboratori⁽¹⁰⁾ che nello spettro Raman del pirrolo la variazione del tensore della polarizzabilità molecolare possa per certe oscillazioni molecolari essere troppo piccola per dare alle corrispondenti righe Raman una intensità apprezzabile può essere estesa, sempre come ipotesi di lavoro, anche al nostro caso per quanto riguarda l'assenza nello spettro Raman dell'aldeide pirrolica, sia allo stato di soluzione, sia allo stato solido, della riga caratteristica del gruppo NH. Prima quindi di avvalorare definitivamente l'ipotesi dell'assenza d'una oscillazione corrispondente a questa riga Raman del gruppo iminico pirrolico, anche nel senso di avvalorare contemporaneamente la supposizione di una interazione tra questo gruppo ed il $C=O$ carbonilico sostituito in α al gruppo pirrolico, riteniamo prudente studiare le manifestazioni del detto gruppo iminico dell'aldeide pirrolica (ed eventualmente di altre pirrolaldeidi) nello spettro ultrarosso, dove l'intensità dell'effetto non è controllata dalla variazione del tensore della polarizzabilità, bensì dalla variazione del momento elettrico durante l'oscillazione molecolare del tipo sottoposto a indagine.

Speriamo di ritornare perciò presto su questo argomento.

Biologia. — *Allevamenti razziali di topi con cancro spontaneo e immuni secondo L. Strong. «Mutazioni somatiche» e potere germinale del soma.* Nota^(*) del Socio ACHILLE RUSSO.

L'origine dei neoplasmi e la possibilità di controllarli è un problema biologico alla cui soluzione concorrono ricercatori diversi. Uno di essi è Leonello Strong della Facoltà di Medicina dell'Università di New Haven, Yale School (U. S. A.), che recentemente, in un articolo divulgativo⁽¹⁾ dal titolo: *Aspetti genetici del problema del cancro*, ha riassunto alcuni risultati conseguiti o controllati in molti anni di studi insieme ai suoi collaboratori. Di esso si riferisce quanto può essere messo in rapporto con indagini fatte su l'argomento con indirizzo Zoologico, pubblicate negli ultimi tre anni.

Limitando questa Nota al predetto articolo, Strong in esso informa che da 30 anni ha iniziato i suoi studi con l'allevamento razziale di topi in modo da avere discendenti sempre più uniformi con l'eliminazione di molte varietà ancestrali.

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1951.

(1) «Scientific American», 1951.

Nel corso dei 30 anni ottenne razze di notevole uniformità, ma il massimo di purezza fu raggiunto da una di esse, detta *tipo A*, dalla quale, nel corso di 100 generazioni, ha avuto dalle femmine un'altissima percentuale con cancro spontaneo della glandula mammaria, che ha seguito per altre 75 generazioni. Similmente, in altre razze pure, si sviluppò il cancro spontaneo del polmone, del fegato e dello stomaco, che, ripetendosi nelle successive generazioni, dimostrarono di essere anch'essi ereditari.

Strong riferisce inoltre che, con altri allevamenti razziali, creò particolari razze di topi, che in alto grado erano immuni da cancro ⁽²⁾.

Per darsi ragione di tali fenomeni Strong valorizzò anche lui i postulati della *Genetica*, mettendo in relazione l'origine dei blastomi con i processi mutativi, in quanto le *mutazioni* agirebbero su particolari molecole proteiche, *geni*, che, insieme a quelli, destinati a trasmettere i caratteri ereditari, sono localizzati nei cromosomi delle cellule sessuali. Avendo egli però iniettato a molte centinaia di topi, già selezionati e geneticamente puri, uno dei più potenti agenti produttori di cancro, il *metilcolantrene*, insieme a blastomi vide prodursi nuove varietà con particolari caratteri somatici non prima osservati. Ritenne, pertanto, che tali varietà non si formino per *mutazione* dei *geni* delle cellule sessuali, ma per *mutazioni* di quelli anche esistenti nelle cellule somatiche. Non ostante egli avesse dato una discutibile prova di quanto era stato già supposto da suoi predecessori, la diretta origine delle *mutazioni tumorali* dalle cellule somatiche era ancora ipotetica fino a che non fosse stato riconosciuto ad esse lo stesso potere germinale delle cellule sessuali.

Strong era anche di tanto persuaso che concluse il suo scritto con le seguenti parole: *Se la teoria dell'origine del cancro come mutazione di cellule normali (somatiche) anziché di cellule germinali è esatta, saremo almeno su la via di scoprire quale è il meccanismo di resistenza al cancro. Se riusciremo a determinare in qual modo tale meccanismo opera nel corpo umano, potremo forse trovare un metodo per controllarlo.*

Associandoci ai postulati della *Genetica*, applicati, in questo caso, all'origine dei neoplasmi, ma diversamente da quanto erasi supposto, che dalle cellule germinali i *geni cancerigeni* passassero alle cellule dei tessuti per dare origine alle *mutazioni somatiche tumorali*, qui si conferma che la via più naturale, auspicata da Strong, è stata tracciata in ricerche zoologiche, pubblicate nel 1949-50-51 ⁽³⁾.

(2) In relazione alla purezza delle razze, su le quali egli operava, ha osservato che il trapianto di un tumore spontaneo ed il suo attecchimento dipendeva dalla costituzione genetica e che l'attecchimento stesso non era possibile nelle razze immuni dal cancro.

(3) A. Russo, *Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negli individui di un Ciliato («Cryptochilum echini» Mps.) loro potere germinale causa dei processi di rigenerazione e delle neoformazioni.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», Roma, 1949; A. Russo, *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato («Cryptochilum echini» Mps.).* «Atti Acc. Gioenia», Catania, 1950; A. Russo, *Un equivoco da chiarire (a proposito dell'origine dei neoplasmi).* «Boll. Acc. Gioenia», Catania, 1950; A. Russo, *Potere germinativo dei tessuti somatici e germi embrionali nell'origine dei neoplasmi.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», Roma, 1951; A. Russo, *Potere germinativo del soma e germi embrionali nelle proliferazioni cellulari preblastomatose.* «Boll. Acc. Gioenia», Catania, 1951.

Con tali ricerche si è dimostrato, difatti, che le cellule dei tessuti somatici, nei quali si sviluppano i *blastomi*, hanno un potere germinativo proprio, analogo a quello delle cellule sessuali. Il riconoscimento fu documentato dai fenomeni osservati in determinati momenti dello sviluppo dei *Metazoi*, e, soprattutto, nel ciclo vitale di un Protozoo (ciliato), nel quale si costituiscono individui sessuati non solo da quelli originari *germinali*, ma anche da quelli *somatici* da essi derivati⁽⁴⁾.

Per i dettagli si rimanda ai lavori già pubblicati; solo si fa notare che l'analogia dei fenomeni osservati nei *Metazoi* e nel *Protozoo*, lontani nella scala zoologica, dimostra che il *potere germinale sessuale delle cellule somatiche* è carattere fondamentale comune agli esseri viventi⁽⁵⁾.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$.* Nota^(*) di SILVIO CINQUINI, presentata dal Corresp. G. SANSONE.

In una Memoria in collaborazione con altro autore⁽¹⁾, nella quale abbiamo esteso all'equazione a derivate parziali

$$(I) \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)$$

quell'ordine di idee che C. Carathéodory ha sviluppato per le equazioni differenziali ordinarie, abbiamo stabilito per l'equazione (I) un teorema di esistenza e due teoremi di unicità valevoli, sotto opportune ipotesi, nelle seguenti condizioni:

1° $f(x, y, z, q)$ è una funzione definita per ogni x di $(0, a)$ (ove $a > 0$) e per ogni terna di numeri reali y, z, q , la quale, per ogni x fissato, è continua in (y, z, q) , mentre, per ogni terna (y, z, q) fissata, è quasi continua rispetto a x in $(0, a)$;

2° si considera la classe delle funzioni $z(x, y)$ continue, assieme alle proprie derivate parziali $z'_y(x, y)$, nel campo

$$D_{\infty}: \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty,$$

e tali che, per ogni y fissato, $z(x, y)$ sia assolutamente continua in x ;

(4) Si potrebbe affermare che nell'uno e nell'altro caso l'effetto sarebbe quasi identico; però, mentre le *mutazioni somatiche*, derivate dal genoma, sono ipotetiche, quelle derivate direttamente nei tessuti per il potere germinativo del soma, sono una realtà, alla quale potrebbero seguire eventuali più sicure applicazioni profilattiche.

(5) Tale riconoscimento potrebbe dare nuova luce al discusso problema su l'eredità dei tumori.

(*) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1951.

(1) M. CINQUINI CIBRARIO-S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$.* «Annali di Matematica pura e applicata», Tomo XXXII (1951). Tale lavoro verrà indicato nel seguito con Memoria A. M.

3° si intende, come soluzione del problema di Cauchy relativo alla (I), una funzione della classe ora indicata, la quale, in corrispondenza a ogni y , soddisfa, per quasi tutti gli x di $(0, a)$, all'equazione (I), e per $x = 0$ coincide con una funzione prefissata $\varphi(y)$ continua assieme alla propria derivata $\varphi'(y)$.

Come è annunciato alla fine dell'introduzione alla nostra Memoria A. M., le nostre ricerche sono state riprese per considerare, sempre nell'ordine di idee sopra indicato, il caso in cui la funzione $f(x, y, z, q)$ sia definita in un campo limitato rispetto a tutte le variabili. Tra i risultati raggiunti, i quali formano oggetto di un altro nostro lavoro ⁽²⁾, anche esso in collaborazione e che sta per essere dato alla stampa, viene enunciato nella presente Nota un teorema di unicità per l'equazione (I), (relativo alla forma più ampia del problema di Cauchy sopra ricordata), che si collega alle considerazioni sviluppate nel § 3 della Memoria A. M.

Come è noto, nella letteratura matematica dell'ultimo ventennio figurano pubblicazioni ⁽³⁾ dedicate alla unicità delle soluzioni dell'equazione (I), (considerate, anteriormente alla nostra Memoria A. M., soltanto nel campo delle funzioni $z(x, y)$ continue assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine), nel caso in cui entrambe le variabili x, y si mantengono in un campo limitato. Queste ricerche sono tuttora in fermento e, mentre la scelta del campo in cui si vuol stabilire l'unicità dell'integrale della (I) non può esser fatta in modo arbitrario, sorge la domanda se si possa pervenire a risultati definitivi, perchè il complesso delle ipotesi, più o meno artificiose, che si fanno per stabilire l'unicità, appare piuttosto fluido nel senso che, restringendone una, se ne può allargare un'altra.

Già dal lemma del n. 7 della nostra Memoria A. M. seguirebbe, in modo ovvio, un nuovo teorema di unicità valevole nel caso in cui entrambe le variabili x, y si mantengono in un campo limitato; peraltro tale proposizione non viene rilevata nè in quella Memoria, la quale aveva come obbiettivo il caso più espressivo, in cui il campo in cui varia il punto (x, y) è costituito da una striscia limitata dall'asse y e da una sua parallela, nè nelle attuali ricerche.

Il teorema di unicità, che ho stabilito e che enuncio al n. 1, si riferisce alla già citata forma più ampia del problema di Cauchy e si presenta abbastanza generale; a conferma di quanto ho rilevato poco sopra, esso potrebbe essere enunciato anche sotto ipotesi opportunamente modificate senza introdurre cambiamenti essenziali nella linea della dimostrazione.

(2) Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$. Mentre il contenuto complessivo di tale Memoria che comparirà nei « Rend. del Circolo matematico di Palermo », è dovuto alla collaborazione dei due autori, il risultato della presente Nota è stato raggiunto da uno solo di essi.

(3) Voglio citare, a motivo di qualche analogia che, in ultima analisi, intercede tra la forma delle sue ipotesi e qualcuna delle condizioni del teorema della presente Nota, due recenti pubblicazioni di M. VOLPATO, *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine*. « Annali della Università di Ferrara », vol. VIII (1950). *Criteri di confronto e unicità per le soluzioni dell'equazione $p = f(x, y, z, q)$ coi dati di Cauchy*. « Rend. del Seminario Matematico dell'Università di Padova ». A. XX (1951), pp. 232-243.

Per altre indicazioni bibliografiche si rinvia alla Memoria A. M. e alla Nota di VOLPATO citata per seconda.

Tale teorema è basato su un lemma (n. 2) che riprende e raffina, in forma opportunamente approfondita, il procedimento sviluppato nel citato n. 7 della Memoria A. M., nel quale è stata raggiunta, mediante delicate considerazioni di teoria delle funzioni di variabile reale, una prima notevole estensione di una disuguaglianza di A. Haar per le funzioni di due variabili.

Mentre dal teorema del n. 1 segue immediatamente un'altra proposizione di unicità (n. 3) valevole nel caso in cui la funzione $f(x, y, z, q)$ sia definita in un campo limitato rispetto a tutte le variabili, la presente Nota termina con un esempio (n. 4) che illustra la portata del teorema del n. 1.

I. TEOREMA. — Siano $g^{[1]}(x), g^{[2]}(x)$ due funzioni continue in $(0, a)$ [ove $a > 0$] con $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$, e sia $f(x, y, z, q)$ una funzione definita per ogni (x, y) del campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

e per ogni coppia di numeri reali z, q , la quale, per ogni x fissato, risulti continua in (y, z, q) mentre, per ogni terna (y, z, q) fissata, risulti quasi continua rispetto a x in $(0, a)$, e sia $\varphi(y)$ una funzione continua, assieme alla propria derivata $\varphi'(y)$, nell'intervallo $(g^{[1]}(0), g^{[2]}(0))$.

Supponiamo che esistano un numero $\sigma > 0$ e due funzioni $H(x), L(x)$ quasi-continue, non negative e integrabili⁽⁴⁾ in $(0, a)$, in modo che su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x sia verificata, per quasi tutti gli x e per ogni coppia $(z_1, q_1), (z_2, q_2)$ con $z_2 > z_1$, la disuguaglianza

$$(1) \quad f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + L(x)|q_2 - q_1|,$$

mentre si abbia

$$(2) \quad f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[1]}(x)(q_2 - q_1),$$

quando è anche

$$g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[1]}(x) + \sigma;$$

e

$$(3) \quad f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[2]}(x)(q_2 - q_1),$$

quando è anche

$$g^{[2]}(x) - \sigma \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

ove $G^{[1]}(x), G^{[2]}(x)$ sono due funzioni quasi continue e integrabili in $(0, a)$, le quali, per ogni coppia x', x'' con $0 \leq x' < x'' \leq a$, verificano, rispettivamente, le disuguaglianze

$$(4) \quad g^{[1]}(x') \leq g^{[1]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[1]}(x) dx,$$

$$(5) \quad g^{[2]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[2]}(x) dx \leq g^{[2]}(x').$$

(4) Nella presente Nota l'integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue.

Sotto queste ipotesi esiste al più una funzione $z(x, y)$ continua, assieme alla propria derivata parziale $z'_y(x, y)$, nel campo D e tale che, su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x , sia assolutamente continua rispetto a x , la quale su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x soddisfa, per quasi tutti gli x , all'equazione

$$z'_x(x, y) = f(x, y, z(x, y), z'_y(x, y)),$$

e inoltre verifica la condizione iniziale

$$z(0, y) = \varphi(y), \quad \text{per } g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0).$$

Il teorema enunciato è conseguenza quasi immediata del lemma del n. 2.

2. LEMMA. - Siano $g^{[1]}(x)$, $g^{[2]}(x)$ le funzioni indicate al n. 1, e sia $z(x, y)$ una funzione continua, assieme alla propria derivata parziale $z'_y(x, y)$, nel campo D definito al n. 1, la quale, per ogni y fissato, sia assolutamente continua rispetto a x , e verifichi la condizione

$$z(0, y) = 0, \quad \text{per } g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0).$$

Si supponga che, su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x , sia verificata, per quasi tutti gli x nei quali $z(x, y) \neq 0$, la disuguaglianza

$$\frac{\partial |z(x, y)|}{\partial x} \leq H(x) |z(x, y)| + L(x) \left| \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right|,$$

mentre si abbia

$$\frac{\partial |z(x, y)|}{\partial x} \leq H(x) |z(x, y)| + G^{[1]}(x) \frac{\partial |z(x, y)|}{\partial y},$$

quando è anche

$$g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[1]}(x) + \sigma;$$

e

$$\frac{\partial |z(x, y)|}{\partial x} \leq H(x) |z(x, y)| + G^{[2]}(x) \frac{\partial |z(x, y)|}{\partial y},$$

quando è anche

$$g^{[2]}(x) - \sigma \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

ove $H(x)$, $L(x)$, $G^{[1]}(x)$, $G^{[2]}(x)$, σ sono le funzioni e il numero indicati al n. 1, e sono verificate le disuguaglianze (4) e (5).

Sotto queste ipotesi risulta in tutto il campo D $z(x, y) = 0$.

La dimostrazione del presente lemma, che è basata sul procedimento approssimativo sviluppato nel n. 7 della Memoria A. M., verrà esposta nella Memoria annunciata in ⁽²⁾.

3. UN COMPLEMENTO AL TEOREMA DEL N. 1. - Se la funzione $f(x, y, z, q)$ è definita nel campo

$$\Delta: \quad 0 \leq x \leq a, \quad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x), \quad b_1 \leq z \leq b_2, \quad b'_1 \leq q \leq b'_2,$$

ove b_1, b_2, b'_1, b'_2 sono quattro numeri reali con $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2$ e se le disuguaglianze (1), (2), (3) sono verificate quando z_1, z_2 appartengono all'intervallo (b_1, b_2) , e q_1, q_2 appartengono a (b'_1, b'_2) , il teorema di unicità del n. 1 è ancora completamente valido.

4. ESEMPIO. - Alle ipotesi del teorema del n. 1 soddisfa il seguente esempio. Sia

$$g^{[1]}(x) = -4 + (x-2)^{4/5}, \quad g^{[2]}(x) = 4 + (x-1)^{2/3}, \quad (0 \leq x \leq 3),$$

siano $\Psi_1(y), \Psi_2(y)$ due funzioni definite nel seguente modo

$$\Psi_1(y) = \sqrt[9]{3-y}, \quad \text{per } y \leq 3; \quad \Psi_1(y) = 0, \quad \text{per } y > 3;$$

$$\Psi_2(y) = \sqrt[5]{2+y}, \quad \text{per } y \geq -2; \quad \Psi_2(y) = 0, \quad \text{per } y < -2;$$

e si consideri, per ogni (x, y) del campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq 3, \quad -4 + (x-2)^{4/5} \leq y \leq 4 + (x-1)^{2/3}$$

e per ogni coppia di numeri reali z, q , la funzione

$$f(x, y, z, q) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \frac{z^3}{1+z^2} - \left[\frac{2}{3} \frac{(x-1)^{-1/3} \Psi_2(y)}{q^2 \sqrt[5]{2+y} + \Psi_1(y) [1 + \cos^2 q]} + \frac{4}{5} \frac{(x-2)^{-1/5} \Psi_1(y) q^2}{q^4 \sqrt[9]{3-y} + \Psi_2(y) e^q} \right] q^3.$$

Infine sia $\varphi(y)$ una funzione continua assieme a $\varphi'(y)$ nell'intervallo $(-4 + 2^{4/5}, 5)$.

Si constata immediatamente che le (1), (2) e (3) sono soddisfatte per

$$\sigma = 2 - 2^{4/5}; \quad H(x) = \frac{3}{2} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}; \quad L(x) = \frac{2}{3} |x-1|^{-1/3} + \frac{4}{5} |x-2|^{-1/5};$$

$$G^{[1]}(x) = -\frac{4}{5} (x-2)^{-1/5}; \quad G^{[2]}(x) = -\frac{2}{3} (x-1)^{-1/3},$$

mentre è evidente che hanno luogo le (4) e (5).

Aerodinamica. — *Le relazioni tra le funzioni di correlazione della velocità nella turbolenza omogenea e isotropica.* Nota^(*) di ENNIO MATTIOLI, presentata dal Socio E. PISTOLESI.

1. Usando le notazioni del Kármán⁽¹⁾ indichiamo con f, g, h, k, q le funzioni fondamentali di doppia e tripla correlazione di velocità (fig. 1). Tra queste funzioni esistono tre relazioni: l'equazione di von Kármán⁽²⁾ e le due equazioni di Kármán-Howarth⁽³⁾, che dipendono dal principio di continuità.

Il Prandtl⁽⁴⁾ osserva, in una nota del suo libro, che per l'equazione di von Kármán « vi è una possibilità di dimostrazione attraverso la considerazione di una coppa emisferica di spessore dr ». Egli però non dà la dimostrazione e

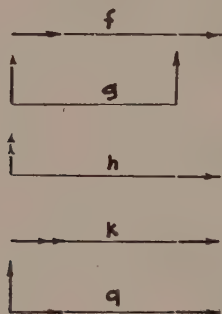


Fig. 1.

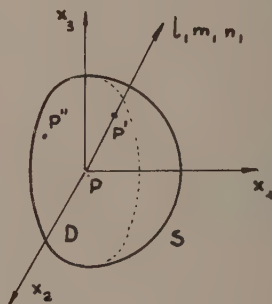


Fig. 2.

la sola che, a quanto ci risulta, sia stata fatta sulla via indicata dal Prandtl è quella di Wieghardt⁽⁵⁾: essa però non ci sembra accettabile perchè diversi punti non sono toccati col dovuto rigore.

Seguendo il suggerimento di Prandtl diamo una dimostrazione ottenuta applicando il principio di continuità ad una semisfera, ed un'altra ottenuta utilizzando l'analogia col tensore degli sforzi. Il metodo può applicarsi per ottenere relazioni tra le funzioni di correlazione di ordine superiore a 2. Nel corso del lavoro si

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1951.

(1) TH. VON KÁRMÁN, *Some Remarks on the Statistical Theory of Turbulence*. «Proc. Fifth Int. Cong. App. Mech.», 1938.

(2) TH. VON KÁRMÁN, *The fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence*. «Jour. Aero. Sci.», 1937.

(3) TH. VON KÁRMÁN and L. HOWARTH, *On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence*. «Proc. Roy. Soc. London» (A), 164, 1938.

(4) L. PRANDTL, *Stromungslehre*. Vieweg, Braunschweig, 1949.

(5) K. WIEGHARDT, *Zusammenfassender Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie*. Luftfahrtforschung, 1942.

giunge a forme di relazioni che si possono considerare come diverse espressioni delle equazioni già note.

2. Per rendere più spedita l'esposizione premettiamo il calcolo di qualche integrale.

Sia $P x_1 x_2 x_3$ una terna cartesiana ortogonale ed S la superficie di una semisfera di centro P e raggio R il cui cerchio diametrale D giace sul piano $x_2 x_3$ (fig. 2).

Consideriamo una qualunque semiretta uscente dall'origine ed *intersecante la semisfera*: siano l_1, m_1, n_1 i suoi coseni direttori.

Si ha facilmente:

$$(1) \quad \iint_S l_1 dS = \iint_D dD = \pi R^2.$$

Si vede pure facilmente con considerazioni geometriche che si ha:

$$(2) \quad \iint_S l_1^2 dS = \iint_S m_1^2 dS = \iint_S n_1^2 dS$$

e poichè la somma dei tre integrali è

$$(3) \quad \iint_S dS = 2 \pi R^2$$

ciascuno di essi vale $2/3 \pi R^2$.

Detto infine S_1 quel quarto della semisfera che giace nella regione delle coordinate positive, e D_1 il corrispondente quarto di D si ha:

$$(4) \quad \iint_{S_1} l_1 m_1 dS_1 = \iint_{D_1} \frac{x_2}{R} dD_1 = \frac{R^2}{3}$$

come si ottiene subito o col calcolo diretto oppure osservando che il secondo integrale rappresenta, a meno della costante $1/R$, il momento statico di D_1 rispetto all'asse x_1 .

3. Siano u_1, u_2, u_3 le componenti della velocità di P secondo gli assi x_1, x_2, x_3 che supponiamo in quiete rispetto al moto medio, e siano P'' e P' due punti generici rispettivamente su D e su S .

La portata di massa entrante nella semisfera attraverso il piano diametrale è data da

$$(5) \quad \iint_D \rho u''_1 dD;$$

il flusso uscente dalla superficie sferica è dato da

$$(6) \quad \iint_S \rho p'_i dS$$

dove p'_i è la componente della velocità di P' normale alla superficie sferica. Per il principio di continuità del fluido incompressibile si deve avere:

$$(7) \quad \iint_D u'_i dD = \iint_S p'_i dS.$$

Moltiplicando ambo i membri della (7) per u_i e facendo la media si ha:

$$(8) \quad \iint_D \overline{u_i u'_i} dD = \iint_S \overline{u_i p'_i} dS.$$

Siano p_1, p_2, p_3 le componenti della velocità di P secondo tre assi ortogonali, di cui il primo diretto come PP' e gli altri due arbitrari ⁽⁶⁾. Siano $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ i coseni direttori dei nuovi assi rispetto agli antichi. Allora è:

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 = l_i p_i \\ u_2 = m_i p_i \\ u_3 = n_i p_i \end{cases}$$

dove gli indici ripetuti vanno sommati da 1 a 3.

Sostituendo nel 2° membro della (8) la prima delle (9), tenendo conto delle definizioni di $f(r)$ e $g(r)$ (dove r indica la distanza fra i due punti in cui si considerano le correlazioni di velocità) e delle condizioni di isotropia si ricava:

$$(10) \quad \overline{u^2} \iint_D g(r) dD = \overline{u^2} \iint_S l_i f(R) dS$$

da cui, per la (1) e con facili passaggi:

$$(11) \quad \int_0^R r g(r) dr = \frac{1}{2} R^2 f(R).$$

La (11) può considerarsi come una seconda forma dell'equazione di von Kármán. Da essa derivando rispetto ad R si ricava tale equazione nella forma nota:

$$(12) \quad g(R) = f(R) + \frac{R}{2} \frac{df}{dR}.$$

(6) Si può fissare una legge per scegliere la direzione del secondo asse e determinare di conseguenza quella del terzo. Ma le proprietà che seguono non dipendono dalla direzione del secondo e terzo asse, purchè, s'intende, siano soddisfatte le condizioni di perpendicolarità.

4. Si può arrivare direttamente alla (11) utilizzando l'analogia del tensore di correlazione con un tensore degli sforzi. È noto infatti che posto:

$$R_{ik} = \overline{u_i u'_k}$$

si può considerare la R_{ik} come la componente nella direzione k dello sforzo sopra un piano perpendicolare alla direzione i ; $\overline{u^2 f(r)}$ rappresenta la tensione principale radiale e $\overline{u^2 g(r)}$ la tensione principale trasversa (per l'isotropia si ha simmetria sferica intorno a P). Dall'equazione di continuità si ricava facilmente:

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

che esprime l'equilibrio per il tensore degli sforzi.

Allora la semisfera di cui si è parlato nei precedenti paragrafi è sottoposta ad una pressione uniforme $\overline{u^2 f(R)}$ sulla superficie sferica e ad una pressione $\overline{u^2 g(r)}$, variabile col raggio, sul piano diametrale. Per l'equilibrio alla traslazione nella direzione x_1 si ha subito:

$$\int_0^R \overline{u^2 g(r)} \cdot 2\pi r dr = \overline{u^2 f(R)} \cdot \pi R^2$$

da cui segue la (11).

5. Moltiplichiamo ambo i membri della (7) per u_1^2 e facciamo la media. Si ha:

$$(13) \quad \iint_D \overline{u_1^2 u_1''} dD = \iint_S \overline{u_1^2 p_1'} dS.$$

Sostituendo nell'integrale a secondo membro l'espressione della u_1 data dalla (9), tenendo conto dell'isotropia e delle definizioni di k ed h si ha:

$$(14) \quad 0 = \iint_S [l_1^2 k(R) + m_1^2 h(R) + n_1^2 h(R)] dS$$

da cui, per le (2):

$$(15) \quad k + 2h = 0$$

che è la prima equazione di Kármán-Howarth.

6. Consideriamo ora il solido limitato da S_1 e dai tre piani coordinati. Detti D_2 e D_3 i quadranti di cerchio che lo delimitano sui piani coordinati $x_1 x_3$ e $x_1 x_2$ rispettivamente, si ha per il principio di continuità, e con ovvie notazioni:

$$(16) \quad \iint_{D_1} u_1'' dD_1 + \iint_{D_2} u_2'' dD_2 + \iint_{D_3} u_3'' dD_3 = \iint_{S_1} p_1' dS.$$

Moltiplicando ambo i membri della (16) per $u_1 u_2$, facendo la media e tenendo conto delle condizioni di isotropia si ricava:

$$(17) \quad 2 \iint_{D_1} \overline{u_1 u_2 u_1''} dD_1 = \iint_{S_1} \overline{u_1 u_2 p_1'} dS_1.$$

Per calcolare il primo membro della (17) prendiamo una terna ausiliaria di riferimento avente l'asse X_1 coincidente con x_1 , e l'asse X_2 diretto da P a P'' e formante un angolo α , variabile da zero a 90° , con l'asse x_2 . Dette q_1, q_2, q_3 le componenti della velocità di P rispetto alla nuova terna si ha:

$$(18) \quad u_1 = q_1; \quad u_2 = q_2 \cos \alpha - q_3 \sin \alpha; \quad u_1'' = q_1''.$$

Segue:

$$(19) \quad \begin{aligned} \iint_{D_1} \overline{u_1 u_2 u_1''} dD_1 &= \iint_D \overline{q_1 (q_2 \cos \alpha - q_3 \sin \alpha) q_1''} dD_1 = \\ &= \overline{u^2} \iint_{D_1} q(r) \cos \alpha dD_1 = \overline{u^2} \int_0^R q(r) r dr. \end{aligned}$$

Il secondo membro della (17) si calcola facilmente tenendo conto delle (9), della (4) e delle condizioni di isotropia; si ha:

$$(20) \quad \begin{aligned} \iint_{S_1} \overline{u_1 u_2 p_1'} dS_1 &= \overline{u^2} \iint_{S_1} [l_1 m_1 k(R) + l_2 m_2 h(R) + l_3 m_3 h(R)] dS_1 = \\ &= \overline{u^2} [k(R) - h(R)] \iint_{S_1} l_1 m_1 dS_1 = \overline{u^2} [k(R) - h(R)] \frac{R^2}{3}. \end{aligned}$$

Dalle (17), (19) e (20) segue allora:

$$(21) \quad 2 \int_0^R q(r) r dr = \frac{R^2}{3} [k(R) - h(R)]$$

che può considerarsi come una nuova forma della 2ª equazione di Kármán-Howarth. Da essa, derivando rispetto ad R e tenendo conto della (15) si deduce l'equazione nella forma nota:

$$(22) \quad q(R) = -h(R) - \frac{R}{2} \frac{dh}{dR}.$$

Fisica. — *Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nelle soluzioni*^(*). Nota^(**) di MARIO AGENO e RUGGERO QUERZOLI, presentata dal Socio G. C. TRABACCHI.

In una recente visita a Roma, M. Kasha avanzò l'ipotesi che il meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni^(1, 2) sia sostanzialmente il seguente. La radiazione ionizzante primaria (elettroni veloci o particelle α) nell'attraversare la soluzione darebbe luogo, attraverso fenomeni complessi di rottura e ricombinazione di molecole, ad una radiazione nel lontano ultravioletto, la quale a sua volta, fortemente riassorbita nella soluzione, desterebbe in questa la fluorescenza normale. Egli ci propose inoltre di tentare di mettere in evidenza l'esistenza di questa radiazione ultravioletta intermedia con un dispositivo sperimentale consistente sostanzialmente in due celle affiancate, piene della soluzione in esame, delle quali la prima doveva venir irradiata con un pennellino di raggi γ molto collimato, mentre dalla seconda si doveva raccogliere la luce di fluorescenza con un fotomoltiplicatore opportunamente disposto.

Accogliendo in parte la proposta di M. Kasha, abbiamo eseguita la seguente esperienza, allo scopo di vedere, prima di tutto, se si ha effettivamente attraverso la soluzione un trasporto dell'energia su distanze dell'ordine di almeno qualche millimetro, come appunto esige il meccanismo da lui proposto.

Una sorgentina di particelle α , costituita da un dischetto di nichel del diametro di 5 mm., con depositi sopra circa dieci millicurie di polonio, è stata immersa in una soluzione di terfenile in xilolo al 5 %⁽³⁾. Si è in tal modo ottenuta una sorgente di luce di fluorescenza sufficientemente intensa per poter essere fotografata.

Ciò che si può prevedere relativamente all'aspetto della fotografia, presa disponendo di taglio il dischetto di nichel costituente la sorgente di particelle α , è notevolmente diverso a seconda che esista oppure no il trasporto dell'energia di cui si è sopra parlato.

Nell'ipotesi che tale trasporto non abbia luogo, la luce di fluorescenza verrà emessa essenzialmente nella zona del liquido attraversata dalle particelle α , cioè in uno straterello dello spessore dell'ordine dei 50 μ immediatamente aderente al dischetto di nichel. L'effetto del trasporto sarà invece quello di rendere la sorgente di luce assai più estesa e diffusa attraverso il liquido.

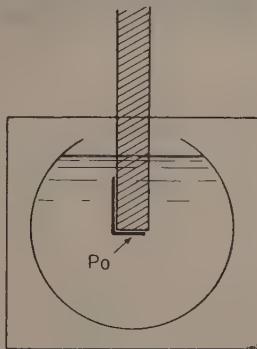


Fig. 1.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità, laboratorio di Fisica, Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1951.

(1) M. AGENO, M. CHIOZZOTTO, R. QUERZOLI, « Rend. Ist. Sup. Sanità », XII, 557 (1949).

(2) M. AGENO, M. CHIOZZOTTO, R. QUERZOLI, « Phys. Rev. », 79, 720 (1950).

(3) R. HOFSTADTER, S. H. LIEBSON, J. O. ELLIOT, « Phys. Rev. », 78, 81 (1950).

Il dispositivo sperimentale adottato è schematicamente indicato nella figura 1. La vaschetta cilindrica, chiusa alle due estremità da facce piane, era di vetro ordinario e conteneva 75 cc. di soluzione. La fotografia è stata fatta con obiet-



Fig. 2.

tivo Leitz-Elmar 1:3,5, a circa 40 cm. di distanza, con posa di 48 ore. Il risultato è mostrato nella figura 2. Come si vede, la sorgente di luce si estende ad un volume di liquido dell'altezza di circa un centimetro, tutto attorno alla sorgente.

Questo risultato è suscettibile *a priori* di varie interpretazioni:

1° si può supporre che l'alone luminoso che circonda la sorgente di particelle α sia dovuto a diffusione da parte del liquido della luce di fluorescenza emessa solo nelle immediate prossimità della sorgente stessa;

2° oppure che esso sia dovuto a lenta diffusione nella soluzione di parte del polonio depositato inizialmente sul nichel;

3° oppure infine che l'energia ceduta al liquido dalle particelle α nelle immediate vicinanze della sorgente viaggi attraverso il liquido stesso per un tratto dell'ordine di alcuni millimetri, prima di trasformarsi in radiazione di fluorescenza.

Per escludere la prima possibilità, abbiamo sostituito alla sorgente di particelle α una provetta di vetro col fondo molto sottile, sul quale era adagiato un pezzetto di schermo fosforescente (fig. 3). La fotografia eseguita in queste condizioni mostra l'immagine ben netta dello schermo fosforescente (fig. 4), la cui luce non viene apprezzabilmente diffusa dalla soluzione. La striscia debolmente luminosa superiore è dovuta ad un effetto di rifrazione, nel punto ove il liquido esterno cessa di bagnare la provetta di vetro in esso immersa. Sul negativo è visibile molto debolmente il fondo semicircolare della vaschetta illuminato dalla luce che proviene dallo schermetto ed ha attraversato la soluzione.

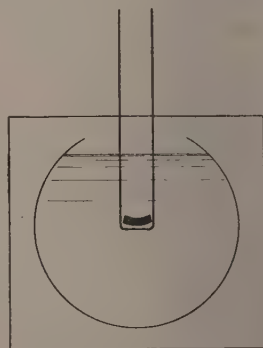


Fig. 3.

Per escludere la possibilità che il risultato della figura 2 sia dovuto a lento passaggio in soluzione del polonio, abbiamo fatto due prove. Innanzi tutto, abbiamo misurato la radioattività della soluzione, dopo l'esecuzione della prima fotografia. A questo scopo, alcune gocce della soluzione sono state evaporate su una lastrina di alluminio e con un contatore proporzionale di modello convezionale si è contato il numero di particelle α da questa emesse al secondo. Si è trovato una

radioattività alfa ben misurabile (circa una α al secondo) corrispondente però a meno di un quarto di microcurie per tutta la soluzione. Il polonio passato in soluzione risulta quindi meno di $1/400$ di quello depositato inizialmente sul nichel, il che esclude che l'effetto dimostrato dalla figura 2 sia dovuto a questa causa.

Come seconda prova, abbiamo interposto tra la sorgente di particelle α e la soluzione un foglio di alluminio molto sottile, corrispondente come spessore a circa metà del percorso delle particelle. La sorgente non veniva così a contatto con il liquido ed era quindi escluso un passaggio del polonio in soluzione. La figura 5 mostra il risultato della fotografia eseguita in queste condizioni: come si

vede, l'alone luminoso (pur ridotto a causa del molto minor percorso delle α nel liquido) sussiste chiaramente a immediato contatto dell'alluminio, il che esclude definitivamente ogni possibilità per la seconda delle tre interpretazioni sopra elencate.

Ci sembra dunque di poter legittimamente concludere che la nostra esperienza dimostra che la luce di fluorescenza, in buona parte almeno, non viene emessa per azione diretta delle particelle α sulle molecole della soluzione. Parte dell'energia ceduta alla soluzione dalle α viaggia per un tratto dell'ordine di alcuni millimetri attraverso la soluzione stessa, prima di trasformarsi nella nota radiazione di fluorescenza.

Se il meccanismo del trasporto sia effettivamente quello ipotizzato da Kasha cioè emissione di una radiazione ultravioletta fortemente riassorbita nel liquido ed eccitante la fluorescenza normale, è l'argomento delle ricerche attualmente in corso.

Ringraziamo il prof. E. Amaldi, direttore del Centro di Fisica Nucleare del C. N. R., per averci gentilmente fornito la sorgente di particelle α usata in queste esperienze.



Fig. 4.

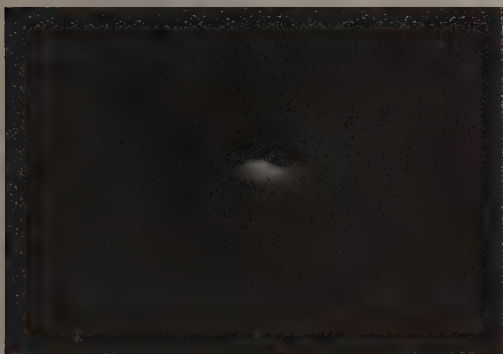


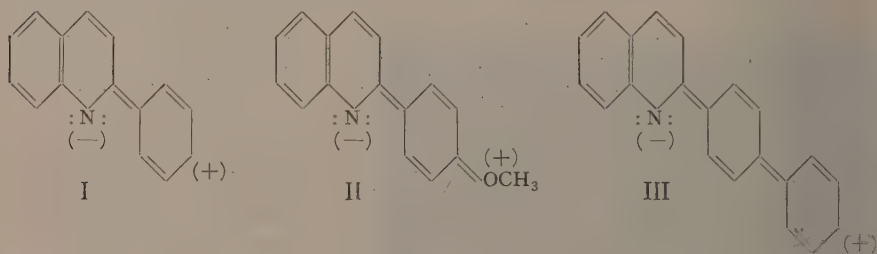
Fig. 5.

Chimica. — *Risonanza e impedimento sterico di risonanza nelle 2-arilchinoline e derivati*^(*). Nota di MARTINO COLONNA, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In relazione alle ricerche sui sistemi cromoforici responsabili dell'assorbimento, nella serie chinolinica⁽¹⁾, riferisco in questa Nota i risultati delle indagini spettroscopiche, con una prima comparazione e un cenno di classificazione degli spettri, di numerose 2-arilchinoline e corrispondenti acidi cinconinici, rimando in altra sede la discussione dettagliata e le conclusioni sulle relazioni strutturali dei diversi composti studiati.

Gli spettri sono stati registrati con lo spettrofotometro Beckman D. U., nel campo 250-500 mμ, usando soluzioni (1:100.000) in alcool etilico, acido cloridrico o solforico a varie concentrazioni, e per gli acidi cinconinici anche in NaOH N/1000; i risultati (λ mas., $\log \epsilon$ mol.) sono raccolti nelle tabelle I, II e III.

Da un esame sommario di confronto dei vari spettri, si dimostra che le proprietà spettrali dei vari composti sono intimamente legate alla interazione elettronica (elettroni π) fra i due nuclei (chinolina-arile), come avviene per altre serie di composti⁽²⁾ e in particolare per le 2-aril-naftaline⁽³⁾, con le quali le 2-aril-chinoline mostrano strette analogie spettrali⁽⁴⁾. Così, ad esempio, per le 2-aril-chinoline si può affermare che responsabili dell'assorbimento, nel campo verso le minori frequenze, sono essenzialmente le strutture limiti —I, —II, —III⁽⁵⁾, in cui i due nuclei sono congiunti mediante un doppio legame⁽⁶⁾ (coplanarità):



(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Trieste, e nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) «Rend. Accad. Lincei», VIII, vol. V, 50 (1948); «Gazz. Chim. Ital.», 78, 502, 778, 787 (1948); «Boll. sc. fac. chim. ind.» (Bologna), 9, 46, 49 (1951).

(2) Esiste un'estesa letteratura a tale proposito: G. W. WHELAND, *The Theory of Resonance and its applications*, John Wiley and Sons, New York (1944); P. E. FIELDING, R. J. W. LE FÈVRE, «J. Chem. Soc.», 1811 (1951); KRUMHOLTZ, «J. Am. Chem. Soc.», 73, 3487 (1951).

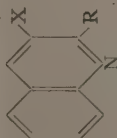
(3) FRIEDEL, ORCHIN, REGGEL, «J. Am. Chem. Soc.», 70, 199 (1948); *ibid.*, 71, 3002 (1949).

(4) Sulle analogie spettrali = C—, = N—: TH. FÖRSTER, «Zeit. für Elektroch.», 45, 548 (1939); A. ALBERT, «J. Chem. Soc.», 477 (1951).

(5) R. S. MULLIKEN e C. A. RICE, «Reports on Progress in Physics», 8, 231 (1941).

(6) L. PAULING, *La natura del legame chimico*, Edizioni italiane, Roma, 1949, cap. VI.

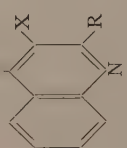
TABELLA I.

N.		P. F.	Solvente	PUNTI CARATTERISTICI								Osservazioni	Bibliografia
				Zona: 250 350 m μ				Zona: 300-450 m μ					
				λ_1 mas	$lg \epsilon_1$	λ_2 mas	$lg \epsilon_2$	λ_3 mas	$lg \epsilon_3$	λ_4 mas	$lg \epsilon_4$		
1	X ; R	—	acqua HCl pH 1,1	275	3,51	299	3,46	312	3,52	—	—	s. f.	(1)
2	Chinolina	—	etanolo	—	—	—	—	313	3,80	—	—	—	(1)
3	H —C ₆ H ₅	84°	HCl N/100	256	4,61	(290)	3,87	322	3,89	—	—	—	(2)
4	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	267	4,35	—	—	338	4,33	—	—	—	(3)
5	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	125°	etanolo.	274	4,27	(296)	4,08	346-347	4,34	—	—	—	(3)
6	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	HCl N/100	270-271	4,44	—	—	331-333	4,09	—	—	—	(4)
7	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	285	3,06	—	—	361	3,66	—	—	—	(4)
8	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	178°	etanolo	283	4,15	—	—	(304)	3,66	—	—	—	(4)
9	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	—	HCl N/100	270	4,54	(298)	4,10	328-333	4,30	—	—	—	(4)
10	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	258-262	4,67	—	—	358-363	4,34	—	—	—	(4)
11	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	—	etanolo	251	4,25	272	4,33	359-360	4,53	—	—	—	(5)
12	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	121°	HCl N/100	254	4,51	287	4,35	(306)	3,29	359-361	3,83	—	(5)
13	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	264	4,24	—	—	326-327	3,65	386	3,93	—	(6)
14	» —C ₆ H ₄ —C ₆ H ₅ (p)	53,5-54°	etanolo	275-276	3,89	(300)	3,64	342	4,17	—	—	s. f.	(6)
15	» —C ₆ H ₄ —CH ₃ (p)	—	HCl N/100	—	—	—	—	312	3,70	320	3,73	—	(6)
16	» —C ₆ H ₄ —CH ₃ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	261	3,98	—	—	330-331	4,17	—	—	—	(7)
17	» —C ₆ H ₄ —CH ₃ (p)	66-67°	etanolo	266	3,91	—	—	337 338	4,22	—	—	s. f.	(7)
18	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	HCl N/100	253	4,30	—	—	(310)	3,74	—	—	—	(8)
19	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	269	3,83	—	—	336-338	4,21	—	—	—	(8)
20	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	78-79°	etanolo	275-276	3,75	—	—	346-348	4,27	—	—	—	(8)
21	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	HCl N/100	264-265	4,18	—	—	321-322	3,89	—	—	—	(8)
22	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	H ₂ SO ₄ conc.	279-281	3,68	—	—	348-349	4,22	—	—	—	(8)
23	» —C ₆ H ₄ —OCH ₃ (p)	—	—	280	3,86	—	—	345	4,28	—	—	—	(8)

(1) A. ALBERT, « J. Chem. Soc. », 477, (1937).
(2) W. A. PETROW, « J. Chem. Soc. », 316 (1943).
(3) W. A. PETROW, « J. Chem. Soc. », 316 (1943).
(4) W. STEINKOPF, « J. prakt. Chem. », [2], 109, 41 (1924).
(5) W. A. PETROW, « J. Chem. Soc. », 316 (1943).
(6) BRAUN e BRAUNS, « Ber. », 60, 1253 (1927).
(7) Prodotto non noto in letteratura sulla cui preparazione sarà riferito in altra sede.
(8) Ved. nota (7).

(1) A. ALBERT, *J. Chem. Soc.*, 477, (1951). (2) FEITZINGER, *J. prakt. Chem.*, [2], 56, 298 (1897). (3) PERIFFER, *J. prakt. Chem.*, [2], 109, 41 (1924). (4) W. STEINKOPF, *A. 543*, 119 (1940). (5) W. A. PERROW, *J. Chem. Soc.*, 316 (1943). (6) BRAUN e BRAUNS, *Ber.*, 60, 1253 (1927). (7) Prodotto non noto in letteratura sulla cui preparazione sarà riferito in altra sede. (8) Ved. nota (7).

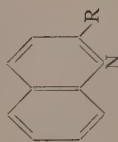
TABELLA II.

N.	<div>O=C -OH</div> <div></div>	P. F.	Solvente	PUNTI CARATTERISTICI								Osservazioni	Bibliografia
				Zona: 250 300 mμ				Zona: 300 500 mμ					
				λ ₁ mas	lg ε ₁	λ ₂ mas	lg ε ₂	λ ₃ mas	lg ε ₃	λ ₄ mas	lg ε ₄		
1	X ; R Acido isonicotinico » » »	303° — — —	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	270-271 266-267 266 275	3,41 3,39 3,62 3,68	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	(1)	
2	H » » » »	250-251° — — — —	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	290 289 — —	3,69 3,66 — —	300 301 — —	3,64 3,62 — —	313 314 314 329	3,50 3,51 3,87 3,82	— — — —	— — — —	s. f. s. f.	(2)
3	H » » » »	211° — — — —	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	259 258 266-267 255-256	4,55 4,55 4,30 4,29	— — — 282	— — — 3,97	324 322 341 371	3,87 3,90 4,28 4,22	— — — —	— — — —	3,02 (380)	(3)
4	H » » » »	214° — — — —	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	266 265 275 259	4,57 4,52 4,19 4,31	— — — (288)	— — — 3,96	326 328 348-350 386-388	3,95 3,99 4,33 4,30	— — — —	— — — —	— — — —	(4)

(6)	3,83	3,47	373	3,83	3,47	373	(308)	3,45	353	3,80	(7)
(7)	3,93	3,67	393-396	3,93	3,67	393-396	328-330	3,67	393-396	3,93	(7)
	—	4,06	—	—	4,06	—	359-362	4,06	—	—	
	3,95	3,79	362-363	3,95	3,79	362-363	313-317	3,79	362-363	3,95	
	3,91	—	368-371	3,91	—	368-371	—	—	368-371	3,91	
(8)	4,04	—	356-357	4,04	—	356-357	—	—	356-357	4,04	(8)
	4,17	—	393	4,17	—	393	—	—	393	4,17	
	3,61	3,65	320	3,61	3,65	320	306-307	3,65	320	3,61	
	3,72	3,73	320-321	3,72	3,73	320-321	309	3,73	320-321	3,72	
(9)	4,10	—	328-330	4,10	—	328-330	—	—	328-330	4,10	(9)
	4,16	—	348-349	4,16	—	348-349	—	—	348-349	4,16	
	3,72	3,75	320	3,72	3,75	320	307-308	3,75	320	3,72	
	3,80	3,79	320	3,80	3,79	320	311	3,79	320	3,80	
(9)	4,20	—	336-337	4,20	—	336-337	—	—	336-337	4,20	(9)
	4,20	—	359-360	4,20	—	359-360	—	—	359-360	4,20	
	3,83	3,82	321	3,83	3,82	321	(312)	3,82	321	3,83	
	3,87	3,82	322	3,87	3,82	322	(308)	3,82	322	3,87	
(9)	4,19	—	346-348	4,19	—	346-348	—	—	346-348	4,19	(9)
	4,22	—	357-358	4,22	—	357-358	—	—	357-358	4,22	

(1) Ottenuto per ossidazione della 4-etil-piridina: L. MUSAJO e M. COLONNA, «Gazz. chim. ital.», 62, 894 (1932). (2) E. THIELEPAPPE, «Ber.», 77, 387 (1938). (3) PFETZINGER, «J. prakt. Chem.», [2], 56, 298 (1897). (4) DU PUIS, LINDWALL, «J. Am. Chem. Soc.», 56, 471 (1934). (5) R. CIUSA, «Gazz. chim. ital.», 44, 1, 65 (1914). (6) D. R. P. 267,804, «Chem. Zent.», II, 1062 (1915). (7) H. JOHN, «J. prakt. Chem.», [2], 133, 259 (1932). (8) BRAUN, «Ber.», 60, 1257 (1927). (9) Sulla preparazione di questo prodotto sarà riferito in altra sede.

TABELLA III.

N.	O=C-OH 	P.F.	Solvente	PUNTI CARATTERISTICI										Bibliografia		
				Zona: 250-340 mμ					Zona: 340 450 mμ						Zona: 450-550 mμ	
				λ ₁ mas	lgε ₁	λ ₂ mas	lgε ₂	λ ₃ mas	lgε ₃	λ ₄ mas	lgε ₄	λ ₅ mas	lgε ₅			
1	R--C ₆ H ₄ -N(CH ₃) ₂ (p)	228°	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	289 286 288 290 257 (256)	4,19 4,21 4,23 4,31	307-312 — 325-329 269-270	4,19 — 4,09 4,35	370-372 359 362	4,19 4,15	— —	— —	(454) 461	3,50 — 4,25	(1)		
2	CH=CH-C ₆ H ₄ -N(CH ₃) ₂ (p)	256°	etanolo NaOH N/1000 HCl N/500 HCl N/100 HCl N/10 HCl N/1 H ₂ SO ₄ conc.	256-257 (272) 294 295-296 (258) — 287-288 287 253-254 (262)	4,21 4,14 4,38 4,41 4,03 4,44 4,43 3,87	297-300 287-294 — — 298 326-327 327 298 299	4,15 4,24 — — 4,39 4,39 4,30 4,21	381-385 361-364 364-367 374-375 380 395-396 341 341	4,45 4,31 4,48 4,52 4,52 4,52 4,30 4,31	— — — — — (356) (356)	— — — — — 4,15 4,20	498 500-502 500-530	4,27 3,83 2,97	(2)		
3	CH-CH-C ₆ H ₅	300°	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	(3)		
4	—CH ₂ -CH ₂ -C ₆ H ₅	227°	etanolo NaOH N/1000 HCl N/100 H ₂ SO ₄ conc.	290 290 — 276	3,76 3,75 — 4,31	303-304 304 (312) 334-335	3,71 3,71 3,96 4,02	317 317 319 —	3,66 3,69 4,01 —	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	(4) s.f. s.f.		

(1) BROWN e collaboratori, « J. Am. Chem. Soc. », 68, 2707 (1946).

E. SCEVOLA, « Gazz. chim. ital. », 67, 219 (1937).

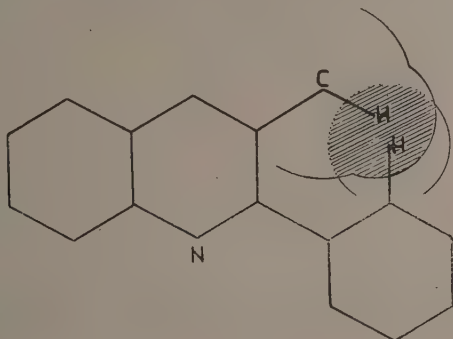
(2) H. JOHN, F. KAHN, « J. prakt. Chem. » [3], 117, 214 (1927).

(3) Ved. nota (2).

(4) G. B. CIRIPA.

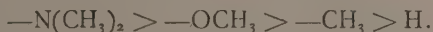
Sempre in base al confronto delle caratteristiche spettrali della 2-fenilchinolina, con quelle di altri derivati, si può giungere a stabilire anche quale delle bande registrate deve considerarsi come banda di « coniugazione » arile-chinolile.

La 2-fenilchinolina è caratterizzata da un massimo a $256\text{ m}\mu$ ($\log \epsilon = 4.61$), che non compare nella chinolina, e da un altro massimo a $322\text{ m}\mu$ ($\log \epsilon = 3.89$). Tale banda a $322\text{ m}\mu$ non mostra la struttura fine, al contrario della banda più spostata verso il rosso della chinolina; essa corrisponde presumibilmente all'interazione elettronica dei due nuclei, ed in tal senso dovrà essere considerata come la banda di « coniugazione » arile-chinolile. La prima banda a $256\text{ m}\mu$ si potrà allora attribuire alla eccitazione del sistema α -fenilico. Il massimo a $322\text{ m}\mu$, infatti, è quello che subisce le più notevoli variazioni, sia in presenza di una interazione elettronica addizionale [effetto batocromo ed ipercromo: ad esempio, nel caso della p-metossi-fenil-chinolina e della 2-bifenil-chinolina, e al cui assorbimento partecipano le strutture polari —II e —III] sia per effetto di un sostituto « ingombrante » in orto, rispetto all'arile. Ad esempio, nel caso della 3-metil-2-fenilchinolina-IV, il metile provoca la distorsione del fenile ⁽⁷⁾ che, riducendo la interazione elettronica fra i due nuclei, modifica le caratteristiche spettrali della 2-fenilchinolina (tendenza alla struttura fine) ⁽⁸⁾.



IV

Analoghi fenomeni ottici si verificano per gli acidi 2-aril-cinconinici. Dal confronto dello spettro dell'atofan con quello del p-metil-, p-metossi- e p-dimetil-amino-atofan, si notano effetti batocromi ed ipercromi nella banda che abbiamo preso a considerare come « banda di coniugazione » e che seguono l'ordine:



(7) Per una distorsione di 90° , l'interazione elettronica fra i due nuclei scompare completamente, ved. a tale proposito KLEVENS e PLATT, « J. Am. Chem. Soc. », 71, 1714 (1949).

(8) N. Jones ha osservato che gli effetti generali provocati dall'impedimento sterico sugli spettri di assorbimento dei sistemi a nuclei coniugati sono: tendenza alla struttura fine, spostamenti ipsocromi delle bande e diminuzione della intensità. In particolare il CH_3 possiede un forte « potere ingombrante », il contrario per l'OH e l' NH_2 (N. JONES, « J. Am. Chem. Soc. », 67, 2127 (1945)).

In tali composti, un CH_3 in posizione 3- del nucleo chinolinico importa una evidente tendenza alla « struttura fine » nella banda in parola (impedimento sterico di risonanza), ciò che non succede invece per il 3-ossi-⁽⁹⁾ ed il 3-amino-atofan⁽¹⁰⁾.

Spostamenti batocromi ed ipercromi si notano anche quando tra il nucleo chinolinico e l'arile si interpone un « risonatore di risonanza », come ad esempio un gruppo etilenico. Interessante è il fatto che saturando il doppio legame etilenico, si riottiene praticamente lo spettro dell'acido cinconinico, in cui compare la « struttura fine ». Rivive qui la mirabile concezione di Angeli « sulla conducibilità delle catene non-sature »⁽¹¹⁾ che tradotta in termini moderni non è altro che un'interazione fra gli elettroni π , che non appartengono ai singoli atomi, ma a tutta la molecola; una tale interazione viene interrotta saturando il doppio legame, ed il gruppo $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$ agisce da « isolatore di risonanza »⁽¹²⁾.

In riferimento agli spettri degli acidi cinconinici, in taluni casi, ho potuto constatare che quando il composto è sufficientemente « basico », tanto che l'azoto eterociclico possa accogliere con facilità un protone, all'assorbimento di luce contribuiscono strutture polari derivanti da una salificazione interna (Zwitterionen)⁽¹³⁾; invero si osserva uno spostamento batocromo ed ipercromo rispetto ai derivati chinolinici, non contenenti il carbossile, analogamente a quanto succede per le stesse chinoline in mezzo acido⁽¹⁴⁾. In mezzo di NaOH $\text{N}/1000$ si ritorna praticamente allo spettro delle chinoline.

È in studio il comportamento spettroscopico dei corrispondenti N-ossidi.

(9) Voglio ricordare il grande interesse assunto in questi ultimi tempi dal 3-ossi atofan come antidiuretico (C. G. ZUBROD e collaboratori, «Proc. Soc. exptl. Biol. and Med.», 74, 671 (1950)), ma soprattutto esso trova impiego in quelle malattie in cui si rivela utile l'A. C. T. H., K. C. BLANCHARD e collaboratori, «Bull. Johns Hopkins Hosp.», 86, 83 (1950); 87, 50 (1950).

(10) N. JONES, «J. Am. Chem. Soc.», 67, 2127 (1945).

(11) A. ANGELI, «Memoria Accad. Lincei», 5, 14, fasc. 12 (1924).

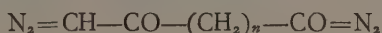
(12) In questo caso gli spettri delle due parti della molecola diventano indipendenti e additivi, cioè si ha uno spettro diverso da quello del sistema coniugato completamente planare. Ved. nota (7).

(13) La conferma di tali fatti si ritrova nelle ricerche sulle costanti dielettriche dell'acido cinconinico ecc., di DEVOTO e ARDISSONE, «Gazz. Chim. Ital.», 65, 1235 (1935).

(14) G. W. EWING, E. A. STECK, «J. Am. Chem. Soc.», 68, 2181 (1946).

Chimica organica. — *Chetoni dai diazochetoni.* — II. *Sintesi di α - ω -diacetilparaffine e di diacetilbenzoli*^(*). Nota di LUIGI CANONICA e TULLIO BACCHETTI, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

In una Nota precedente⁽¹⁾ abbiamo descritto vari bisdiazochetoni del tipo:



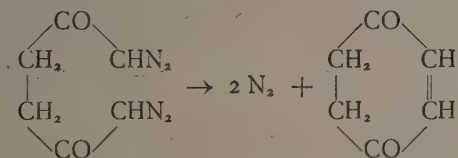
ottenuti per azione del diazometano su cloruri di acidi bicarbossilici a sei o più atomi di carbonio, ed il procedimento che ci ha permesso di trasformarli nei corrispondenti metilchetoni.

Ci interessava estendere le nostre ricerche ai termini più semplici, anche per verificare la possibilità della loro trasformazione in composti carbociclici con la reazione di Grundmann⁽²⁾ dei monodiazochetoni:



realizzata per via intramolecolare.

Tale reazione (che ci riserviamo di studiare sui bisdiazochetoni già noti) poteva tra l'altro offrire un metodo di sintesi di idrochinoni dai diazochetoni succinici:



Non erano finora noti diazochetoni alifatici recanti nella loro molecola i due aggruppamenti funzionali meno distanziati rispetto all'1-8-bisdiazoottano-2-7-dione, il termine derivante dall'acido adipico: sostanza questa relativamente stabile, e nella quale le due funzioni diazochetoniche non sembrano esercitare una sensibile, mutua influenza.

Abbiamo ora constatato che il cloruro di glutarile reagisce con il diazometano in eccesso secondo lo schema consueto; ma l'1-7-bisdiazoeptano-2-6-dione ottenuto manifesta una notevole instabilità che talvolta ne determina la tumultuosa decomposizione per cause del tutto inapparenti.

L'acido cloridrico lo trasforma con reazione immediata e con ottime rese nel diclorodichetone corrispondente, l'1-7-dicloroeptano-2-6-dione; quest'ultimo, per riduzione secondo il metodo già descritto, produce l'eptano-2-6-dione, già noto⁽³⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) Questi « Rendiconti » (8), X, 479 (1951).

(2) « Ann. », 536, 29 (1938).

(3) HARRIES, « Ber. », 47, 787 (1914).

Meno nettamente decorre sul diazochetone glutarico la trasposizione di Wollf-Arndt-Eistert con ammoniaca, fornendo solo piccole quantità di diammide pimelica.

Il cloruro dell'acido pimelico, primo omologo del glutarico nella serie degli acidi monocarbossilici a numero dispari di atomi da carbonio ci ha invece fornito un bisdiazochetone (1-9-bisdiazoottano-2-9-dione) di stabilità pari a quella dei corrispondenti derivati dell'acido adipico e degli omologhi superiori. Per azione dell'acido cloridrico e successiva riduzione dell'1-9-diclorononan-2-8-dione ottenuto, esso viene trasformato nel nonan-2-8-dione, identico al prodotto di Blaise e Koehler ⁽⁴⁾.

La reazione fra il cloruro di succinile ed il diazometano non ci ha permesso di isolare alcun prodotto definito: anche a bassa temperatura ed a forte diluizione, essa decorre vivacemente, con forte sviluppo di azoto, ma al suo termine si ottengono solo sostanze resinose, fortemente colorate. La velocità dell'autodecomposizione del diazochetone (qualora effettivamente si formi) è presumibilmente superiore a quella della sua reazione con l'acido cloridrico che contemporaneamente prende origine dalla reazione tra diazometano e cloruro dell'acido: anche operando nelle condizioni in altri casi adottate da Nierenstein e collaboratori ⁽⁵⁾ (lenta addizione della soluzione di diazometano a quella del cloruro di succinile), si ottengono solo resine dalle quali non riesce di isolare né l'atteso 1-6-dicloroesan-2-5-dione, né l'idrochinone.

Tali risultati accennavano ad una stretta correlazione tra stabilità dei diazochetoni e distanza nella loro molecola dei due gruppi funzionali; abbiamo perciò studiato il comportamento dei cloruri dei tre acidi ftalici; ciò anche al fine di esaminare l'applicabilità del nostro metodo di preparazione dei metilchetoni, che, nel caso specifico, doveva condurre ai diacetilbenzoli.

Era già noto che dal cloruro di isoftalile si ottiene un bisdiazochetone stabile ⁽⁶⁾. La riduzione del corrispondente diclorochetone ci ha fornito con buone rese l'1-3-diacetilbenzolo (isolato come 2-4-dinitrofenilidrazone).

Analogamente si comporta il cloruro dell'acido tereftalico: il bisdiazochetone ottenuto, solido cristallino, conservabile per qualche tempo senza decomposizione, viene trasformato dall'acido cloridrico nell'1-4-dicloroacetilbenzolo, p. f. 185-186°. Le caratteristiche del diclorodichetone così ottenuto differiscono da quelle del prodotto p. f. 153° preparato per clorurazione dell'1-4-diacetilbenzolo da Ruggli e Gassenmeier ⁽⁷⁾, e pure descritto come 1-4-dicloroacetilbenzolo. Coincidono invece con quelle trovate da Rosnati e Bovet ⁽⁸⁾, che contemporaneamente e indipendentemente da noi hanno preparato lo stesso prodotto per la via da noi seguita.

La riduzione dell'1-4-dicloroacetilbenzolo ci ha fornito il diacetilbenzolo corrispondente con buone rese.

(4) «Compt. Rend.», 148, 491 (1909).

(5) «Chem. Soc.», 107, 1491 (1915); «Am. chem. Soc.», 47, 1728 (1925).

(6) RUGGLI e KNECHT, «Helv. chim. Acta», 27, 1112 (1944).

(7) «Helv. chim. Acta», 22, 501 (1939).

(8) «Rend. Ist. Sup. Sanità», XIV, 473 (1951).

Infine, il cloruro di o-ftalile simmetrico reagisce con il diazometano in modo affatto analogo al cloruro di succinile: anche operando a -70° si ottengono solo resine non cristallizzabili.

PARTE SPERIMENTALE.

EpTan-2-6-dione. — L'1-7-bisdiazoeptan-2-6-dione viene ottenuto secondo il procedimento solitamente seguito nella preparazione dei diazochetoni, lasciando cadere a gocce la soluzione di una mol. di cloruro di glutarile in etere anidro nella soluzione anidra di 6 mol. di diazometano in 40 p. di etere, agitata meccanicamente e raffreddata a 0° .

Inizia ben presto la separazione del diazochetone in lamelle gialle: terminata l'aggiunta del cloruro dell'acido si lascia a riposo in ghiaccio per qualche ora e si raccoglie la massa cristallina alla pompa.

La resa è del 90 % del teorico ed il prodotto già l'assai puro. Piccole quantità se ne possono ancora ottenere concentrando nel vuoto le acque madri.

Cautamente ricristallizzato da benzolo-etere di petrolio (2 : 3), il bisdiazochetone si presenta in lamelle di colore giallo zolfo p. f. 62° .

Per trasformarlo in 1-7-dicloroeptan-2-6-dione, lo si sospende in etere e nella sospensione si fa gorgogliare una corrente di acido cloridrico anidro fino a decolorazione e termine dello sviluppo di azoto.

Dopo evaporazione del solvente e cristallizzazione da benzolo-etere di petrolio o da metanolo, il diclorochetone viene ottenuto in lunghi aghi bianchi p. f. 76° . Le rese sono quasi quantitative. All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : Cl } 36,40 \\ \text{per } C_6H_{10}O_2Cl_2 \text{ calc. : } 35,98. \end{array}$$

Per la riduzione a optan-2-6-dione, g 2,9 del diclorochetone vengono disciolti, in un palloncino munito di refrigerante a ricadere, in 25 cm³ di acido acetico glaciale; si aggiungono g 5 di zinco in polvere e si riscalda fino a dissoluzione quasi completa del metallo.

Si diluisce allora con ugual volume di acqua e si neutralizza esattamente l'acido acetico ancora libero con idrato sodico al 10 %. La soluzione viene estratta con etere in estrattore continuo; dopo essicamento su solfato sodico ed evaporazione del solvente, si ottiene il dichetone come olio che dopo qualche tempo di riposo in frigorifero rapprende in una massa cristallina, p. f. $33-34^{\circ}$ dopo cristallizzazione da etere di petrolio. Le rese sono scarse: l'elevata volatilità del prodotto espone a notevoli perdite.

Viceversa, per azione di un eccesso di 2-4-dinitrofenilidrazina in soluzione acetico-cloridrica direttamente sulla soluzione proveniente dalla riduzione, si ottiene con una resa intorno al 65 % del teorico il bis-2-4-dinitrofenilidrazone dell'epTan-2-6-dione. Ricristallizzato dall'acido acetico, tale dinitrofenilidrazone si presenta come polvere cristallina di intenso colore giallo aranciato p. f. 177° . All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : N } 22,51 \\ \text{per } C_{19}H_{20}O_8N_8 \text{ calc. : } 22,94. \end{array}$$

Nonan-2-8-dione. - Il bisdiazononan-2-8-dione viene preparato dal cloruro dell'acido pimelico con le modalità precedentemente descritte; anche in questo caso il prodotto comincia a separarsi dopo pochi minuti dall'inizio dell'aggiunta della soluzione del cloruro dell'acido a quella del diazometano. La resa è anche in questo caso del 90 % circa. Dopo cristallizzazione da benzolo-etere di petrolio, il bisdiazochetone si presenta in scaglie lucenti di colore giallo vivo, p. f. 71°. All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : N } 27,03 \\ \text{per } C_9H_{12}O_2N_4 \text{ calc.: } 26,91. \end{array}$$

Per la trasformazione in 1-9-diclorononan-2-8-dione, si fa gorgogliare acido cloridrico gassoso nella soluzione eterea del bisdiazochetone. Dopo evaporazione del solvente e cristallizzazione da metanolo, il diclorochetone si presenta in cristalli bianchi p. f. 73°; la resa è quasi quantitativa. All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : Cl } 31,64 \\ \text{per } C_9H_{14}O_2Cl_2 \text{ calc.: } 31,52. \end{array}$$

La riduzione del diclorochetone, condotta al solito modo, fornisce, dopo neutralizzazione dell'acido acetico ed estrazione con etere (meglio in estrattore continuo), il 2-8-nonandione, in foglioline bianche (dopo cristallizzazione da etere di petrolio) p. f. 46°; le caratteristiche del prodotto concordano con quelle note dalla letteratura. La resa ottenuta è del 60 % circa. L'azione della 2-4-dinitrofenilidrazina in eccesso lo trasforma nel corrispondente bis-2-4-dinitrofenilidrazone, polvere cristallina giallo arancio p. f. 151° dopo cristallizzazione da acido acetico glaciale. All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : N } 21,30 \\ \text{per } C_{21}H_{24}O_8N_8 \text{ calc.: } 21,69. \end{array}$$

Diammide dell'acido pimelico. - G 2 di 1-7-bisdiazoeptan-2-6-dione vengono lentamente riscaldati a b. m. in 20 cm³ di diossano con 9 cm³ di ammoniaca acquosa concentrata e 1,5 cm³ di nitrato di argento al 10 %. Terminato lo sviluppo di azoto si filtra a caldo e si evapora completamente il solvente nel vuoto: residua una massa semisolido, che viene ripresa con poco acetone; la diammide pimelica, quasi insolubile in tale solvente, si separa come solido cristallino (g 0,21). Per cristallizzazione da alcool amilico essa viene ottenuta in aghetti bianchi p. f. 167°, in accordo con i dati della letteratura⁽⁹⁾. All'analisi:

$$\begin{array}{l} \text{trov. \% : C } 53,16 \quad H \ 8,86 \\ \text{per } C_7H_{14}O_2N_2 \text{ calc.: } 53,14 \quad 8,92. \end{array}$$

1-3-diacetilbenzolo. - Attraverso il diazochetone, solido cristallino giallo abbastanza stabile, il cloruro di isofalile viene trasformato con ottime rese nell'1-3-dicloroacetilbenzolo, come è già stato descritto⁽⁶⁾.

(9) LEHR, GUEX e ERLLENMEYER, « Helv. chim. Acta », 31, 1350 (1948).

La riduzione del diclorochetone con zinco in acido acetico viene condotta con le modalità sopra indicate; l'estrazione del diacetilbenzolo dal liquido di reazione riesce però assai laboriosa; esso è stato perciò direttamente trasformato nel corrispondente bis-2-4-dinitrofenilidrazone, che viene ottenuto con una resa oscillante intorno al 60 % del teorico (dopo cristallizzazione da molto acido acetico glaciale). Polvere cristallina di colore rosso vivo, p. f. 252°. All'analisi ⁽¹⁰⁾:

trov. %: N 20,63
per $C_{22}H_{18}O_8N_8$ calc.: 21,46.

1-4-diacetilbenzolo. — Per azione del cloruro dell'acido tereftalico sul diazometano in eccesso, l'1-4-bisdiazoacetilbenzolo viene ottenuto con resa pari al 90 % del teorico in foglioline gialle, p. f. 180° dopo cristallizzazione da diossano. L'azione dell'acido cloridrico anidro sul diazochetone sospeso in cloroformio lo trasforma con resa praticamente quantitativa nel diclorochetone corrispondente, l'1-4-dicloroacetilbenzolo, p. f. 185–186° dopo cristallizzazione da diossano-metanolo (1 : 2). All'analisi:

trov. %: Cl 30,80
per $C_{10}H_8O_2Cl_2$ calc.: 30,70.

La riduzione del diclorochetone con zinco in acido acetico viene condotta con le solite modalità; per azione di un eccesso di 2-4-dinitrofenilidrazina sul liquido della reazione, il bis-2-4-dinitrofenilidrazone dell'1-4-diacetilbenzolo viene ottenuto con una resa pari al 71 % del teorico. Dopo cristallizzazione da acido acetico glaciale, esso si presenta come polvere microcristallina di colore giallo arancio, p. f. 189°. All'analisi:

trov. %: N 21,89
per $C_{22}H_{18}O_8N_8$ calc.: 21,46.

Fisiologia. — *Segnali condizionati sonori quali fattori scatenanti di crisi epilettiformi sperimentali*^(*). Nota di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata^(**) dal Socio C. CIACCIO.

Nel 1937 G. Martino ed A. Alibrandi riuscirono a scatenare eccessi epilettiformi a tipo jacksoniano mediante un segnale luminoso, rappresentante per l'animale in esperimento (cane) uno stimolo condizionato, capace, in ordinarie condizioni, di provocare il riflesso dell'ammiccamento. Questo segnale si dimostrò capace di acquistare una parziale attività epilettogena allorchè l'animale fu preparato verso l'epilessia riflessa col metodo di Amantea e cioè allorchè venne stricninizzato il centro corticale sensitivo-motore corrispondente al muscolo orbitolare palpebrale, rappresentante l'effettore del riflesso condizionato⁽¹⁾.

(10) La completa combustione della sostanza ha luogo solo con grande difficoltà.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) G. MARTINO ed A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 37, 533 (1937).

Questo risultato faceva pensare che, in talune circostanze, segnali condizionati possano assumere il ruolo di agente scatenante di crisi epilettiformi in apparenza spontanee e meritava pertanto ulteriore conferma sperimentale.

Tale conferma si cominciò ad intraprendere addestrando cani, durante un periodo di alcuni mesi, al riflesso condizionato dell'ammiccamento. Furono scelti stimoli condizionati ed assoluti della più grande efficacia possibile rappresentati rispettivamente da fischi ⁽²⁾ e da intense faradizzazioni della zona riflessogena; e ciò non tanto allo scopo di rendere più agevole l'instaurazione della reazione condizionata ma soprattutto al fine di renderla assai energica e resistente ai fenomeni di inibizione sia interna che esterna.

Come riflesso condizionato si scelse il riflesso dell'ammiccamento, riflesso che presenta tra l'altro il vantaggio di instaurarsi abbastanza rapidamente.

Animali sufficientemente addestrati a tale riflesso condizionato venivano poi preparati verso l'epilessia sperimentale riflessa col metodo di Amantea. Il centro sensitivo-motore corrispondente al muscolo orbicolare palpebrale che costituiva l'effettore della reazione condizionata veniva trattato con stricnina e prostigmina ⁽³⁾ secondo le modalità descritte da A. Alibrandi ⁽⁴⁾.

In tali condizioni il segnale condizionato si dimostrò capace di provocare dapprima energiche contrazioni del muscolo orbicolare e successivamente l'insorgenza di scosse cloniche e tonico cloniche che sfociarono (tranne in un caso su cinque) in accessi epilettiformi generalizzati e completi.

Questi risultati oltre che confermare ed estendere il significato delle su citate osservazioni di G. Martino ed A. Alibrandi mi pare che avvalorino notevolmente l'ipotesi della fondamentale identità tra epilessia riflessa ed epilessia idiopatica ⁽⁵⁾.

Entrambi questi risultati fanno infatti pensare che stimoli in natura non sempre facilmente individuabili possano agire da fattori scatenanti nello scoppio di accessi di epilessia idiopatica.

Resta anche avvalorata l'ipotesi emessa dal Critchley per spiegare la genesi della così detta « musicogenic epilepsy » ⁽⁶⁾.

(2) È noto come i segnali sonori siano assai più efficaci, come stimoli condizionati, dei segnali luminosi.

(3) L'aggiunta di prostigmina aveva lo scopo di accrescere l'intensità dell'effetto postumo degli eccitamenti pervenenti al centro trattato. (A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 49, 105 (1949)).

(4) A. ALIBRANDI, Questi « Rendiconti », 4, 240 (1948).

(5) A. ALIBRANDI, Questi « Rendiconti », 5, 88 (1948).

(6) CRITCHLEY, « Brain », 60, 13 (1937).

Biologia. — *Studi comparativi sulla «massa di Giardina».*
Sua presenza nella oogenesi di «Hygrobia tarda» Herbst^().* Nota II ^(**)
di ENRICO URBANI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

L'esame morfologico e citochimico della massa di Giardina dell'oocite di *Dytiscus marginalis* L. e le conclusioni alle quali ero giunto (Urbani 1950 a, 1950 b, 1950 c) ⁽¹⁾ mi avevano condotto a prospettare l'utilità di uno studio comparativo di diverse specie di *Dytiscidae*. Tale studio comparativo, già da me iniziato e del quale ho resi noti alcuni risultati (Urbani 1950 d) ⁽²⁾, ha un doppio scopo. Primo: chiarire con l'indagine metodica la natura della massa di Giardina e cercare di illustrare il suo destino nel meccanismo della oogenesi. Secondo: vedere i rapporti tra questa formazione citologica e la posizione sistematica delle diverse specie della famiglia dei Ditiscidi.

L'osservazione di quindici specie ed una aberrazione della famiglia ha mostrato che la massa di Giardina, intesa nelle sue note caratteristiche morfologiche, pur riscontrandosi in tribù diverse non è presente in tutte le specie. Così alcune forme che i criteri sistematici hanno posto molto vicine (*Eretes*, *Dytiscus*, *Cybister*) rivelano alla indagine citologica precisi caratteri differenziali e da ciò risulta l'utilità di uno studio citologico da usare in appoggio ai comuni metodi sistematici.

Che la massa di Giardina non sia una formazione esclusiva dei *Dytiscidae* è dimostrato dalle osservazioni di Hegner e Russel (1916) ⁽³⁾ i quali studiando l'oogenesi del coleottero acquatico *Dineutes nigrrior* (*Gyrinidae*) hanno visto che da un oogonio, a seguito di tre divisioni differenziali, si formano un oocite (che riceve la maggior parte di cromatina) e sette cellule nutritive.

Risulta perciò che la massa di Giardina è stata vista in due famiglie di Coleotteri, ambedue acquatiche, i *Dytiscidae* e i *Gyrinidae*.

È logico chiedersi a questo punto se tutte le famiglie dei Coleotteri acquatici siano caratterizzate, se non in tutte almeno in alcune delle loro specie, dalla massa di Giardina nella formazione dell'oocite: non voglio però trarre da questa ipotesi alcuna illazione che vada al di là della osservazione obbiettiva dei fatti.

È questo un esame che mi riprometto di fare ed in questa Nota espongo i risultati di alcune osservazioni sulla oogenesi del Coleottero acquatico *Hygrobia tarda*.

La famiglia degli *Hygrobiidae* (*Hygrobidae* sec. Luigioni = *Paelobidae* Schönh) è veramente caratteristica perchè rappresentata da un unico genere: *Hygrobia* Latreille *Hydrachna* Fabr., *Hygriobia* Latr., *Paelobius* Schönh) con quattro specie

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1951.

(1) E. URBANI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 153 (1950 a); «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 504 (1950 b); «Rivista di Biologia», XLII, 413 (1950 c).

(2) E. URBANI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», IX, 384 (1950 d).

(3) R. W. HEGNER e C. P. RUSSEL, «Proc. National Acad. Sci. U. S. A.», 2, 356 (1916).

note delle quali due viventi in Australia, una in Cina ed una nell'Europa centrale. Quest'ultima è la *Hygrobia tarda* Herbst (*Hermanni* Fabr. sec. Luigioni, *Hermanni* Oliv. sec. Ganglbauer).

Hörn ha elevato a Famiglia il genere *Hygrobia*, prima connesso ai *Dytiscidae*. La principale differenza tra *Hygrobidae* e *Dytiscidae* è nella morfologia del metasterno, nei primi vi è una sutura trasversale che manca nei secondi. Inoltre l'*Hygrobia* presenta per la testa prominente libera, non retrattile nello scudo, per i fianchi posteriori non allargati anteriormente e per il movimento alterno delle zampe posteriori, più affinità con i *Carabidae* che con i *Dytiscidae*. Secondo Ganglbauer (1892)⁽⁴⁾ se l'*Hygrobia* fosse rimasta nella famiglia dei *Dytiscidae*,



A) *Dytiscus marginalis* L.
B) *Hygrobia tarda* Herbst.

come un genere di questa, si sarebbe avuta una differenza sostanziale, secondo i criteri sistematici, tra *Dytiscidae* e *Carabidae* solo nella morfologia dei segmenti addominali delle larve ma non nella morfologia delle immagini. Inoltre la larva di *Hygrobia* differisce da quella dei Dytiscidi per le mandibole chiuse (come nei Carabidi) ossia non attraversate da un canale succhiatore. A questo però va aggiunto che per la sua ecologia l'*Hygrobia* è più vicina ai *Dytiscidae* che non ai *Carabidae* Coleotteri che conducono, almeno come regola generale, vita terrestre.

La diffusione in Italia di *H. tarda* è secondo Luigioni (1929)⁽⁵⁾: Piemonte, Veneto, Venezia Giulia, Isola di Veglia (Quarnaro), Italia centrale e meridionale, Isola Capraia, Sardegna e Sicilia. Secondo Porta (1923)⁽⁶⁾: Friuli, Veneto, Piemonte, Emilia, Toscana, Lazio, Calabria, Sardegna, Isola Arbe (Quarnaro).

(4) GANGLBAUER, *Die Käfer von Mitteleuropa*, I B. Carl. Gerold's Sohn, Wien 1892.

(5) P. LUIGIONI, *I Coleotteri d'Italia*. « Mem. Pont. Acc. Scienze », 1929.

(6) A. PORTA, *Fauna Coleopterorum Italica*, Piacenza 1923.

Per personale esperienza ho visto che nei dintorni di Roma tale specie è molto rara, ne ho trovati alcuni esemplari solamente in un fontanile della macchia di Campodiarne (Anzio) a 60 Km. circa da Roma nel mese di ottobre 1950.

Le presenti osservazioni sono state compiute su ovaï isolati al binoculare e fissati in Bouin o Sanfelice, inclusi in paraffina e sezionati a sette *micron*. Colorazione con ematossilina ferrica e verde luce o Feulgen e verde luce. Nella tavola è riportata una parte della documentazione relativa alla oogenesi di questa specie. Tutte le fotografie si riferiscono a preparati colorati con Feulgen-verde luce e, ad eccezione della 10, sono state fatte allo stesso ingrandimento indicato dalla scala micrometrica riportata sotto l'ultimo fotogramma che ha il valore di 10 *micron* per ogni unità della scala. La fotografia 10 possiede la propria scala micrometrica: ogni unità della quale è uguale a 10 *micron*.

Gli ovarioi di *Hygrobia tarda* sono del tipo meroistico politrofico (Berlese) e perciò uguali a quelli dei Ditiscidi. Anche l'aggruppamento dei vari ovarioi che dà la morfologia dell'ovaio nel suo complesso è uguale a quello dei Ditiscidi. Una sezione longitudinale di ovaio mostra un insieme di ovarioi ciascuno dei quali presenta una successione di gruppi cellule nutrici-oocite (follicolo ovarico) (fig. 10). Ciascun ovario ha una camera terminale nella quale vi sono oogoni caratterizzati da grande nucleo e scarso citoplasma (fig. 1): alcune zone della cromatina prendono il verde luce, altre sono Feulgen positive. In mezzo agli oogoni, che qualche volta si sorprendono in cariocinesi, si trovano cellule follicolari (cfr. fig. 1).

In una zona immediatamente successiva della camera terminale si vede che la morfologia nucleare dei preoociti è cambiata: nel centro del nucleo è visibile una grossa zolla di cromatina che si colora con il verde luce, circondata da granuli e da brevi filamenti Feulgen-positivi (cromosoni?) (fig. 2). In altri preoociti immediatamente vicini a questi la zolla di cromatina verde è risolta in un insieme di granuli e filamenti anche questi verdi frammisti agli elementi Feulgen-positivi (fig. 2 a).

Vi è poi una zona (secondo la terminologia del Giardina per il Ditisco) di differenziazione, nella quale si scorgono mitosi differenziali caratterizzate dal fatto che la massa di Giardina prende il verde luce mentre i cromosomi danno la reazione di Feulgen. È così possibile vedere preoociti in divisione differenziale con accanto le prime cellule nutrici che stanno dividendosi anche loro per normale cariocinesi secondo lo schema classico illustrato da Giardina nel Ditisco, da Guenther nel *Colymbetes*, ecc. Nella fig. 3 sono fotografate due sezioni successive: nella sezione A sono visibili i cromosomi in un piano equatoriale del fuso, Feulgen positivi, nella sezione successiva (B) è visibile la massa di Giardina che si trova al polo inferiore del fuso e che si colora con il verde luce (MG). Accanto sono visibili due cellule nutrici (cn) con i cromosomi in metafase. Nella fig. 4 sono fotografate due sezioni successive: in A il preoocite in mitosi differenziale con i cromosomi Feulgen-positivi in anafase, in B a un polo del fuso la sezione della massa di Giardina colorata con il verde luce (MG). Procedendo dalla parte prossimale dell'ovaio (camera terminale) alla parte distale (ovidutto) si nota come la massa di Giardina divenga Feulgen-positiva: così le figure di mitosi differenziale sono identiche alle precedenti meno che in queste la massa

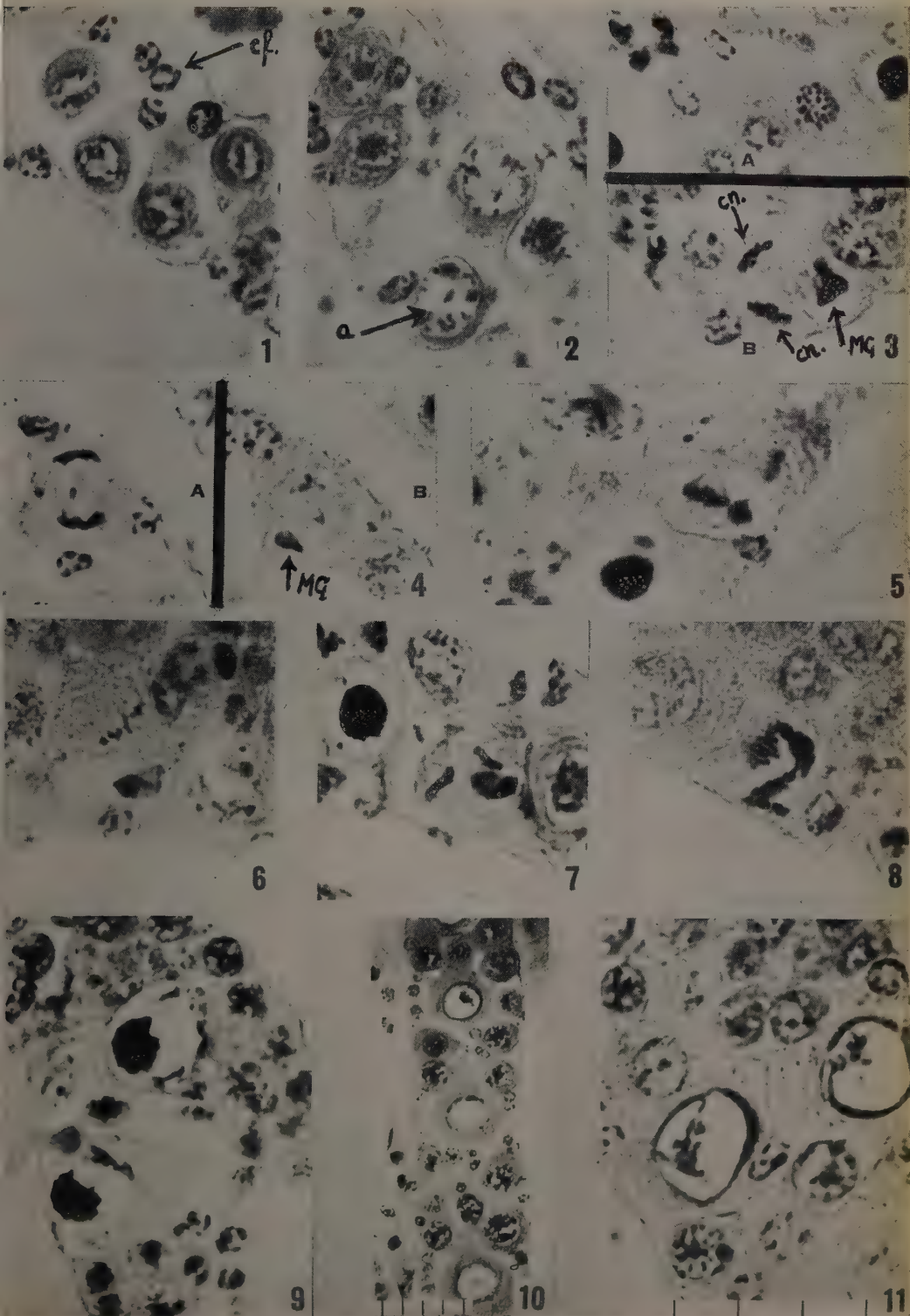
di Giardina anzichè essere colorata in verde lo è in violetto (fig. 5). Particolarmente dimostrative in proposito sono le figure 6 e 7 dove si vedono preoociti in mitosi differenziale. Nella 6 i cromosomi sono in metafase e la massa di Giardina a forma di semianello a un polo del fuso è colorata con il verde luce. Nella 7 vi è il preoocite in mitosi differenziale con i cromosomi in piastra equatoriale e la massa di Giardina Feulgen positiva. Accanto al preoocite si vede una cellula nutrice in normale cariocinesi con i cromosomi in piastra equatoriale. La figura 8 illustra una mitosi differenziale con la massa di Giardina Feulgen-positiva e i cromosomi pure Feulgen-positivi.

Terminata nell'ovariolo la zona di differenziazione sono visibili gli oociti contornati da numerose cellule nutrici (non posso per ora precisarne il numero data la scarsezza del materiale di studio che ho avuto a disposizione) nei quali la massa di Giardina ha forma di sfera a volte regolare a volte, invece, irregolare, dall'aspetto compatto oppure granuloso, sempre a questo stadio fortemente Feulgen-positiva. Nella fig. 9 sono visibili due oociti a questo stadio con numerose cellule nutrici (freccie). Si è iniziato a questo livello dell'ovariolo il periodo di grande accrescimento dell'oocite e la massa di Giardina si vacuolizza, si frammenta e una parte si porta alla periferia della vescicola germinativa costituendo un anello Feulgen-positivo, mentre i frammenti che rimangono al centro della vescicola germinativa perdono gradatamente la Feulgen-positività e si colorano con il verde luce (fig. 11). Presto tutta la cromatina nucleare perde completamente la Feulgen-positività e si risolve in un reticolo che si colora esclusivamente con il verde luce. Si vedono a volte, frammiste al reticolo delle zolle di cromatina tinte in verde che potrebbero rappresentare dei nucleoli; ma a questo proposito si veda quanto ho scritto nella Memoria sulla massa di Giardina dell'oocite di *Dytiscus marginalis*.

I fatti principali messi in evidenza dalle mie osservazioni sono perciò i seguenti: l'esistenza in *Hygrobia tarda* di mitosi differenziali a carico dei preoociti che conducono alla formazione di un oocite, che riceve la maggior parte di cromatina, e di un certo numero di cellule nutrici, per ora non precisato. Le mitosi differenziali sono caratterizzate dal fatto che un ammasso di cromatina nucleare, identificabile come la massa di Giardina dei *Dytiscidae*, passa, ad ogni divisione, nella cellula che diventa oocite, mentre le cellule nutrici ne rimangono prive. La massa di Giardina compare nei preoociti mostrando affinità per il verde luce e solo in un secondo tempo diviene Feulgen-positiva. I cromosomi sono sempre Feulgen-positivi. Questo cambiamento delle proprietà tintoriali della massa di Giardina trova un qualche riscontro nelle osservazioni di Guentherth nel *Colymbetes* (1910)⁽⁷⁾ dove questa formazione prende in un primo tempo il verde luce e in un secondo tempo l'ematosilina ferrica mentre non trova riscontro nel *Dytiscus* dove la massa cromatica si organizza da granuli di cromatina Feulgen-positivi ed è subito Feulgen-positiva.

Una volta terminate le divisioni differenziali la massa cromatica si disgrega e perde la sua fisionomia morfologica e la Feulgen-positività scompare da tutta

(7) T. GUENTHERT, « Zool. Jahrb. Anatomie », 30, 301 (1910).



Noi indichiamo come eliminazione di acqua quel fenomeno per cui i ratti esposti in termostato, alla temperatura di 38° - 39° circa, in adatte gabbie di rete metallica, possono risultare, al termine della 1^a e ancor più della 2^a ora, più o meno madidi in corrispondenza delle regioni anteriori della testa, della regione inferiore del collo, dell'addome, in corrispondenza degli arti anteriori e posteriori e della coda.

Di fronte a questo reperto, il primo quesito che si poneva era di stabilire se gli animali erano madidi nelle anzidette regioni a causa dell'eliminazione di sudore e, poichè è noto che nel ratto le ghiandole sudoripare sono presenti in notevole quantità soltanto nelle cute glabra delle zampe, soprattutto nella « palma delle mani » e nella « pianta dei piedi », il quesito era di stabilire se gli animali non risultassero bagnati in corrispondenza delle regioni prima ricordate per diffusione del sudore secreto dalle zone non coperte di peli; tale diffusione essendo favorita dallo strofinarsi frequente e da una particolare posizione semiacquattata, che gli animali sogliono a momenti assumere e mantenere in termostato.

Con un semplice esperimento, più volte ripetuto, abbiamo potuto dimostrare che gli ultimi segmenti degli arti, sprovvisti di peli, ma forniti di ghiandole sudoripare, non contribuiscono a bagnare l'animale. Difatti, ricoprendo i suoi arti con sottilissimi guanti di gomma, chiusi all'estremità superiore in modo da non ostacolare il circolo sanguigno, e ponendolo in termostato per 2 ore a 38° - 39° circa, esso si bagna ugualmente e nei guanti non si raccoglie sudore; al più i guanti si umettano sulla superficie interna.

Una continua, avveduta osservazione dei ratti, attraverso il portello di vetro del termostato illuminato nell'interno con un tubo Sylvania White da 8 W opportunamente sistemato, ci ha permesso di stabilire in ripetuti esperimenti che nel bagnarsi dell'animale ha gran parte il fluire dagli angoli della bocca di liquido, talvolta sotto forma di grosse gocce incolori, limpide e scorrevoli. Tale flusso, se la temperatura del termostato supera i 40° , si stabilisce poco dopo l'immissione dell'animale nello stesso e continua poi ininterrotto più o meno abbondante a seconda della temperatura. Talvolta, specie in un primo tempo, è possibile scorgere l'animale nell'atto di raccogliere qualche goccia sulle palme e soffregarsela sulle regioni della testa. Le altre gocce, a seconda della posizione assunta dall'animale nella gabbia o dei movimenti che esso compie, possono cadere sulla rete, sulla coda, scivolare lungo il collo e diffondersi per contiguità all'addome e agli arti.

Abbiamo cercato di valutare indirettamente la quantità di liquido eliminata dagli animali in conseguenza del sovrariscaldamento, calcolando, al riparo di ogni causa di errore, la media della perdita di peso presentata da 10 ratti maschi, giovani, del peso medio di gr. 190, in quattro diverse immissioni in termostato, a diversi giorni di distanza l'una dall'altra, allo scopo di evitare un eventuale adattamento al sovrariscaldamento. Tale media è stata di gr. 12.06, ed essa con molta approssimazione esprime, in peso, la quantità media di liquido emessa dall'animale, per effetto del sovrariscaldamento, ai fini, come dicevamo prima, della termoregolazione.

Nel corso di queste osservazioni abbiamo anche preso nota delle modalità con cui gli animali si bagnavano ed abbiamo stabilito con esattezza la curva

termica media da sovrariscaldamento di ognuno col metodo del termometro a mercurio applicato ben profondamente nel retto.

S'imponeva il quesito della provenienza del liquido. Per il suo stato fisico e la sua notevole quantità, la prima ipotesi che si poteva emettere era che si trattasse di saliva e forse, per i caratteri organolettici prima ricordati, di saliva sierosa.

Abbiamo pensato che la giustezza o meno di questa ipotesi poteva essere dimostrata con l'asportazione più o meno completa dell'apparato salivare e con il blocco atropinico della secrezione salivare.

Con queste tre diverse condizioni sperimentali noi intendevamo provocare una riduzione progressivamente crescente, sino all'arresto completo, della secrezione salivare. Conseguentemente gli animali così preparati ed esposti poi al sovrariscaldamento, dovevano presentare una minore eliminazione di saliva e quindi, se questo era il liquido che li bagnava durante il sovrariscaldamento, dovevano presentarsi meno bagnati o, nel caso del blocco atropinico, del tutto asciutti nelle anzidette regioni ed, inoltre, dovevano presentare una più bassa perdita di peso ed infine, per effetto della diminuita evaporazione, un diminuito assorbimento di calore dal loro corpo svelabile con una modificazione in aumento della curva termica da loro presentata nel sovrariscaldamento in condizioni normali.

Abbiamo sottoposto allora una parte dei ratti da noi precedentemente studiati all'asportazione parziale dell'apparato salivare ed un'altra parte all'asportazione quasi completa.

Come è noto, il ratto possiede un notevole apparato salivare, il quale è composto da due parotidi piuttosto estese, da due ghiandole sottomascellari notevolmente grandi, da quattro ghiandole sottolinguali, due maggiori, superficiali e in stretto rapporto con la superficie antero-laterale delle sottomascellari, e due minori, al disotto della mucosa del pavimento buccale, e, infine, da numerose ghiandole ramificate sparse nello spessore della tonaca sottomucosa della mucosa orale.

Nel caso dell'asportazione parziale, abbiamo lasciato in sito le due parotidi e le due sottolinguali minori. Nel caso dell'asportazione quasi totale, abbiamo lasciato in sito soltanto le due sottolinguali minori. In ogni caso restavano così intatte e funzionanti le numerose ghiandole acinose della sottomucosa buccale.

Le asportazioni sono state eseguite in narcosi eterea. Esse sono state ben sopportate, senza alcuna ripercussione sullo stato generale degli animali, anche a distanza di tempo.

Ottenuta la guarigione, abbiamo ripetuto passo per passo le osservazioni già condotte sugli animali normali. Abbiamo cioè ristabilito per ogni ratto la media della T° corporea a T° ambiente, il comportamento del peso corporeo prima dell'immissione in termostato, le modalità con cui si bagnava per effetto del sovrariscaldamento, il comportamento della T° corporea alla fine della 1^a e della 2^a ora di esposizione e, per ultimo, il controllo della perdita di peso sull'animale asciutto. Abbiamo così potuto stabilire che gli animali, che avevano subito l'asportazione pressochè completa dell'apparato salivare, si presentavano in realtà meno bagnati in corrispondenza delle regioni anteriori della testa, della regione inferiore del collo, degli arti anteriori e della regione anteriore dell'addome (umettamento che poteva imputarsi al persistere della funzione delle sottolinguali minori e delle

numerose ghiandole sottomucose), e presentavano una più bassa perdita di peso ed una diminuita dispersione di calore tradita da un più netto aumento della temperatura corporea nella 1^a e nella 2^a ora di esposizione in termostato.

In altre parole abbiamo potuto effettivamente constatare che l'asportazione pressochè totale dell'apparato salivare influenza la termoregolazione del ratto sovrariscaldato. I grafici che qui riportiamo dimostrano chiaramente quanto abbiamo asserito.

Negli animali che avevano subito l'asportazione parziale, cioè delle ghiandole sottomascellari e linguali maggiori, i risultati sono stati meno dimostrativi e forse non è da escludersi un'iperfunzione compensatoria delle ghiandole lasciate in sito.

Restava da spiegare perchè gli animali sovrariscaldati continuavano ad essere bagnati in corrispondenza della faccia interna degli arti posteriori e della parte posteriore dell'addome.

Si poteva avanzare l'ipotesi, molto probabile, che si trattasse di urina. Dimostrandola si apriva una questione nuova e complessa: quella dei rapporti tra emissione di urina e termoregolazione; questione che a nostro modo di vedere è da tenere presente anche nella termoregolazione umana nei primi periodi della vita, allorchando l'organismo del neonato deve aumentare l'emissione del calore, per opporsi ad un aumento della temperatura, e la secrezione del sudore non s'è ancora stabilita o l'evaporazione cutanea è comunque ostacolata.

Abbiamo cercato di analizzare allora quale ripercussione avesse sulla termoregolazione dei ratti privati quasi totalmente dell'apparato salivare l'ostacolo alla emissione di urina per tutta la durata del sovrariscaldamento. Se l'ipotesi era giusta, gli animali avrebbero dovuto presentarsi asciutti in corrispondenza della faccia interna degli arti posteriori e della parte posteriore dell'addome, avrebbero dovuto presentare una ancora più bassa perdita di peso, un'ulteriore diminuzione dell'assorbimento di calore corporeo e quindi un aumento della temperatura rettale.

Abbiamo ostacolato l'emissione di urina mediante l'obliterazione temporanea del lume uretrale ad opera di un'adatta allacciatura alla base del pene, allacciatura che veniva mantenuta in sito per tutta la durata del sovrariscaldamento. Eseguendo l'allacciatura correttamente, cioè in modo da ostacolare non solo il reflusso venoso, ma anche la corrente sanguigna arteriosa, si può impedire l'instaurarsi della parafimosi, in genere in forma edematosa, la quale però, al termine dell'esperimento, è quasi sempre riducibile e comunque, almeno a noi, non ha mai dato luogo ad accidenti consecutivi. Prima dell'applicazione del laccio s'aspettava che l'animale urinasse e il controllo del peso veniva eseguito sull'animale asciutto con il laccio in sito, sia prima dell'immissione che dopo l'estrazione dal termostato.

I risultati dell'indagine così condotta hanno corrisposto in pieno alle aspettative. Tutti gli animali, preparati come sopra è detto ed immessi poi per 2 ore in termostato a 38°-39° circa, non si presentavano bagnati in corrispondenza delle regioni prima precisate e, come appare chiaro dai grafici, mostravano un'ancora più piccola perdita di peso ed un più netto aumento della temperatura corporea.

In altri termini anche l'emissione dell'urina, al pari dell'emissione di saliva, influenza la termoregolazione del ratto sovrariscaldato.

Abbiamo infine pensato di condurre una nuova indagine, i cui risultati, se positivi, avrebbero fornito una riprova di quelli sin qui esposti. Abbiamo cioè studiato gli effetti sulla termoregolazione del blocco atropinico della secrezione salivare nei ratti in cui era stata arrestata l'emissione di urina con le solite modalità.

L'atropina, come è noto, sopprime la salivazione, la sudorazione e la perirpirazione insensibile nel senso di P. Aubert, paralizzando i ricettori colinergici delle cellule secetrici. Quindi l'atropinizzazione unitamente all'obliterazione del lume uretrale si sarebbe dovuta risolvere nell'ostacolo dell'eliminazione dell'urina, nel blocco dell'eliminazione cutanea dell'acqua, per quanto questa abbia nel ratto un valore più teorico che pratico, e nel blocco della secrezione salivare.

In queste condizioni la dispersione termica all'ambiente circostante del calore generatosi nell'organismo dell'animale sarebbe dovuta avvenire: 1° per evaporazione d'acqua dalla superficie respiratoria, 2° per conduzione, 3° per irradiazione e 4° per convezione.

Ma nella fattispecie tutti questi meccanismi avrebbero avuto quasi nessuna importanza: i meccanismi 2° e 3° a cagione del basso gradiente di temperatura tra cute dell'animale e ambiente del termostato; il meccanismo 4° a cagione sempre del gradiente di temperatura e dell'aria quasi stagnante del termostato e il meccanismo 1° a cagione dello scarso significato dell'acqua espirata, in quanto che nel ratto l'aumento della temperatura corporea provocato dal calore atmosferico non determina quell'efficace iperpnea termica caratteristica di certi animali sprovvisti di ghiandole sudoripare, ad esempio il cane.

Dopo Hill⁽²⁾, è noto che nei piccoli animali, rispetto all'uomo, la quantità relativa di calore corporeo dispersa per evaporazione è molto minore di quella dispersa per irradiazione, conduzione e convezione. Mentre nell'uomo di 70 Kg. si perde il 71 % del calore totale per conduzione, irradiazione e convezione ed il 22,9 % per evaporazione, nella cavia di 500 gr. si perde il 93,5 % per le prime tre vie e solo il 6,5 % per evaporazione. Nel caso del ratto la proporzione di calore perduto per evaporazione sarà ancora più bassa. Non ci consta che siano state eseguite determinazioni dirette di tale quantità. Ad ogni modo, data l'assenza di ghiandole sudoripare nella cute del ratto, si deve trattare quasi esclusivamente dell'eliminazione di vapore acqueo durante la respirazione e che si tratti di proporzioni trascurabili risulta dal lavoro di Macleod⁽³⁾, nel quale si dimostra che « la dannosa influenza di un'atmosfera caldo-umida rispetto ad una secca, alla stessa temperatura [33° circa], non è evidente nel caso del ratto. Ciò è perchè in tali animali la termodispersione non dipende in modo apprezzabile dalla evaporazione » (cutanea e respiratoria).

Per questi motivi un animale preparato come dinnanzi abbiamo detto, esposto in termostato alla temperatura di 38°-39° circa, avrebbe dovuto presentarsi del tutto asciutto, non sarebbe dovuto andare incontro a perdite rilevanti di peso e avrebbe dovuto presentare un aumento della temperatura corporea più rapido e più netto che nelle condizioni sperimentali illustrate.

(2) L. HILL, *Recent advances in physiology*, Longmans, Green & Co., New York, 267, 1906.

(3) J. J. R. MACLEOD, « *Am. J. of Phys.* », vol. 13, p. 1 (1907).

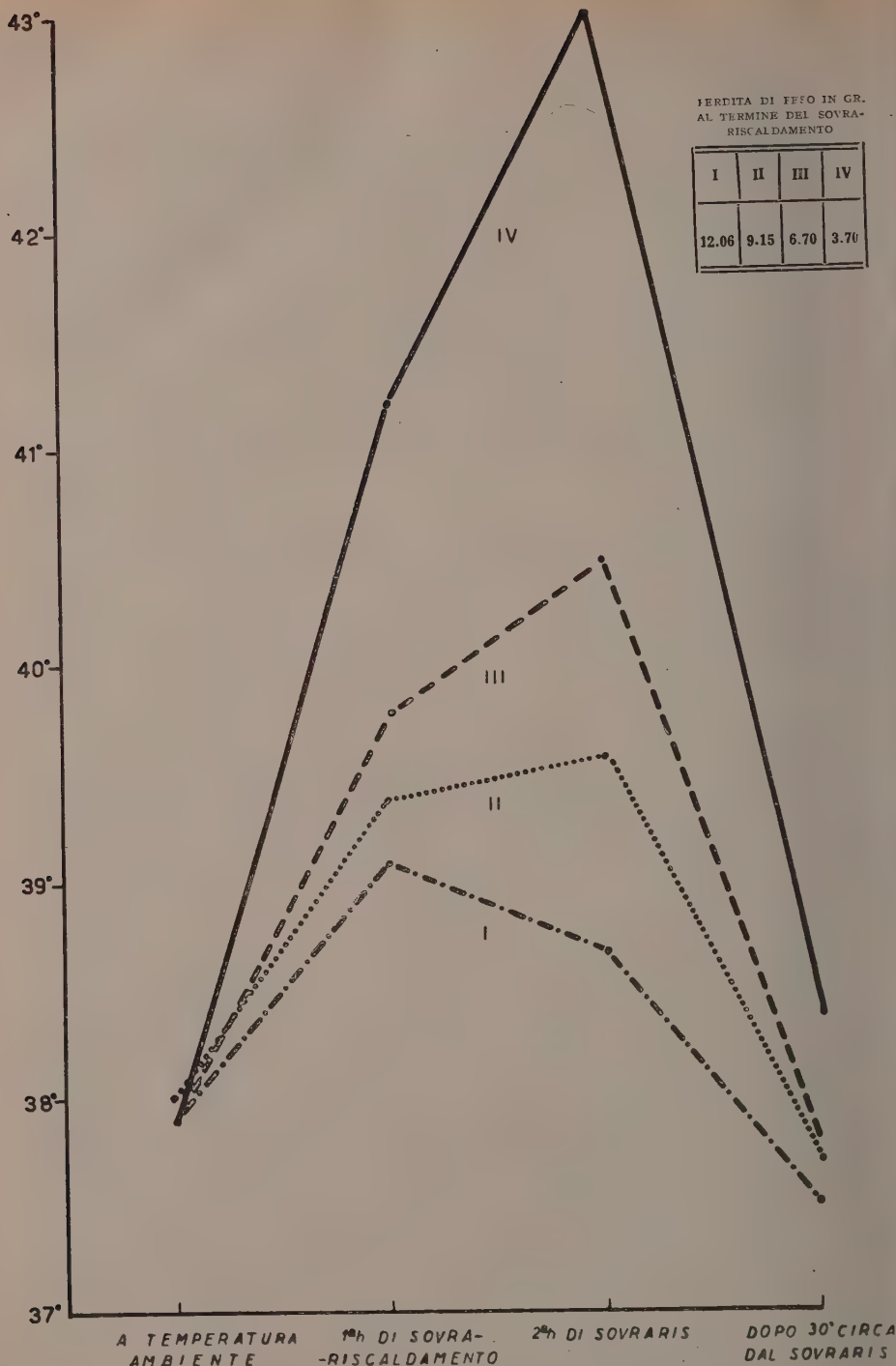


Fig. - 1. Comportamento medio della T° corporea e della perdita di peso, per effetto del sovrariscaldamento: I) dei ratti normali, II) dei ratti privati delle maggiori ghiandole salivari, III) degli stessi nei quali è stata ostacolata in più l'emissione di urina, mercè l'obliterazione del lume uretrale, e IV) dei ratti nei quali è stata ostacolata l'emissione di saliva, mercè l'atropinizzazione, e l'emissione di urina, come prima è detto.

Come è noto, il ratto, al pari di altri roditori e dei marsupiali, sopporta grandi dosi di alcaloidi della belladonna. Holch⁽⁴⁾ ha indicato in 700 mg/Kg. per via sottocutanea e in 500 mg./Kg. per via intraperitoneale la dose di solfato di atropina capace di dare le tipiche reazioni dell'alcaloide. Tale elevata tolleranza da parte di questi animali pare che sia legata alla capacità del siero e del fegato di idrolizzare rapidamente gli alcaloidi della belladonna in tropina ed acido tropico. Noi abbiamo adoperato da 8 a 10 mg. per ratto maschio dal peso variante tra 160 e 180 gr. Tale dose ci si è mostrata sempre capace di inibire le ghiandole salivari e incapace di determinare ipertermia, come abbiamo accertato in ricerche di controllo da noi condotte ugualmente, nonostante ci fosse noto che gli animali che non sudano non presentano febbre da atropina.

Ovviamente abbiamo eseguito il controllo del peso dopo l'iniezione di atropina e dopo l'applicazione del laccio. Nel resto le modalità sperimentali sono state quelle abituali.

I risultati di questi nuovi esperimenti sono stati secondo le previsioni. Al termine della 1^a ora di esposizione in termostato i singoli animali si sono presentati assai modicamente bagnati nella regione periorale, specie nella parte inferiore, e ciò verosimilmente ad opera dell'acqua espirata, e presentavano un certo grado di polipnea ed una temperatura rettale mai inferiore a 41°. Reimmessi in termostato, dopo 30-40 minuti circa, quasi tutti pervenivano acutamente ad un grado estremo di sofferenza e persistendo nell'esperimento era difficile assicurarne la sopravvivenza. Trattati dal termostato, respiravano molto faticosamente, presentavano segni di insufficienza cardiaca, erano ipotonici e non reagenti agli stimoli. La loro temperatura rettale era di 43° e la perdita di peso si aggravava intorno a 3,5-4 gr.

Nel grafico e nella tabellina qui allegata, abbiamo racchiuso il comportamento medio della T° corporea e della perdita di peso presentato dagli animali sovrariscaldati nelle quattro diverse condizioni sperimentali dinanzi descritte. Dall'esame dell'uno e dell'altra emerge l'esistenza nel ratto di due meccanismi termodispersivi, che sostituiscono la mancante sudorazione: l'emissione di saliva e di urina.

Essi rappresentano indubbiamente i mezzi più potenti di cui l'animale dispone per abbassare la temperatura corporea, allorché è esposto al sovrariscaldamento.

Rimane da stabilire se tali meccanismi di perdita del calore sono propri di tutti i roditori, se essi sono comandati e coordinati dall'ipotalamo anteriore e quali sono i modi e le vie attraverso le quali si svolge tale comando e coordinazione. Rimane infine da tenere presente la possibilità che l'emissione di urina possa essere in determinate condizioni un mezzo di termodispersione anche dell'organismo umano nei primi periodi della vita.

Su tutti questi argomenti stiamo soffermando la nostra attenzione.

(4) H. G. O. HOLCH, *Dosage of Drugs for Rats* in FARRIS e GRIFFITH, *The Rat*, p. 325, J. B. Lippincott, Philadelphia, 1949.

Biochimica. — *Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi* (*). Nota di FRANCESCO CEDRANGOLO, ERNESTO QUAGLIARIELLO, ALBERTO FIDANZA, ALBERTO GIOIA E MASSIMO CRESTA, presentata (**) dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

È noto che Cavallito e collaboratori ⁽¹⁾ dal fatto che la cisteina e altri composti sulfidrilici tendono a diminuire o addirittura ad annullare l'azione antibatterica della penicillina e di certi altri antibiotici, trassero lo spunto per formulare l'ipotesi che l'azione della penicillina debba consistere in una inattivazione di enzimi contenenti gruppi SH—. Krampitz e Werkman ⁽²⁾ tuttavia non riuscirono successivamente a mettere in evidenza un'azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi e sulla triosofosfatodeidrogenasi, enzimi, che, come è noto (ved. Cedrangolo e Adler ⁽³⁾; Cedrangolo e Balbi ⁽⁴⁾) contengono gruppi SH— essenziali per la loro attività, e subito dopo anche Euler ⁽⁵⁾ ha affermato che la succinodeidrogenasi non è inibita per aggiunta di penicillina.

Ci è sembrato pertanto interessante ripetere gli esperimenti di Euler tal quali e colla variante di incubare per un certo tempo, prima dell'aggiunta del succinato, la preparazione enzimatica coll'antibiotico. Tale variante si rendeva necessaria in quanto è noto dagli esperimenti citati di Cedrangolo e Balbi che l'acido succinico protegge i gruppi SH— della succinodeidrogenasi dall'azione di sostanze che reagiscono con detti gruppi (perchè sono questi la sede dell'affinità dell'enzima per il substrato).

DISPOSIZIONE DEGLI ESPERIMENTI E RISULTATI. — Il tessuto (muscolo pettorale di piccione) è stato trattato per la preparazione della succinodeidrogenasi secondo le indicazioni di Hopkins e Morgan ⁽⁶⁾: il tessuto era ridotto in filamenti di alcuni mm mediante l'impiego di Waring Blender della Ditta Turmix (12.000 giri al minuto; durata del trattamento 20". In queste condizioni, come ci si è potuto anche assicurare all'osservazione microscopica, le fibre risultano integre e solamente alcune segmentate). Per le prove, i cui risultati sono riportati nella tabella I, i tubi di Thunberg erano riempiti come segue:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica della Facoltà di Medicina e Chirurgia dell'Università di Napoli.

I risultati riferiti in questa Nota sono stati oggetto di due brevi comunicazioni alla Soc. It. Biol. Sperim. (XX Assemblea generale, Bari, 28-30 marzo 1951); ved. «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 27, 253, 255 (1951).

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) C. J. CAVALLITO e T. H. HASKELL, «J. Am. Chem. Soc.», LXVII, 1991 (1945).

(2) L. O. KRAMPITZ e C. H. WERKMAN, «Arch. Bioch.», XII, 57 (1947).

(3) F. CEDRANGOLO e E. ADLER, «Enzymol.», VII, 297 (1939).

(4) F. CEDRANGOLO e R. BALBI, «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», XVI, 191 (1941); «Arch. Sc. Biol.», XXVII, 176 (1941).

(5) H. v. EULER, «Ark. för Kem. Mineral. och Geol.», XXV A, n. 8 (1948).

(6) F. G. HOPKINS e E. J. MORGAN, «Bioch. Journ.», XXXII, 611 (1938).

I: mg 200 tessuto + cc 0,4 blu di metilene 0,06 ‰ + cc 0,5 H₂O + cc 3,5 miscela fosfati m/15 pH 7,4.

II: mg 200 tessuto + 0,4 blu di metilene 0,06 ‰ + 0,5 succinato m/10 + 3,5 miscela fosfati.

III: id. I più mg 23 penicillina cristallina (7).

IV: id. II più mg 23 penicillina.

Per le prove, i cui risultati son riportati nella tabella II, il tessuto è stato preventivamente incubato per 3 h sotto vuoto a 37° e a pH 7,4 con la penicillina (mg 12 penicillina per mg 100 tessuto). Si è poi lavato ripetutamente ed asciugato. Contemporaneamente si è allestito un controllo, consistente in tessuto incubato per lo stesso tempo e nelle stesse condizioni con solo puffer. I tubi di Thunberg erano poi riempiti come segue:

I: mg 200 tessuto incubato da solo + cc 0,4 blu di metilene + cc 0,5 H₂O + cc 3,5 puffer fosfati.

II: mg 200 tessuto incubato da solo + 0,4 blu di metilene + 0,5 succinato m/10 + 3,5 puffer.

III: id. I ma con tessuto incubato con penicillina.

IV: id. II ma con tessuto incubato con penicillina.

Nelle tabelle I e II sono riportati alcuni esperimenti che rappresentano esempi di numerosissimi esperimenti paralleli, i quali dettero risultati concordi. Per brevità si tralascia di riportare i tempi di scoloramento relativi alle prove senza succinato (prove I e III) dato che essi si possono considerare praticamente infiniti (> 180').

TABELLA I.

Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi (tessuto tritato in Waring Blender: penicillina aggiunta al tessuto contemporaneamente al succinato).

	Tessuto (controllo)	Tessuto + penicillina
Tempo di scoloramento in minuti primi	14	14

TABELLA II.

Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi (tessuto tritato in Waring Blender ed incubato per 3 h con la penicillina prima dell'aggiunta del succinato).

	Tessuto incubato da solo per 3 h	Tessuto incubato con la penicillina per 3 h
Tempo di scoloramento in minuti primi	31	> 180

(7) Abbiamo adoperato penicillina Avlon (sale potassico), Merck (sale sodico), Squibb (sale potassico pufferato con citrato al 4,5 ‰). In linea generale possiamo dire che ci è apparso indifferente l'uso di una qualsiasi di queste tre confezioni.

Le ricerche eseguite confermano anzitutto quelle di Euler (loc. cit.), secondo le quali l'aggiunta di penicillina alle miscele di succinodeidrogenasi ed acido succinico non ha alcun effetto sull'enzima (ved. tabella I), ma esse danno anche l'interessante nuovo risultato che quando l'enzima è incubato con la penicillina prima dell'aggiunta del succinato, la sua attività è totalmente soppressa o quasi (ved. tabella II). Questi ultimi risultati è evidente che si presterebbero facilmente ad essere interpretati come l'effetto di una interazione stechiometrica tra la penicillina e i gruppi SH dell'enzima e, in realtà, noi stessi in un primo tempo così li abbiamo considerati. Tuttavia, continuando le ricerche in altro senso, come si vedrà a proposito dei risultati, che riferiamo appresso, ci siamo convinti che tale spiegazione non poteva essere mantenuta e che l'inibizione osservata si doveva spiegare invece nel quadro di una più generale azione della penicillina.

Abbiamo creduto opportuno allargare gli esperimenti relativi all'azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi allo scopo di tentare di chiarire il meccanismo per il quale tale enzima appariva inibito quando il tessuto muscolare era incubato per un certo tempo coll'antibiotico.

Abbiamo eseguito 3 gruppi fondamentali di esperimenti:

A) *Incubazione colla penicillina del tessuto protetto con succinato.*

Se l'azione inibente della penicillina sulla succinodeidrogenasi dipende da una interazione stechiometrica tra l'antibiotico e i gruppi SH— dell'enzima, ci si deve attendere un effetto nullo quando tali gruppi SH— sono protetti col succinato (metodo di Cedrangolo e Balbi, loc. cit. ⁽⁴⁾).

TABELLA III.

Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi protetta e non protetta col substrato.

	Tessuto incubato per 1 h a 37° nel vuoto e a pH 7,4		Tessuto incubato per 1 h a 37° nel vuoto e a pH 7,4	
	con penicillina	con succinato e penicillina	da solo	con succinato
Tempo di scoloramento	76	65	17	14

Disposizione degli esperimenti e risultati. — Si è usato tessuto preparato come al solito, del quale in prove preliminari ci si era assicurato che l'attività succinodeidrogenasica risultasse inibita dopo contatto per un certo tempo coll'antibiotico. Si riportano i particolari della ricerca. Il tessuto (mg 500) è stato prima incubato per 15' sotto vuoto a 37° e a pH 7,4 con il succinato (cc 1,5 soluzione 0,5 mol) e poi si è aggiunta la penicillina (mg 58). L'incubazione nelle stesse condizioni si è protratta ancora per altri 45'. Contemporaneamente si sono

allestiti tre controlli consistenti in: 1° tessuto incubato con penicillina; 2° tessuto incubato da solo; 3° tessuto incubato con succinato. Dopo incubazione, lavaggio ripetuto accuratamente più volte (10-15 volte) e determinazione dell'attività enzimatica come al solito.

Un esperimento tra i molti paralleli, che dettero risultati concordi, è riportato nella tabella III.

I risultati ottenuti dimostrano che l'azione della penicillina si esercita anche più o meno nella stessa misura quando i gruppi SH— sono impegnati nell'unione col succinato ⁽⁸⁾.

B) *Azione della penicillina su tessuti finemente tritati al Latapie.*

Disposizione degli esperimenti e risultati. — Il tessuto è stato preparato come negli esperimenti precedenti, colla variante di usare per il tritamento il Latapie anziché il Waring Blender. In queste condizioni, come ci si è potuto assicurare anche al microscopio, le fibre muscolari risultano marcatamente frammentate con parziale ma evidente danneggiamento della struttura cellulare. Per la disposizione degli esperimenti si rimanda a quella seguita negli esperimenti, di cui alla tabella II.

Anche in questa serie di esperimenti si sono avuti risultati perfettamente paralleli. Per brevità si riportano nella tabella IV i risultati di un solo esperimento della serie.

TABELLA IV.

Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi (tessuto passato attraverso Latapie ed incubato con la penicillina prima dell'aggiunta del succinato).

	Tessuto incubato da solo per 3 h	Tessuto incubato con la penicillina per 3 h
Tempo di scoloramento in minuti primi	8	7

I risultati riportati nella tabella IV si debbono paragonare a quelli riportati nella tabella II. Appare una fondamentale dissociazione nell'azione dell'antibiotico

(8) Dagli esperimenti di questa serie risulta che il tempo di scoloramento nel caso del tessuto incubato con succinato e penicillina è sempre lievemente inferiore al tempo di scoloramento che si osserva quando il tessuto è stato incubato invece con la sola penicillina (ved. esperimento riportato nella Tabella III: minuti primi pari rispettivamente a 65 e 76. Tale differenza è risultata, anzi, anche più grande in altri esperimenti della serie). Anche il tessuto incubato col succinato si mostra più attivo in riguardo alla decolorazione del blu di metilene rispetto al tessuto incubato da solo (ved. esperimenti Tabella III: minuti primi pari a 14 e 17). Tale fatto si può spiegare con il passaggio del succinato dall'esterno nell'interno delle cellule durante i 15 minuti, nei quali il tessuto è stato a contatto con detto substrato, e coll'impossibilità di allontanare completamente coi successivi lavaggi tutto quanto il succinato che è penetrato nell'interno delle cellule.

quando esso agisce su tessuto pressocchè integro (tessuto sminuzzato in Waring Blender : cospicua inibizione) e quando invece agisce su un tessuto profondamente tritato (tessuto passato attraverso Latapie : nessuna inibizione). Sembra perciò possibile concludere che perchè l'azione della penicillina si renda manifesta è necessaria l'integrità cellulare ⁽⁹⁾. Questo modo di vedere appare confermato dagli esperimenti della sezione C.

C) Riattivazione del tessuto inibito dalla penicillina.

Nelle ricerche di questa serie si è potuto mettere in evidenza il fatto che il tessuto inattivato per incubazione con penicillina (tessuto tritato in Waring Blender ed incubato con la penicillina come per gli esperimenti di cui alla tabella II) ridiventa attivo per successivo pestamento con sabbia di quarzo (in condizioni quindi, in cui le cellule si frammentano e si distrugge totalmente la struttura cellulare). Un tipico esperimento è riportato nella tabella V.

TABELLA V.

Riattivazione, mediante pestamento con sabbia di quarzo, del tessuto inibito.

	Tessuto incubato con penicillina	Tessuto incubato con penicillina e poi pestato con sabbia di quarzo	Tessuto incubato da solo	Tessuto incubato da solo e poi pe- stato con sabbia di quarzo
Tempo di scoloramento in minuti primi . .	120	10	25	10

I risultati ottenuti e brevemente riferiti in questa Nota ci permettono di trarre alcune considerazioni conclusive :

1° appare veramente difficile conciliare l'insieme dei risultati coll'idea che l'inibizione, osservata in molti casi, dell'enzima succinico, possa essere l'effetto di una interazione stechiometrica tra l'antibiotico e i gruppi —SH dell'enzima;

2° i risultati mettono invece in evidenza l'importanza che si deve ascrivere all'integrità cellulare (confr. tabella II con tabella IV e V);

3° una ipotesi possibile potrebbe essere quella che la penicillina alteri in un qualche modo la permeabilità cellulare, per cui ne deriverebbe una diminuzione della diffusione di alcuni substrati, tra cui il succinato, dall'esterno all'interno delle cellule ⁽¹⁰⁾.

(9) Anche il tessuto, la cui integrità cellulare è distrutta per pestamento con sabbia di quarzo, non subisce per incubazione colla penicillina alcuna variazione della sua attività succinoidrogenasica. Per brevità si omette di riportare i dati numerici che risultano perfettamente sovrapponibili a quelli della Tabella IV.

(10) La mancata inibizione osservata negli esperimenti di cui alla Tabella I, si può spiegare facilmente con un passaggio del succinato e del blu di metilene nell'interno della cellula ancora prima che la penicillina abbia potuto determinare una seria alterazione della permeabilità.

Nel quadro di questi risultati e di questa ipotesi si debbono far rientrare le ben note osservazioni di Gale⁽¹¹⁾, dalle quali risulta che l'aggiunta di penicillina a culture in accrescimento di microrganismi sensibili gram-positivi inibisce la normale assimilazione dell'acido glutammico e quelle ancora più recenti di Rowley e collaboratori⁽¹²⁾ con penicillina radioattiva, in seguito alle quali questi Autori concludono per una diretta reazione chimica tra penicillina e un componente cellulare non ancora identificato.

È possibile che alla base di tutte queste osservazioni si debba porre la ben nota azione di bloccaggio della penicillina sul catabolismo dei mononucleotidi (Krampitz e Werkman loc. cit.⁽²⁾; ved. anche Pratt e Dufrenoy⁽¹³⁾), e Macheboeuf e Gros⁽¹⁴⁾ pensano, infatti, che in tal senso vadano interpretate le osservazioni di Gale; tuttavia noi non ci crediamo autorizzati per il momento ad entrare nel merito di tale questione che esorbita dai limiti della nostra esperienza.

Infine crediamo opportuno sottolineare che colle nostre ricerche si dà per la prima volta la prova di un'azione della penicillina (sia pure in concentrazione molto elevata e per via indiretta) su una attività enzimatica delle cellule degli animali superiori.

Scienza dell'alimentazione. — *Presenza e comportamento dei lipidi nel succo enterico*^(*). Nota di LODOVICO ARRIGO e TULLIO MONTINI, presentata^(**) dal Socio U. LOMBROSO.

Tutto il tubo intestinale, dal digiuno al colon, può rappresentare un emuntorio per materiali vari e tale funzione pare accentuarsi, soprattutto in corrispondenza del colon ascendente. Si deve a Clementi^(1,2) in particolare, l'interessante osservazione che il succo enterico (oltre la bile) è l'unico secreto, «in cui sono presenti quali componenti normali, i lipidi».

Clementi afferma che «alcuni di essi sono destinati ad esercitare un'azione protettiva sulla membrana delle cellule dell'epitelio della mucosa intestinale; non si può però escludere che la loro presenza possa stare anche parzialmente in rapporto sia con la funzione emuntoria dell'intestino che con quella assorbente e forse anche con l'attività enzimatica dei fermenti digerenti».

Fissando l'attenzione su quest'ultima ipotesi, va ricordato come tale fatto potrebbe altresì, in condizioni abnormi, di ricambio essere indice di un alterato

(11) E. F. GALE, «Bull. Johns Hopkins Hosp.», LXXXIII, 119 (1948).

(12) D. ROWLEY, P. D. COOPER, P. W. ROBERTS, E. LESTER SMITH, «Bioch. Journ.», XLVI, 157 (1950).

(13) R. PRATT e J. DUFRENOY, «Texas Reports on Biology and Med.», VII, n. 2, 180 (1949).

(14) M. MACHEBOEUF e F. GROS, «Exposés annuels de Bioch. Med.», douzième série, p. 141 (1951).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) A. CLEMENTI, «B. S. I. B. S.», 2, 584 (1927).

(2) A. CLEMENTI, «B. S. I. B. S.», 25, 1274 (1949).

metabolismo intermedio, per cui materiale lipidico non utilizzato venga avviato all'escrezione attraverso l'intestino (Lombroso⁽³⁾).

Clementi⁽⁴⁾ ha altresì dimostrato un rapporto diretto fra variazioni lipemiche, specie post-assorbitive e quantità di lipidi presenti nel succo enterico, nel senso che essa passa da mgr. 40 a 300 %, per quanto si osserva nel cane adulto, operato di estrinsecazione di un'ansa dell'intestino tenue alla Thiry-Vella, rispettivamente nel caso di una dieta ipolipidica ed iperlipidica. La media percentuale, in condizioni di dieta mista, risultò all'A., mgr. 110-140 %.

Abbiamo ritenuto opportuno apportare a questi dati ulteriori contributi, soprattutto precisando la composizione quantitativa del materiale lipidico, presente nel succo enterico, in rapporto al quadro ematochimico e cercando di studiare il comportamento di particolari lipidi (soprattutto colesterolo), durante l'assorbimento di grassi (ad esempio olii), in ansa alla Vella.

Inoltre abbiamo raccolto altri dati sulle variazioni dei lipidi nel succo enterico, in condizioni particolari di pancreasectomia o di surrenectomia, per osservare l'effettivo parallelismo tra tasso lipemico e quantità di lipidi nel succo enterico, nonché per confermare, in modo più diretto, l'osservazione di Lombroso che i cani spancreati possono perdere attraverso le feci molto grasso, anche più di quello introdotto con gli alimenti.

A questo proposito, va ricordato che Liguori notò un incremento dei lipidi nel succo enterico di cani normali, portatori di ansa alla Vella, in seguito allo inietto di estratti corticalici^(5,6).

CONDIZIONI SPERIMENTALI. - Abbiamo compiuto i presenti rilievi su cani adulti di ambo i sessi, di peso medio di Kg. 10 circa: essi sono stati operati di estrinsecazione alla Thiry-Vella di un tratto di un'ansa ileale (della lunghezza di cm. 30-40 circa), scelta convenzionalmente distante circa cm. 50-70 dalla valvola ileocecale. Gli animali sono stati usati dopo 15 giorni dall'operazione, procedendo al prelievo del succo enterico, sempre dopo 12 ore di digiuno, nel corso di un periodo di dieta mista costante, comprendente pane, minestra, carne magra. Come soluzione stimolante, abbiamo usato quella di cloruro di sodio all'2,5 % tiepida, poichè la prostigmina, da altri impiegata, agendo sulle terminazioni vagali, può rendere più complesso il giudizio sulla provenienza dei lipidi, presenti nel succo enterico in condizioni fisiologiche.

Procedimento seguito: immissione, con una pipetta graduata, innestata su un sondino di gomma, di cm³ 10 di soluzione, previo ripetuto lavaggio dell'ansa con soluzione fisiologica intiepidita, chiusura dei due stomi dell'ansa e raccolta dopo 30 minuti (tempo standard), del succo liberamente defluente e della soluzione fisiologica, con cui si lava nuovamente e ripetutamente il tratto di ansa estrinsecata alla Vella. In tal modo, abbiamo cercato di sostituire al riferimento

(3) U. LOMBROSO, « Arch. Sci. Med. », 28, 359, (1904).

(4) A. CLEMENTI, « B. S. B. I. S. » 26, 1477 (1950).

(5) G. LIGUORI, « B. S. B. I. S. », 14, 445 (1939).

(6) D. B. ZILVERSMITH I. L. CHAIKOFF, C. ENTENMANN, « J. Biol. Chem. », 172, 637 (1948).

quantitativo di percentuale, quello cronologico, più atto a rivelare le modalità della perdita di grasso dalla mucosa intestinale (in quanto stimolo solo leggermente irritante e più distribuito nel tempo). Sugli stessi animali, abbiamo studiato il comportamento dei lipidi dopo poche ore (4-6) da un pasto iperlipidico, comprendente gr. 50-70 di grasso di bove.

In esperienze, altrove riferite, è stata dimostrata la possibilità per l'ansa alla Vella di assorbire rapidamente, in notevole quantità, emulsioni di olio di cocco e di oliva⁽⁷⁾. Ci è parso interessante indagare se, durante tale periodo, fosse possibile dimostrare, nel materiale recuperato, dopo un tempo standard di permanenza in ansa, la presenza di particolari lipidi, ad esempio colesterolo, che figurano completamente assenti nei campioni di emulsione impiegate.

Abbiamo perciò eseguito ricerche, immettendo nell'ansa, per la durata di 30 minuti, cm³ 10 di una emulsione al 10 % di olio di cocco, oppure di oliva.

Su ogni campione, ottenuto nelle varie condizioni sperimentali, previa completa essiccazione, abbiamo proceduto a dosaggi di alcune frazioni lipidiche, con il procedimento già descritto⁽⁸⁾.

Riassumiamo nell'accluso prospetto i dati medi, ottenuti in tutte le condizioni ricordate.

Analoghi rilievi sono stati fatti sugli stessi cani operati successivamente di pancreasectomia (da 10 giorni trattati con insulina) o di surrenectomia (e trattati con DOCA ed ipodermoclisi di soluzione fisiologica).

I valori osservati sono in perfetto accordo con quelli di Clementi, per quanto riguarda il cane normale. Si è cioè confermato, anche nelle condizioni che abbiamo studiato, un notevole parallelismo tra valori lipemici e quantità di lipidi nel succo enterico.

Tale rapporto è risultato costante: così, quando manca il pancreas, alla lipemia e colesterinemia aumentate (Ardy-Dachà⁽⁹⁾); quest'ultima però non aumenta in seguito ad un forte apporto di lipidi, come è stato visto, ad esempio in seguito ad infusioni di grasso, Dachà-Arrigo-Rossi⁽¹⁰⁾), corrispondono apprezzabili aumenti (di oltre il 50 %) dei lipidi totali nel succo enterico. Quando invece sono stati asportati i surreni, ad una bassa lipemia e colesterolemia (Yeakel-Blanchard⁽¹¹⁾; Stillman-Entenman-Anderson-Chaikoff⁽¹²⁾), fanno riscontro valori minori che di norma dei lipidi nel succo intestinale.

Inoltre, sono stati precisati i valori del colesterolo e del Ph lipidico, segnalati presenti da Clementi fra i lipidi del succo enterico. A questo proposito, va notato che il quadro chimico non cambia, procedendo a prolungata centrifugazione del succo ottenuto, di modo che le cellule, eventualmente presenti in esso, non giustificano l'entità di tali valori.

(7) L. ARRIGO e T. MONTINI, « Atti S. I. P. S. », Lucca ottobre 1950.

(8) L. ARRIGO e T. MONTINI, « Arch. Maragliano », V, 1131 (1950).

(9) C. ARDY, U. DACHÀ, « Arch. Sci. Biol. », XXXIV, 238 (1950).

(10) U. DACHÀ, L. ARRIGO e O. ROSSI, « B. S. I. B. S. », XXV, 1282 (1949).

(11) E. H. YEAKEL, E. W. BLANCHARD, « J. Biol. Chem. », 123, 31 (1938).

(12) N. STILLMAN, C. ENTENMANN, E. ANDERSON, I. L. CHAIKOFF, « Endocrinology », 31, 481 (1942).

TABELLA.

SUCCO ENTERICO					SANGUE				
	Lip. tot. mgr.	Col. tot. mgr.	Col. Lib. mgr.	Ph lip. mgr.	N. J.	Lipemia	Col. tot. mgr.	Ph lip. mgr.	N. J.
Cane spancreato (12 h digiuno)	81	20,1	13,8	0,762	52	710	270	220	56
id. (6 h dopo pasto grasso)	120	23,5	11,9	0,725	48	795	258	205	58
id. (con immissione di emul- sioni)	—	16,8	10,3	—	—	630	240	215	16
Cane surrenectonizz. (12 h digiuno) . .	40	10,6	6,0	0,489	56	440	145	120	56
id. (6 h dopo pasto grasso)	59	13,2	7,3	0,520	54	520	126	132	60
id. (con immissione di emul- sioni oleose)	—	14,6	8,9	—	—	460	140	115	64
Cane normale (dopo 12 h digiuno) . . .	51	16,5	11,2	0,511	52	510	168	162	62
id. (6 h dopo pasto grasso)	76	19,8	10,4	0,665	56	660	255	200	58
id. (con immissione di emul- sioni oleose)	—	12,9	7,1	—	—	550	190	179	60

A proposito del colesterolo, bisogna notare come esso si mantenga su quantitativi pressochè uguali in tutte le condizioni sperimentali studiate, anche quando è fortemente aumentato nel sangue oppure allorchè la mucosa è impegnata nello assorbimento di emulsioni di olii (vedi tabella). Questa constatazione sembra rendere tra le altre più attendibili l'ipotesi che si tratti di colesterolo, drenato normalmente dall'organismo. Infatti è noto che colesterolo e materiale sterolico in genere compaiono normalmente nelle feci in apprezzabile quantità (Monasterio-Gigli⁽¹³⁾; Cook-Polgar-Thomson⁽¹⁴⁾; Arrigo-Montini⁽¹⁵⁾; per ricordare solo gli Autori che più di recente hanno ripreso lo studio del capitolo). Ciò senza escludere naturalmente il possibile finalismo della presenza di colesterolo nel succo enterico, ad esempio per l'assorbimento dei grassi, come è a tutt'oggi sostenuto da Kirschmair⁽¹⁶⁾.

Di significato più diretto ci sembra la presenza ed il comportamento del Ph lipidico nel succo enterico, segnalata anche ultimamente da Favarger⁽¹⁷⁾: la quantità di esso risulta piuttosto modesta, e seppure riferita alla molecola fosfatidica globale (moltiplicando il valore di tale Ph per 23,54), rappresenta un quarto dei lipidi totali, mentre diminuisce ancora in senso relativo (in proporzione di 1:8 circa), nell'animale spancreato, in cui sono osservabili i massimi valori di lipidi nel succo enterico. Va notato però che, in rapporto alla presunta possibilità dell'intervento del Ph, nei fenomeni di assorbimento del grasso, da parte della mucosa enterica (Zilversmith-Chaikoff-Entenman⁽¹⁸⁾), i fosfatidi, presenti nel succo enterico, potrebbero essere in maggiore quantità, quando fosse in corso tale fenomeno.

Il numero di iodio dei lipidi del succo enterico è piuttosto basso (54 in media, circa) e costante; non pare perciò acquisire particolare importanza interpretativa.

Concludendo, possiamo affermare che:

1° è indiscussa la presenza di lipidi (trigliceridi, colesterolo, fosfatidi) nel succo enterico;

2° la loro quantità è in rapporto al tasso lipemico, per quanto riguarda trigliceridi e fosfatidi (in modo meno evidente per questi ultimi);

3° per il colesterolo, si osserva una notevole indipendenza tra variazioni colesterolemiche e percentuale di colesterolo nel succo enterico, da riportare probabilmente ad un fenomeno di continua perdita di esso dalla mucosa enterica;

4° si conferma, in condizioni di pancreasectomia e di surrenectomia, una variazione, rispettivamente in senso positivo o negativo dei valori dei lipidi, presenti nel succo enterico. Ciò conferma e rende più generale il rapporto, già affermato, tra lipemia e quantità di grassi nel succo intestinale.

(13) G. MONASTERIO, G. GIGLI, «Rass. Fisio-Pat. Clin. e Ter.», 19, n. 11-12 (1947).

(14) R. P. COOK, N. POLGAR, R. O. THOMSON, «The bioch. Journ.», 47, 600 (1950).

(15) L. ARRIGO e T. MONTINI, «Athena», 6, 155 (1951).

(16) H. KIRSCHMAIR, «Klin. Wochens.», 27, 558 (1949).

(17) P. FAVARGER, «Helv. Physiol. und Pharmac. Acta», 7, 371 (1949).

(18) Vedi citazione (6).

Zoologia. — *Valore sistematico di alcuni nuclei del talamo degli Attinotterigi*^(*). Nota di VALDO MAZZI, presentata ^(**) dal Socio N. BECCARI.

Non volendo entrare in particolari relativi all'intima struttura del diencefalo degli Attinotterigi, ricorderò soltanto che nel talamo esistono alcuni nuclei caratterizzati dalla presenza nel loro neuropilo di sinapsi glomerulari, del tutto simili ai glomeruli olfattivi. Stando ad Holmgren ⁽¹⁾ questi nuclei sono: il corpo genicolato laterale, il nucleo intermedio, ed una formazione complessa che indicherò, con Franz, con il nome globale di corpo glomerulare. Il corpo glomerulare può a sua volta suddividersi in una parte anteriore, situata nella regione pretettale, corrispondente al nucleo anteriore del talamo degli Autori; e in una parte rotonda, situata più caudalmente, nel talamo ventrale, corrispondente al nucleo rotondo di alcuni, ma non di tutti gli Autori che hanno studiato il diencefalo degli Attinotterigi. È appunto al corpo glomerulare che intendo riferirmi in questa comunicazione.

La interpretazione del corpo glomerulare ha dato luogo per il passato a controversie, che ancora non si sono spente. Per ragioni di brevità mi limito a ricordare che nel 1912 Franz ⁽²⁾, seguito poi da Holmgren ⁽¹⁾ e Kappers ⁽³⁾, in base a ricerche comparative, prospettò e sostenne un'ipotesi, secondo la quale la parte rotonda sarebbe derivata per spostamento caudale della parte anteriore nel corso della filogenesi; infatti la parte rotonda è presente nei Fisoclisti, manca nei Fisostomi.

Questa concezione è stata accettata quasi incondizionatamente da tutti i neurologi, ma, ciò non di meno, ad essa si possono muovere alcune obiezioni. In primo luogo, si può rilevare che essa è stata fondata su basi comparative piuttosto ristrette, e riferita ad una classificazione degli Attinotterigi largamente superata. In secondo luogo sono comparse in successive pubblicazioni dello stesso Kappers ⁽⁴⁾ e di Suzuki ⁽⁵⁾, affermazioni tali che, se fondate, toglierebbero all'ipotesi stessa ogni valore generale. In terzo luogo alcuni Autori, come Beccari ⁽⁶⁾, si sono chiesti se la comparsa di una parte rotonda glomerulare rappresenti un carattere evolutivo o se invece nel differenziamento delle parti entrino in giuoco fattori forse estranei alla supposta evoluzione filogenetica.

In particolare, i fattori ecologici, stando a numerose ricerche, fra le quali ricordo solo quelle di Stefanelli ⁽⁷⁾, avrebbero grande importanza nel determinare le caratteristiche morfologiche dell'encefalo. Tale dipendenza della morfologia

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) «Folia Neurobiol.», 6, 402 (1912).

(2) «Acta Zool.», 1, 337 (1920).

(3) *Vergleichende Anatomie des Nervensystemes*. E. F. Bohn, Amsterdam (1921).

(4) «Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam», 44, 130 (1941).

(5) «Saito, Ho-On-Kai, Sendai», 8, 165 (1932).

(6) *Neurologia comparata anatomo-funzionale dei Vertebrati compreso l'uomo*. S. E. S. Firenze (1943).

(7) Per una rivista sintetica cfr. «La Ricerca Sci.», 18 (Suppl.), 27 (1948).

dalla funzione, a sua volta connessa con il comportamento, è sostenuta, nei confronti del telencefalo dei Teleostei, tanto da Herrick⁽⁸⁾ che da Meader⁽⁹⁾.

Nel quadro di una completa revisione degli svariati problemi sorti dallo studio dei nuclei glomerulari talamici, ho pensato non fosse inopportuno saggiare la validità della ipotesi di Franz alla luce di più moderni criteri classificativi e su basi comparative più larghe e sicure.

Le osservazioni che mi accingo a riferire succintamente e in via preliminare, vertono su 75 specie di Attinotterigi, rappresentanti tutti i sottordini contemplati dalla recente classificazione di Römer⁽¹⁰⁾, eccettuati i Polypterini. Nella raccolta del materiale ho tenuto presente anche la classificazione di Berg⁽¹¹⁾, specialmente per gli ordini e sottordini più bassi (cioè fino ai Beloniformes), i quali sono rappresentati quasi al completo nel mio materiale; spero comunque di colmare le lacune in un prossimo futuro.

Dalle ricerche compiute è risultato chiaramente che il corpo glomerulare va incontro, nel corso della filogenesi, ad una progressiva evoluzione. Infatti esso manca come nucleo differenziato nei CHONDROSTEI (*Polyodon*, H. Hoogenboom⁽¹²⁾; *Acipenser*, Johnston⁽¹³⁾), e fa la sua comparsa, sotto forma di un piccolo nucleo anteriore del talamo, negli HOLOSTEI (*Amia calva* e *Lepidosteus osseus*, Kappers⁽¹⁴⁾). Fra gli ISOSPONDYLI, nei Clupeoidea, Salmonoidea, Opistoproctoidea, Stomiatoidea e Gonorhynchoidea, si riscontrano condizioni fra loro simili. È infatti presente soltanto un grosso nucleo anteriore del talamo, situato nella regione pretettale e che si esaurisce, in media, a livello del margine caudale della commessura posteriore, senza contrarre rapporti di sorta con il braccio ascendente della commessura orizzontale. Lo stesso si può dire anche per i Cyprinidi, fra gli OSTARIOPHYSI; nei Siluridi, APODES e HETEROMI è pure presente il solo nucleo anteriore, però molto più piccolo che nei precedenti sottordini.

Nel successivo ordine artificiale dei MESICHTHYS il quadro cambia sostanzialmente. Negli Haplomi esiste ancora un solo grosso nucleo glomerulare, che inizia nella regione pretettale. Esso però si è allungato in direzione caudale, includendo nella sua compagine il braccio ascendente della commessura orizzontale. Negli altri sottordini (Iniomi, Microcyprini, Synentognathi, Thoracostei, Salmopercae) il corpo glomerulare è suddiviso in due parti; una anteriore, che occupa una posizione corrispondente a quella propria della parte anteriore dei precedenti ordini, ma di quest'ultima assai più piccola; ed una rotonda, situata nel talamo ventrale, posteriormente alla commessura posteriore. Un cordone cellulare continuo e una serie di glomeruli collegano materialmente le due parti fra loro. Il fascio talamo-lobare (mammillare), che nei precedenti ordini collegava il nucleo anteriore con i lobi laterali dell'ipotalamo, investe, nei MESICHTHYES,

(8) « *Libro en honor de D. Santiago Ramón y Cajal* », p. 143 (1922).

(9) « *Proc. Kon. Akad. Wetensch. te Amsterdam* », 42, 657 (1939).

(10) *Vertebrate Paleontology*. The University of Chicago Press. Chicago (1947).

(11) « *Trav. Inst. Zool. Acad. Sc. URSS* », 5, 346 (1940).

(12) « *Zeitschr. f. mikr.-anat. Forsch.* », 18, 311 (1929).

(13) « *Zool. Jahrb. Abt. Anat. u. Ont.* », 15, 59 (1901).

(14) « *Abhandl. Senckenb. Nat. Gesellsch.* », 30, 449 (1907).

la parte rotonda (o nucleo rotondo), ed è quindi suddivisibile in un fascio talamo-rotondo ed in un fascio rotondo-lobare (mammillare). Il fascio talamo-rotondo decorre insieme al sopracitato cordone cellulare.

In tutti i sottordini degli ACANTHOPTERYGII, indistintamente, il corpo glomerulare comprende una parte anteriore e una parte rotonda, collegate fra di loro da glomeruli, da cellule e dal fascio talamo-rotondo. Le variazioni in questo schema sono costituite dalle oscillazioni nella grandezza relativa delle due parti, dal grado di spostamento caudale della parte rotonda, e dalle complicazioni strutturali a carico di questa ultima parte (numero degli strati cellulari che compongono la capsula periferica; presenza di cellule fra i glomeruli, ecc.).

Mi sembra quindi che le presenti ricerche confermino, su basi allargate, e quindi più attendibili, la ipotesi di Franz. Infatti le differenze riscontrate nella struttura del complesso rotondo sembrano essere imputabili, per usare le parole di Stefanelli (7), « a gradi di complessità inerenti alla posizione sistematica ». I fattori ecologici giuocano forse soltanto un ruolo subordinato, pur non essendo da escludersi che ad essi siano in parte riportabili le complicazioni strutturali riscontrate specialmente a carico della parte rotonda, e alle quali ho sopra accennato.

Poichè dunque appare inconfutabile che i caratteri morfologici del corpo glomerulare si sono fissati nel corso della evoluzione, io ritengo anche che tali caratteri possano avere valore sistematico.

La valutazione di questo nuovo carattere sistematico può essere proficua, per esempio, per decidere casi di controversa sistemazione di determinati generi, e nella seriazione naturale degli ordini. Alcuni esempi, limitati a due per ragioni di brevità, varranno per dimostrazione.

Il genere *Carapus* (*Fierasfer*) veniva assegnato per il passato agli HETEROMI (cfr. Boulenger (15)). Nel 1909 Regan (16) separò i *Fierasferidae* (= *Carapidae*) dagli HETEROMI e li considerò *Brotulidae* specializzati, ascrivendoli quindi ai *Blennioidea*. A questo concetto hanno aderito tutti i classificatori successivi. L'esattezza della classificazione viene confermata anche dall'esame del corpo glomerulare. Infatti negli HETEROMI (*Notacanthus*), è presente il solo nucleo anteriore di mole ridotta. In *Carapus* invece è presente anche un piccolo ma distinto nucleo rotondo. La organizzazione del corpo glomerulare è nel complesso molto simile a quella di *Ophidium barbatum* (un blennioideo), specie sistematicamente vicina.

Il secondo esempio riguarda la posizione sistematica, tutt'ora controversa, degli Haplo mi.

Nella classificazione di Boulenger l'ordine HAPLOMI comprendeva un insieme eterogeneo di famiglie. Regan (1909) (16) comprese in questo ordine soltanto le famiglie *Umbridae*, *Dallidae* ed *Esocidae*, e lo interpose fra gli ISOSPONDYLI e gli INIOMI. Goodrich (1909-1930) (17) interpone gli HAPLOMI (= *Esociformes*) fra i CLUPEIFORMES e gli ANGUILLIFORMES; Jordan (18) (1923) fa della famiglia *Dallidae* un nuovo ordine, quello degli XENOMI, e interpone tale ordine e quello

(15) « Cambridge Natural. History », VII, Fisches, London (1904).

(16) « Ann. Mag. Nat. Hist. », 8, 3, 75 (1909).

(17) *Cyclostomes and Fishes*.

(18) « Stanford Univ. Publ., Biol. Sci. », III, 77 (1923).

ridotto degli HAPLOMI, fra gli INIOMI e i CIPRINODONTES. Woodward (1932)⁽¹⁹⁾ assegna all'ordine un posto intermedio fra gli Ostariofisi e gli Apodi. Berg (1936)⁽²⁰⁾ degrada gli Haplo mi a sottordine, e li ascrive ai CLUPEIFORMES, mentre Römer (1947)⁽²¹⁾ li considera pure un sottordine, che pone in testa all'ordine artificiale MESICHTHYS. Secondo Berg gli Esocodei costituirebbero un gruppo specializzato di Clupeiformi, originatosi da pesci osmeroidi al termine del Cretaceo. Questa ipotesi viene confermata da Chapmann (1941)⁽²¹⁾ in base a considerazioni osteologiche.

Ho in precedenza accennato che negli Haplo mi (*Esox lucius* L.) il corpo glomerulare è rappresentato, come nei Clupeiformi dalla sola parte anteriore; la differenza, rispetto ai Clupeiformes, consiste in uno spostamento in senso caudale del nucleo, che sorpassa il margine caudale della commessura posteriore e abbraccia il ramo ascendente della commessura orizzontale. È interessante a questo proposito rilevare che nei Salmonidi in genere, e negli Osmeroidi in specie (Holmgren), il nucleo anteriore del talamo risulta «stirato» alquanto in direzione ventro-caudale, pur non includendo in alcun caso il braccio ascendente della commessura orizzontale. La condizione riscontrata in *Esox* potrebbe pertanto essere considerata una specializzazione di quella propria degli Osmeroidi; e in tale senso la risoluzione sistematica di Berg riceverebbe ancora una nuova conferma.

Ammesso che si tratti di una «specializzazione», non si può fare a meno di notare però che essa è avvenuta proprio nella linea lungo la quale si può logicamente ritenere abbia progredito la evoluzione durante il passaggio dalle condizioni dei nuclei glomerulari più primitive, proprie degli ISOSPONDYLI, a quelle più perfezionate, proprie tanto dei MESICHTHYS che degli ACANTHOPTERYGII.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente saluta, anche a nome dei Colleghi, il prof. Kuratowski dell'Università di Varsavia che assiste all'adunanza.

Il Senatore Castelnuovo informa la Classe che durante le ferie estive sono usciti i due fascicoli dei «Rendiconti» del luglio-agosto (n. 1-2) e settembre-ottobre (n. 3-4).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Senatore Castelnuovo saluta tutti i Soci e, in particolare, i nuovi eletti e comunica che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali: Enrico Pistolesi e Sergio Tonzig, i Soci Corrispondenti: Francesco Tricomi, Giuseppe Montalenti, Antonino Clementi e i Soci Stranieri: Karl Willy Wagner, Geoffry Ingram Taylor, Richard Courant, W. Heiskanen, W. Lawrence Bragg, L. Worman Bowen, Felix Machatschki, Hans Schneiderhöhn, Oskar Vogt, Max Hartmann, Warren Harmon Lewis, Edwin G. Conklin, Rudolph Albert

(19) ZITTEL, *Textbook of Palaeontology*, 2nd English Ed. (1932).

(20) «Bull. Rec. Biol. Perm», 10, 383 (1936).

(21) «J. Morph.», 69, 279 (1941).

Peters, Cyril Dean Darlington, Hans Adolf Krebs, Albert Szent-György, Otto Loewy.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato inviato all'Accademia dal Col. Cesare Colangeli e la Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Bompiani presenta il I volume della « Bibliografia Matematica Italiana » a cura dell'Unione Matematica Italiana, mettendo in evidenza che dopo la pubblicazione della « Bibliografia Matematica Italiana » del Riccardi che si arresta ai primi anni dell'800, non vi è stato purtroppo alcun lavoro che la continuasse. L'Unione Matematica, pur non potendo, per difficoltà di vario genere, riallacciarsi all'opera del Riccardi nel momento in cui si arrestò, ha iniziato frattanto, con volumi annuali, una pubblicazione bibliografica di tutti i lavori di carattere matematico editi in Italia a partire dall'anno solare 1950 o dall'anno accademico 1949-50, comprendente anche le pubblicazioni di autori stranieri nelle rispettive lingue.

Il Presidente ringrazia il Socio Bompiani e manifesta il suo compiacimento per l'importante iniziativa dell'Unione Matematica Italiana per la quale auspica felici risultati.

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il « Trattato di Istologia Generale » del Socio Pensa, il « Dizionario d'Ingegneria » del Socio Perucca, i due volumi del « Corso di Topografia » del prof. T. Berlese, il volume « Integraltafel-Zweiter Teil Bestimmte Integrale » di W. Gröbner e N. Hofreiter, il « Libro Jubilar », tomo I, dell'Istituto Geologico e Mineralogico di Spagna, l'opera del prof. M. Romão dal titolo « Galileu e o método científico », vol. I, il volume del prof. P. Lacroix dal titolo « L'organisation des os », quello contenente gli « Atti del Convegno Internazionale di Televisione » (Milano, settembre 1949), le opere « Flora mesozòica portuguesa » e « Nymphéacées fossiles du Portugal » a cura della Direzione Generale delle Miniere e dei Servizi Geologici del Portogallo e la pubblicazione di B. Kisch e J. M. Bardet dal titolo « Electron microscopic histology of the heart. On application of electron-microscopic research to physiology ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci: Vardabasso, Beccari, Picone, Trabacchi, Carnera, Boaga, Califano, Puntoni, Cambi, Gior-dani, Lombroso, Bonino e Rostagni.

Il Socio Picone presenta una Memoria di U. Wagner dal titolo «Contributi alla teoria dei procedimenti iterativi per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari».

Il Socio Gola presenta una Memoria di F. M. Gerola dal titolo: «Determinazioni cariometriche e citochimiche durante la profase della micosi e della meiosi nelle angiosperme».

Per l'esame delle predette Memorie saranno nominate apposite Commissioni.

Il Segretario accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

VARDABASSO S. — Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna.

AGENO M. e QUERZOLI R. — Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nelle soluzioni. Nota II (pres. dal Socio G. C. TRABACCHI).

BARBATELLI R. — Determinazione del passo del micrometro in declinazione del cerchio meridiano «Repsold». Nota II (pres. dal Socio L. CARNERA).

BERETTA E. e BIANCHI A. — Liberazione di elettroni secondari da parte di ioni poliatomici e fenomeni di invecchiamento nei contatori di G. e M. a spegnimento spontaneo (pres. dal Corrisp. A. ROSTAGNI).

BORDI M. — Ricerche sul potere di penetrazione di un ceppo di tripanosoma brucei attraverso le mucose del topino (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

LE ROUX P. L. e BIOCCA E. — Il *Bullinus contortus* ospite intermedio dello *Schistosoma bovis* in Sardegna (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

MAZZOLENI F. — Le formule delle fasi di Hume-Rothery in leghe con più di due componenti (pres. dal Socio F. GIORDANI).

MIRONE P. — Sullo spettro ultrarosso del pirrolo tra 2,8 e 4 μ sdoppiamento della banda ultrarossa riferita al gruppo NH (pres. dal Socio G. B. BONINO).

PINI B. — Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico (pres. dal Socio M. PICONE).

PUCCI C. — Alcune limitazioni per gl'integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico (pres. dal Socio M. PICONE).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega Caccioppoli, riferisce sulla Memoria di C. Miranda dal titolo: «Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti». Detta relazione, che conclude con la proposta della pubblicazione del lavoro nelle Memorie accademiche, è messa in votazione dal Presidente e approvata dalla Classe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 novembre 1951

- BALDUS Herbert. — *A Alimentação dos Índios no Brasil. Sugestões para Pesquisas Etnográficas*. Estr. da «Sociologia», vol. XII, 1950, n. 1.
- *Bebidas e Narcóticos dos Índios do Brasil: Sugestões para Pesquisas Etnográficas*. Estr. da «Sociologia», vol. XII, 1950, n. 1.
- BARDET Joan M. — Vedi: KISCH Bruno and BARDET Joan M.
- BENIOFF Hugo. — *Earthquakes and Rock Creep. Part. I: Creep Characteristics of Rocks and the Origin of Aftershocks*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLI, 1951, n. 1.
- *Global Strain accumulation and release as revealed by Great Earthquakes*. Estr. da «Bulletin of the Geological Society of America», vol. LX, 1951.
- BERLESE Tommaso. — *Corso di topografia*. Padova, CEDAM, 1951. Voll. 2, in-8°, con figg.
- CHAUVE BERTRAND. — *La réforme du Calendrier*. Estr. da «Courrier de la normalisation», 1951, n. 98.
- Convegno Internazionale di Televisione* indetto sotto gli auspici della Presidenza del Consiglio dei Ministri. Milano, settembre, 1949. Torino, Società Editrice Torinese, 1949. Pp. xxxv-466, in-8°, con figg. (Comitato Nazionale Tecnico di Televisione - Associazione Nazionale Industrie Elettrotecniche Radio Italiana).
- DIX C. Hevitt. — *Pulse propagation in two spatial dimensions*. Estr. da «Geophysics», vol. XV, 1950, n. 3.
- DRAGHETTI Alfonso. — *Principi di fisiologia dell'azienda agraria*. Milano-Bologna, Istituto Editoriale Agricolo, 1948. Pp. xv-355, in-8°, con figg.
- ESTEVEZ José. — *Trabajos científicos*. La Habana, Ministerio de Educación, 1951. Pp. 316, in-16°. (Cuadernos de cultura. Novena serie, 4).
- FANO Gino. — *Chiarimenti su particolari superficie aventi tutti i generi uguali all'unità*. Estr. da «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXXXIV, 1949-50.
- *Nozioni sommarie di geometria sulle curve e superfici algebriche*. Torino, Gheroni, 1950. Pp. 39, in-8°.
- GAMBA Augusto. — Vedi: PERUCCA Eligio e GAMBA Augusto.
- GRÖBNER Wolfgang and HOFREITER Nikolaus. — *Integraltafel. Zweiter Teil: Bestimmte integrale*. Wien und Innsbruck, Springer, 1950. Pp. vi-551, in-4°.
- GUARINI Emile. — *Les tremblements de terre. Leur origine électrique possible. Les Tremblements de Terre au Pérou*. Paris, H. Dunod et E. Pinat, s. d. Pp. 26, in-8°.
- GUTENBERG Beno. — *Crustal layers of the continents and oceans*. Estr. da «Bulletin of the Geological Society of America», vol. LXII, 1951.
- *PKKP, P'P', and the earth's core*. Estr. da «Transactions, American Geophysical Union», vol. XXXII, 1951, n. 3.
- *Revised travel times in Southern California*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLI, 1951, n. 2.
- *Travel times from blasts in Southern California*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLI, 1951, n. 1.
- HANDJINICOLAOU J. — *Dieldrin and dacus fly control*. Estr. da «Rural Review», vol. V, fasc. 55-56.
- HOFREITER Nikolaus. — Vedi: GRÖBNER Wolfgang and HOFREITER Nikolaus.
- INSTITUTO GEOLÓGICO Y MINERO DE ESPAÑA. — *Libro jubilar (1849-1949)*. Tomo I. Madrid, 1950. Pp. xii-401, in-8°, con tavv.
- JÉRÉMINE Elisabeth. — Vedi: LUGEON Maurice et JÉRÉMINE Elisabeth.

- KISCH Bruno and BARDET Joan M. — *Electron microscopic histology of the heart. An application of electron-microscopic research to physiology*. New York, Brooklyn Medical Press, 1951. Pp. VI-106, in 8°, con tavv.
- LACROIX Pierre. — *L'organisation des os*. Liège, Éditions Desoer, 1949. Pp. 230, in-8°, con figg.
- Tentativo di interpretazione delle ossificazioni sperimentali. Estr. da « Archivio Italiano di Chirurgia », vol. LXXII, fasc. 2.
- LUGEON Maurice. — *Cristaux de quartz hyalin de la Croix de Javerne (Hautes Alpes Vaudoises)*. Estr. da « Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles », vol. LXIV, 1950, n. 276.
- I. Discours. II. Réflexions et impressions. Estr. da « Annales de la Faculté des Sciences de Marseille », s. 2ª, t. XXI, fasc. 1. (Réunion géologique en Provence pour commémorer le cinquantenaire des œuvres de Marcel Bertrand. 28 sept.-6 oct. 1950).
- Sur le prétendu dôme du Pradet près de Toulon. Estr. da « Compte Rendu Sommaire des Séances de la Société Géologique de France », 1951.
- LUGEON Maurice et JÉRÉMINE Élisabeth. — Sur la confirmation de la présence d'un Précambrien d'origine glacière en Normandie (Manche). Estr. da « Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences », 1950.
- LUTZ Bertha. — Nota prévia sobre alguns anfíbios amuros do alto Itatiaia. Estr. da « O Hospital », 1951.
- A *Manual of the geology of India and Burma*. Third Edition, revised and largely rewritten by Edwin H. Pascoe. Vol. I. Calcutta, Government of India Press, 1950. Pp. XVI-483, in-8°, con tavv.
- MAUNY R. — *L'Afrique d'après Ptolémée (vers 141. J. C.)*. Carta geografica.
- MOONEY H.M. — *A study of the energy content of the seismic waves P and pP*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLI, 1951, n. 1.
- PASCOE Edwin H. — Vedi: *A Manual of the geology of India and Burma*.
- PENSA Antonio. — *Trattato di istologia generale*. 5ª ed. Milano, Soc. Ed. Libr., 1951. Pp. IX-670, in-8°, con figg.
- PERUCCA Eligio. — *Dizionario d'ingegneria*. Vol. I, A-CER. Torino, U.T.E.T., 1951. Pp. XII-1052, in-4°, con figg.
- PERUCCA Eligio e GAMBA Augusto. — *Fusion des systèmes MKSA rationalisé et non rationalisé dans un système unique*. Estr. da « Ricerche » supplemento del numero di luglio 1951 della Rivista « Ata ».
- PICONE Mauro. — *Ciò che ha dato e ciò che può dare l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*. Discorso tenuto a Bari il 14 ottobre 1933 nella XXXII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Roma, Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, 1951. Pp. 11, in-8°.
- POLVANI Giovanni. — *L'Epistolario Volteriano*. Discorso pronunciato il 13 aprile 1951 al Padiglione della RAI alla Fiera Campionaria di Milano in occasione della « Giornata della Scienza » organizzata dal Consiglio Nazionale delle Ricerche. Estr. da « La Ricerca Scientifica », 1951, a. XXI, n. 5.
- PRESTIGIACOMO A. — *Così nacque l'Universo*. Torino, Editrice 2000, 1951. Pp. XXXI-155, in-16°. (Scoperte d'oggi).
- RICHTER C. F. — *Velocities of P at short distances*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XL, 1950, n. 4.
- ROBB-SMITH H. T. — Vedi: SINCLAIR H. M. and ROBB-SMITH H. T.
- ROMÃO Mattos. — *Galileu e o Método Científico*. Vol. I. Lisboa, Grandes Oficinas Gráficas « Minerva », 1944. Pp. 391, in-8°. (Estr. da « Revista da Faculdade de Letras, de Lisboa, s. 2ª, t. X).
- SINCLAIR H. M. and ROBB-SMITH H. T. — *A short history of anatomical teaching in Oxford*. Oxford, the University Press, 1950. Pp. 69, in-8°, con tavv.
- STETSON R. H. — *Motor phonetics. A study of Speech movements in action*. 2ª ed. Amsterdam, Oberlin College, 1951. Pp. XI-212, in-4°.
- TEIXEIRA Carlos. — *Flora Mesozoica Portuguesa*. I parte. Lisboa, 1948. Pp. 119, in-fol., con tavv.
- *Nymphéacées fossiles du Portugal*. Lisbonne, Direction Générale des Mines et Services Géologiques, 1945. Pp. 13, in-fol., con figg. e tavv.
- UNIONE MATEMATICA ITALIANA. — *Bibliografia Matematica Italiana*. Vol. I. Roma, Ed. Cremonese della Casa Ed. Perrella, 1951. Pp. XI-150, in-8°.

- VACCARO Pietro. — *Sulla ricerca del fuoco di una parabola*. Palermo, Grafiche A. Renna, 1950. Pp. 208, in-8°. In litografia.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *L'Etna durante il periodo glaciale e la formazione della Valle del Bove*. Estr. da «Memorie dell'Istituto Geo-Paleontologico dell'Università di Catania», 1949, s. 2^a, n. 1.
- *Nuova teoria sull'avvento del periodo glaciale. Nuove prove della Pliocenicità dell'Etna e chiarimenti sul Glaciale Etneo*. Catania, Coniglione e Giuffrida, 1951. Pp. 61, in-4°.
- VAGLIARINDI Carmelo. — *Origine glaciale della Valle del Bove, altro ghiacciaio etneo. Cronologia di eruzioni preistoriche presso Randazzo*. Catania, Coniglione e Giuffrida, 1947. Pp. 27, in-8°.
- *Osservazioni sul periodo glaciale e nuove manifestazioni dell'azione glaciale quaternaria sul monte Etna*. Catania, Coniglione e Giuffrida, 1948. Pp. 31, in-8°, con tavv.

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 dicembre 1951

Presiede il Socio anziano G. ARMELLINI.

NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. — Rilievi e precisazioni.* Nota III^(*) del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

1. Si è già visto nelle Note precedenti⁽¹⁾ che a voler trattare con criteri rigorosi il problema indicato con (II), ossia quello concernente il moto diurno, si è ricondotti inevitabilmente alla questione della esistenza o meno di un assoluto per i moti rotatori, perchè la semplice enunciazione dell'accennato problema presuppone chiaramente come già acquisito il concetto di *rotazione nulla*, il quale implica necessariamente quello di *rotazione assoluta*, cosicchè anche gli argomenti galileiani al riguardo, apparentemente persuasivi, risultano basati sopra una nozione che, non diversamente da quella relativa ad un assoluto per moti traslatori, mancava all'epoca della disputa di significato concreto.

Se si segue però quello che sembra debba essere dopo tali premesse il naturale sviluppo logico delle idee sulle questioni in esame, si vede subito che le conclusioni ora accennate non implicano necessariamente che il ricercatore debba fermarsi in una posizione *negativa*; appagarsi della conclusione che l'assetto copernicano sia da preferirsi all'altro solo « per facilità di astronomia » (secondo una appropriata espressione di Galileo) e cadere così senz'altro in una questione pratica e secondaria, la cui risoluzione non può rispondere ad oscure ma innegabili esigenze dello spirito umano, il quale tende ad oltrepassare in tale materia il dominio dei fatti strettamente relativi. Se è assurdo il tentativo di riconoscere l'assoluto nella quiete e nel moto e se il fondare una scienza su quell'irraggiungibile concetto è impresa vana, rimane evidentemente aperto il problema di costruire una *teoria* rigorosa dei moti relativi nel sistema planetario. Questa teoria dovrà

(*) Presentata nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) V. NOBILE, « Rend. Accad. Lincei », vol. IX, fasc. 6, 1950; vol. X, fasc. 5, 1951.

necessariamente fondarsi sopra ipotesi e postulati concernenti le cause atte a produrre il moto o a modificarlo ed è chiaro allora che la scelta di tali principi non può aver luogo senza una determinazione precisa del concetto di moto, ossia senza la indicazione di speciali triedri ai quali il moto *si deve* intendere riferito, perchè le previste relazioni fra cause ed effetti possano sussistere. Si vede dunque - a parte le esigenze generali di cui sopra - che se la necessità di costruire la detta teoria è quella che impone di approfondire il problema del riferimento e che porta a concepire una relatività che non sia ristretta e infeconda come quella puramente geometrico-cinematica dalla quale Galileo non poteva discostarsi, d'altra parte la considerazione della necessità medesima e delle difficoltà del problema deve indurre il ricercatore ad impegnarsi in quel compito solo nella misura indispensabile allo scopo in vista e anzitutto a non premettere altri principi e postulati se non quelli riferentisi ad enti pei quali esista una definizione *quantitativa*: condizione necessaria perchè possa aver luogo una impostazione matematica del problema del moto.

2. A realistici criteri nel senso anzidetto si conforma la dinamica newtoniana, la quale trova la più grandiosa delle sue applicazioni nella meccanica celeste e sembra debba necessariamente rivolgersi, anche ai fini della ricerca dei suoi riferimenti fondamentali, alla considerazione di fatti astronomici. Una trattazione matematica rigorosa subentra così, nella discussione dei problemi cosmologici, alle considerazioni dei « Dialoghi », sovrabbondanti di considerazioni estranee e mancanti di quelle sugli elementi essenziali i quali consistono nel concetto di *forza*, come determinante il moto o la modifica di esso, e nella definizione indispensabile di riferimenti privilegiati da sostituire all'assoluto metafisico.

È qui opportuno notare, al fine di chiarire taluni punti sui quali si è determinato qualche equivoco ed anche per qualche aggiornamento in materia di astronomia, che la dinamica qui chiamata newtoniana è bensì nel suo attuale assetto algoritmico identica a quella concepita da Newton e racchiusa tutta nella relazione fra forza, massa e accelerazione associata alla terza legge, ma che un esame molto semplice del processo logico seguito da Newton e dei principi fondamentali da lui assunti mette in luce differenze sostanziali fra il punto di vista del fondatore e quello da cui dovette porsi la critica scientifica delle epoche posteriori, la quale ha il suo più cospicuo e conclusivo rappresentante in C. Neumann⁽²⁾.

La posizione iniziale di Newton di fronte al problema del riferimento era di totale e dichiarata adesione alle concezioni metafisiche di spazio, tempo e moto *assoluti*. Sta però il fatto che col procedimento da lui seguito quelle idee *non intervengono che solo in apparenza* a stabilire i fondamenti della dinamica e a formare le equazioni del movimento del punto materiale, equazioni che egli scrive e dalle quali dipende poi tutto lo sviluppo di quella scienza. Newton infatti, avendo ammesso che la immobilità assoluta possa concepirsi, attribuisce, non diversamente da Galileo, tale stato alle stelle (senza però tentare dimostrazioni al riguardo). Egli può allora affermare che un triedro avente l'origine nel Sole

(2) Cfr. C. NEUMANN, *Ueber die Prinzipien der Galilei-Newton'schen Theorie*. (Akademische Antrittsvorlesung). Leipzig, 1870.

e invariabilmente orientato rispetto alle stelle individui uno spazio *immobile* e che associando ad esso una variabile temporale da definire si disponga di un riferimento rispetto al quale valga l'equazione del moto nella forma predetta. Ma a conclusioni non diverse giunge, *senza alcuna necessità di introdurre l'assoluto* e con maggiore chiarezza, la meccanica dei tempi posteriori. Il distacco dalle concezioni metafisiche, che Newton aveva, senza avvertirlo, già sostanzialmente operato, la moderna meccanica lo esegue e giustifica in maniera del tutto esplicita col formulare un sistema di postulati con cui si afferma l'esistenza di taluni riferimenti rispetto ai quali si intende valida la seconda legge di Newton e si rende così possibile uno sviluppo rigorosamente deduttivo per cui la soluzione di ogni problema di dinamica viene a dipendere dalla integrazione di un sistema di equazioni differenziali. La legittimazione dei presupposti di base cessa di esser compito della fantasia ed è ottenuta con la verifica *di fatto* delle proprietà del moto dedotte dall'analisi.

Le equazioni fondamentali della dinamica del punto, ritenute da Newton valide solo per un riferimento *immobile*, servono insomma anzitutto — secondo le vedute posteriori e con una inversione del procedimento — a compendiare un complesso di postulati circa l'esistenza di riferimenti speciali, rispetto ai quali le equazioni del moto di un punto debbano prendere necessariamente la forma prestabilita, che implica, naturalmente, la legge d'inerzia. Meglio precisando: con le equazioni newtoniane si postula l'esistenza di particolari triedri, di una variabile temporale t , e, per ciascun punto, di un numero caratteristico m (massa), tale il tutto che fra le componenti della forza, quelle dell'accelerazione e la massa del punto intercedano le relazioni ammesse.

Che debba trattarsi di riferimenti del tutto *speciali* basta a mostrarlo la considerazione che, mentre il vettore *forza* deve considerarsi indipendente dal riferimento ⁽³⁾, quello dell'accelerazione ne dipende invece strettamente. L'accertare l'esistenza effettiva di siffatti riferimenti non è obiettivo da raggiungersi col ragionamento matematico, poichè si tratta di postulati, dei quali la convalida deriva dal paragone di fatti osservati con quelli che la dinamica, costruita su quei presupposti, permette di dedurre nella trattazione dei singoli suoi problemi. Dalla esistenza di *uno* dei triedri aventi le indicate proprietà consegue però, come è ben noto dalla meccanica, quella di infiniti altri, in moto relativo traslatorio e uniforme rispetto a quello noto e fra di loro, i quali triedri sono *del tutto equiva-*

(3) È utile ricordare le formule relative. L'equazione (vettoriale) del moto del punto P , di massa m e sollecitato dalla forza \mathbf{F} , rispetto ad un riferimento mobile assume la forma

$$(1) \quad m \ddot{\mathbf{r}}_r = \mathbf{F} - m (\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c)$$

dove i vettori \mathbf{a}_e e \mathbf{a}_c (accelerazioni di trascinamento e complementare) dipendono, come si è accennato, da quello $\boldsymbol{\omega}$ della rotazione del triedro mobile e inoltre dalla accelerazione assoluta \mathbf{a}_0 dell'origine di questo e dalla velocità relativa di P , detta $\dot{\mathbf{r}}_r$, come mostrano le seguenti relazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \mathbf{a}_0 + \beta (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \\ \mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}_r \end{cases}$$

indicandosi con β una omografia vettoriale che risulta dalla prima delle (2) e intendendosi $\ddot{\mathbf{r}}_r = \mathbf{a}_r$.

lenti al predetto ai fini della costruzione della dinamica dei moti assoluti, se conveniamo di chiamare d'ora innanzi tali quelli rispetto ad uno qualunque degli infiniti triedri predetti (inerziali), perchè la definizione di questi si basa sulla proprietà che l'accelerazione di un qualsiasi punto debba essere, rispetto a tutti i medesimi, identica. Nessun parametro che dipenda dal moto traslatorio relativo dei triedri inerziali figura quindi nelle equazioni della dinamica, talchè quel moto rimane del tutto ignorato nel corso dei calcoli e non si può pertanto pensare a determinarlo a mezzo del paragone fra teoria e esperienza. La meccanica ha fatto con ciò la rinunzia definitiva a conoscere traslazioni assolute, ma rigetta nell'inconoscibile solo ciò che le è inutile.

3. La nozione di riferimento inerziale trae con sè in maniera naturale quella di *rotazione assoluta*. Poichè ai triedri inerziali corrisponde la forma più semplice delle equazioni della dinamica, laddove per gli altri figura nella corrispondente equazione del moto oltre alla accelerazione dell'origine, il vettore ω della rotazione istantanea del triedro e si passa dalla forma più complessa alla più semplice col porre nella prima $\alpha_0 = 0$, $\omega = 0$, risulta giustificato da un punto di vista formale, il ritenere *nulla* la rotazione dei triedri inerziali e chiamare *assoluta* quella genericamente caratterizzata da ω .

Ma i termini così adoperati assumono un significato più essenziale — per cui i riferimenti considerati possono bene a ragione denominarsi assoluti — quando si noti come nulla potrebbe obbiectarsi a questa estensione del concetto se non col trasportare la discussione in altro campo, (ossia col riaprire la questione, già chiusa, della non rispondenza dei riferimenti trovati ad un ideale filosofico dell'assoluto), oppure, secondo un altro ordine di idee, col contestare direttamente i principi e postulati di base della dinamica. Nel primo caso l'uomo di scienza non può seguire la critica in quelle argomentazioni perchè egli non potrebbe mai utilizzare i risultati che fossero raggiunti dalla speculazione filosofica, in quanto che il filosofo deve evitare, nella ricerca e determinazione del suo assoluto, ogni considerazione riguardante moti relativi, ciò che lo porta di necessità ad una definizione fondata sopra argomentazioni e concezioni dalle quali rimangono escluse le nozioni di rapporto e di misura: quelle appunto sulle quali si deve basare una trattazione matematica. Riguardo al secondo caso è da notare che, essendo i postulati in questione convalidati da tutto l'insieme dei risultati ottenuti dalla dinamica nelle sue svariatissime applicazioni, risultati sottoposti durante più che due secoli alle più rigorose verifiche a mezzo dell'osservazione (basterà citare la più grandiosa di quelle applicazioni, cioè la meccanica celeste), nessuno fra gli elementi-base della dinamica classica potrebbe in alcun caso essere riconosciuto fallace ma *solo* è da ammettersi che *il loro insieme possa eventualmente rientrare in un sistema più vasto e generale*, dal quale possano poi riottenersi, sostanzialmente immutati, gli elementi stessi come risultanti da una approssimazione sufficiente.

Le considerazioni che qui immediatamente precedono sono di importanza essenziale per un breve e ben semplice esame della questione galileiana sul moto diurno.

4. È facile intanto dopo quanto si è premesso — e utile per le attinenze coi problemi galileiani — riconoscere quale fosse di fatto la posizione di Newton e

vedere come col riferimento da lui adoperato egli realizzasse pienamente le condizioni per l'applicabilità delle sue equazioni fondamentali (2^a legge), con che le dogmatiche definizioni da lui date su enti assoluti rimangono sostanzialmente riconosciute come inoperanti.

Si consideri che ai tempi di Newton tutte le stelle, compreso il Sole, si ritenevano in perfetta quiete relativa (i primi moti propri apparvero, come casi singolari, nel 1713 ad Halley) è che inoltre le mutue attrazioni fra le stelle, che Newton doveva, a norma della sua legge, ammettere, potevano considerarsi del tutto inapprezzabili, date le distanze. Risulta allora ch'è per un numero grandissimo di punti materiali la relazione $m \ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ è verificata rispetto ad un triedro con l'origine nel Sole e orientato sulle direzioni stellari, perchè per tali punti è $\mathbf{F} = 0$, $\ddot{\mathbf{P}} = 0$. Ciò implica allora senz'altro che il triedro considerato è inerziale⁽⁴⁾. La vana questione di sapere se il medesimo sia oppur no *immobile* cessa da questo momento di esistere, in quanto diviene ora possibile, col riferimento trovato, di scrivere nella forma più semplice le equazioni del moto dei pianeti e quindi di integrarle, ossia di creare la *meccanica celeste*, ciò che appunto Newton ha fatto, dopo di aver costruito il calcolo infinitesimale.

5. Il processo logico che si impone in modo naturale nella trattazione dei problemi galileiani con l'applicazione delle teorie della dinamica può essere ora facilmente seguito nelle sue fasi di sviluppo. Esso conduce successivamente alle deduzioni che qui si riportano:

a) Rispetto ad un qualunque riferimento inerziale (l'unico *assoluto* che possa ammettersi pel moto nello stato attuale delle nostre conoscenze) il centro di massa dell'intero sistema planetario ha un movimento rettilineo e uniforme; tale risultato è subordinato *solo* all'ipotesi della assenza (o evanescenza) di forze esterne;

(4) La semplice dimostrazione è necessariamente subordinata alla ipotesi, già postulata, che un triedro inerziale esista. Detto allora T_0 questo triedro e T quello in questione con l'origine nel Sole, la relazione fra le accelerazioni \mathbf{A} e \mathbf{a}_r di una generica stella P rispetto a T_0 e a T si esprime con la formula

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_r + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{P}}_r + \beta (\mathbf{P} - \mathbf{O}),$$

dove si sono indicati rispettivamente con \mathbf{a}_0 , $\dot{\mathbf{P}}_r$ e $\boldsymbol{\omega}$ i vettori della accelerazione assoluta della origine di T (Sole), della velocità relativa di P rispetto a T e della rotazione istantanea di T , mentre β rappresenta la omografia vettoriale già considerata. Nel nostro caso, essendo P una stella qualunque, si ha $\mathbf{A} = 0$ (perchè si suppone P non sollecitato da forze), $\mathbf{a}_0 = 0$ per la identica ragione e trascurando le attrazioni planetarie ed anche i vettori \mathbf{a}_r e $\dot{\mathbf{P}}_r$ debbono ritenersi nulli per la supposta immobilità relativa delle stelle rispetto a T . Dovrà dunque aversi, per ogni P ,

$$\beta (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = 0$$

ovvero, moltiplicando scalarmente per $-(\mathbf{P} - \mathbf{O})$,

$$\boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O})^2 - [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O})]^2 = [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})]^2 = 0,$$

equazione che è verificata, per P qualunque, soltanto se è $\boldsymbol{\omega} = 0$. Il moto di T rispetto a T_0 è dunque traslatorio e uniforme, ossia anche T è inerziale.

b) Il punto innanzi indicato coincide (con grandissima approssimazione) col *centro del Sole*: ciò perchè si può considerare raccolta nel Sole la quasi totalità della massa del sistema. Un triedro con l'origine in tale centro e orientato invariabilmente rispetto alle stelle (supposte prive di mutui moti relativi) realizza quindi in modo quasi perfetto un riferimento *privilegiato* nel senso innanzi chiarito (semplicità massima nelle corrispondenti equazioni del moto): proprietà che sarebbe lontano dal presentare un altro triedro con l'origine in uno dei pianeti;

c) Messo a parte il moto traslatorio comune all'intero sistema planetario, rimane quello *relativo* dei vari pianeti nel sistema stesso, ossia intorno al centro di massa e, per quanto si è detto, rispetto al Sole, il quale può allora, ai fini del problema generale, esser considerato *fisso*, in quanto che esistono infiniti triedri inerziali rispetto ai quali esso è effettivamente immobile e d'altra parte il suo moto rispetto agli altri consimili non influisce sul moto eliocentrico dei pianeti del sistema. Tali moti sono allora i ben noti *moti kepleriani* e possono esser considerati come dovuti ad un'unica forza centrale diretta verso il Sole (prescindendosi in questo esame dalle perturbazioni planetarie). *Si trova così realizzato l'assetto copernicano come necessaria conseguenza di teorie del tutto generali*; deve però bene esser notato che il carattere privilegiato del riferimento eliocentrico è esclusivamente dovuto alla forte preponderanza della massa del Sole su quelle dei singoli pianeti.

È pure interessante rilevare, mentre siamo in argomento, l'importanza che deve riconoscersi ad una trattazione del problema dei moti relativi nel sistema planetario che sia, dal punto di vista meccanico, del tutto generale, ossia non vincolata all'uso di riferimenti eliocentrici⁽⁵⁾. La questione dello stato di moto o quiete della Terra come di un qualsiasi altro pianeta è da intendersi, naturalmente, superata, ma coll'impostare il problema matematico secondo il detto concetto non solo viene sottintesa prima e in seguito riconfermata la impossibilità di considerare « fisso » (nel senso dichiarato) un qualsiasi corpo del sistema, ma è ancora chiarito come il caso del Sole differisca solo sotto l'aspetto *quantitativo* da quello degli altri corpi del sistema e resta così evitato che lo studioso possa cadere in una concezione semplicistica del copernicismo.

(5) Si possono scrivere le equazioni del moto del sistema degli $n + 1$ corpi assumendo come variabili lagrangiane o le coordinate cartesiane di tutti i corpi del sistema rispetto ad una terna inerziale generica (che conviene per semplicità di calcolo scegliere baricentrale) oppure — ed è il caso che ci interessa — altre variabili comprendenti, oltre alle tre coordinate rispetto alla terna predetta di uno fra gli $n + 1$ corpi, scelto *ad arbitrio* e detto *corpo centrale*, le $3n$ coordinate cartesiane dei rimanenti corpi del sistema rispetto ad altra terna con assi paralleli a quelli della prima e con l'origine nel corpo prescelto.

Si passa allora dalle equazioni hamiltoniane corrispondenti al primo sistema di variabili a quelle relative all'altro con una trasformazione lineare completamente canonica (Poincaré), per effetto della quale le variabili ξ_0, η_0, ζ_0 (coordinate del corpo centrale) rimangono ignorate nella funzione caratteristica dopo la trasformazione, mentre le variabili ad esse coniugate rimangono costanti (corrispondendo le costanti a tre integrali del moto del baricentro). Il sistema originario viene allora a scindersi in due distinti; la integrazione di uno di essi conduce a conoscere il moto relativo dei vari corpi rispetto a quello centrale, mentre la integrazione di quelle dell'altro gruppo,

A conclusioni immediate e risolutive si viene — attraverso la dinamica — anche riguardo al problema della rotazione (II). Se consideriamo un triedro T , con origine nel centro della Terra e orientato invariabilmente rispetto alle direzioni stellari, esso non sarà inerziale, ma il suo orientamento rispetto ad un qualsiasi triedro inerziale non potrà variare. *La sua rotazione assoluta sarà quindi nulla* e sappiamo ora ciò che tale espressione significa. La rotazione rispetto a T_1 di un'altro triedro T_2 avente la stessa origine e solidale con la Terra è dunque da ritenersi *assoluta*. Il moto diurno delle stelle è pertanto un'apparenza (come Galileo aveva appunto sostenuto) dovuta a rotazione della Terra e non dell'insieme delle stelle, ma occorre ben considerare che *il senso di tale discriminazione appare solo al lume della meccanica*.

Si può ora procedere, dopo quanto si è esposto nel presente scritto e negli altri precedenti sullo stesso argomento, a indicare in riassunto i caratteri distintivi delle diverse fasi della indagine scientifica intorno ai grandi problemi cosmologici e a precisare quello che fu, secondo ogni probabilità, il pensiero di Galileo. Risulta dalla presente disamina quanto segue:

1°. Se, in base alle questioni dibattute nei « Dialoghi sui Massimi Sistemi », si vogliono formulare dei veri e propri *problemi*, questi non possono assumere altra forma che quella precisata qui innanzi negli enunciati (I) e (II) e debbono considerarsi inaccessibili e anche improponibili, sempre che ai movimenti dei quali si tratta si associ il concetto dell'assoluto (ciò che era innegabilmente nel pensiero dei contendenti), perchè nessun regolare processo logico che parta da soli *dati di*

la quale si ottiene dopo la precedente per semplici quadrature, permette la determinazione del moto del corpo centrale.

Se le variabili coniugate alle coordinate relative nel sistema trasformato si indicano con p_i, q_i, r_i , queste rappresentano le componenti delle quantità di moto nel moto relativo al corpo centrale e la funzione caratteristica assume, rispetto alle nuove variabili, la forma

$$(H) = \frac{1}{2m_0} \left[\left(p_0 - \sum_i p_i \right)^2 + \left(q_0 - \sum_i q_i \right)^2 + \left(r_0 - \sum_i r_i \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) - U,$$

con U funzione delle sole coordinate relative, x_i, y_i, z_i , e si hanno allora per le equazioni del moto del corpo centrale le seguenti (1^a serie)

$$\frac{dp_0}{dt} = - \frac{\partial (H)}{\partial x_0} = 0, \quad p_0 = \text{cost.}$$

con altre due analoghe per q_0 e r_0 (integrali del moto del baricentro), e similmente per quelle dell'altra serie (coordinate del detto corpo)

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \frac{\partial (H)}{\partial p} = \frac{p_0 - \sum_i p_i}{m_0}$$

e analoghe; queste ultime danno con semplici quadrature quelle coordinate appena sia integrato il sistema nelle x_i, y_i, z_i ; p_i, q_i, r_i .

Senza diffonderci in altri particolari, va notata la completa libertà con la quale si può procedere nella scelta del « corpo centrale », per cui si vede come, prescindendo, nel caso del sistema planetario, da considerazioni quantitative relative al Sole, risultano ragioni teoriche ben chiare per le quali, come già si è detto, *nessuno* fra gli $n+1$ corpi del sistema può considerarsi *fisso*.

osservazione - e pertanto da proprietà concernenti moti esclusivamente *relativi* - può condurre a deduzioni con le quali il dominio del relativo venga oltrepassato. Finchè dunque i mezzi di indagine si intendano limitati a quelli disponibili all'epoca della controversia (osservazioni di posizione e immediate conseguenze deducibili da esse con considerazioni geometriche elementari) le discussioni non possono che risolversi in vani sforzi per la realizzazione di un assurdo, oppure portare a riconoscere la necessità di *trasformare* il problema (I) nell'altro, molto più modesto, di scegliere fra i due « sistemi » quello che meglio risponda a requisiti di semplicità e comodità di calcolo.

2°. Se, per quanto si è detto, risulta non concepibile la identificazione effettiva di un riferimento assoluto nè quindi possibili le attese verifiche riguardo a « moto » e « quiete » di corpi del sistema planetario, rimaneva però aperta ai successori di Galileo altra via per avanzare: quella di creare *una teoria dinamica*. Questa teoria, mentre si attiene ad una concezione più ristretta dell'assoluto, la quale *non sfugge alla formulazione matematica* e può pertanto essere posta a base di un processo deduttivo sicuro, porta a svolgere nel modo più completo il duplice compito di assicurare la soluzione dei due predetti problemi, già inaccessibili, e di convalidare i postulati sui quali si fonda la determinazione del nuovo assoluto.

3°. La soluzione raggiunta con una trattazione *dinamica* dei problemi galileiani non risulta, come era da attendersi, tale da potersi rappresentare con uno schema *semplificato*, come sono i due in opposizione nella storica disputa; quella questione è veramente *superata* e non si pone più come a quell'epoca: è la meccanica che regola i movimenti effettivi, i quali sono ben più complessi. Esistono però infiniti triedri inerziali (cioè riferimenti corrispondenti al nuovo *assoluto*) rispetto ai quali il Sole è *quasi fisso* mentre il movimento dei pianeti segue molto dappresso lo schema copernicano.

Una meccanica dei moti geocentrici (come già una cinematica) può bene essere costruita, ma, a parte le gravi complicazioni di calcolo che si incontrerebbero, sta il fatto che non può esistere alcun triedro con l'origine nella Terra che sia inerziale, ossia *assoluto*.

Riguardo al problema della rotazione le conclusioni sono anche più semplici. Il problema (II), privo di senso allo stato delle conoscenze dell'epoca galileiana, ammette una soluzione ben definita in seguito al riconoscimento del carattere assoluto delle rotazioni rispetto a triedri inerziali. Tale soluzione è quella divinata da Galileo.

Sotto l'aspetto storico si può con buon fondamento concludere come segue:

4°. L'atteggiamento di Galileo, pur rivelando preferenze per l'assetto copernicano e la speranza di vederlo prevalere, è ispirato ad obbiettività, a severa logica e ad *assoluta lealtà*. In base alla scienza dei suoi tempi e agli argomenti che questa era in grado di avanzare Galileo non poteva in sostanza che ricono-

scere la impossibilità di parlare di vero e di falso nel raffronto fra le due opposte tesi, perchè da un punto di vista strettamente geometrico-cinematico, esse rimangono, come si è visto, del tutto *equivalenti*. E a tal proposito è da notarsi che nei « Dialoghi » la maggior parte degli sforzi degli interlocutori copernicisti non tende ad ottenere il trionfo della tesi preferita ma a *distruggere gli argomenti coi quali gli avversari presumevano di dimostrarne la falsità*. È dunque principalmente e quasi esclusivamente contrò la concezione del vero e del falso che Galileo, in quel momento, cioè in attesa di altri dati, insorge.

5°. Galileo ebbe, come ogni uomo, illusioni e ambizioni; ambizioni certo grandi perchè tale era l'uomo e le illusioni adeguate, per la loro natura, all'altezza intellettuale di lui.

Nell'immobilità delle stelle (in senso assoluto) egli ha lungamente creduto: ciò in base a considerazioni e sentimenti di natura mistica, e oltrepassanti ad ogni modo l'argomentazione logica, ma anche in forza di un poderoso intuito il quale lo aveva anche portato a intravedere un assoluto per le rotazioni.

Vani tentativi egli fece per ottenere una dimostrazione della presunta immobilità, ma gli argomenti da lui ideati non erano certo di natura tale da poter soddisfare esigenze logiche così rigorose come quelle che normalmente guidavano il suo ragionamento. La immobilità delle stelle era per lui *piuttosto una fede*, che gli bastava per soverchiare e sanare non solo le manchevolezze della dimostrazione, ma anche la completa indeterminatezza del concetto. L'argomento delle parallassi era dunque per lui la prova suprema, dopo la quale la tesi copernicana avrebbe ottenuto il trionfo. Come si è innanzi qui notato, quella speranza era illusoria.

Fra il 1630, anno in cui Galileo pose termine ai « Dialoghi », e il giugno 1633 (epoca dell'abjura) si determinò senza dubbio in lui, e si concluse, un'evoluzione intellettuale e spirituale profonda. La causa di tale crisi, la quale culminò nell'episodio della finale rinunzia da parte di Galileo a farsi assertore di un « credo » copernicano, può facilmente essere assegnata ed è così sostanziale da far cadere completamente gli ingiusti e inconsiderati addebiti rivolti a Galileo da parte di alcuni autori i quali non avevano compreso nè l'uomo nè i suoi problemi.

Tale causa è in relazione con la chiara visione acquistata da Galileo della inesistenza di una vera e propria dimostrazione a favore della tesi copernicana e ciò sia per la fondamentale difficoltà riguardante la immobilità delle stelle, sia per la insufficienza di metodi e mezzi strumentali dell'epoca per la verifica sulla presenza degli effetti parallattici.

Se si pensa al grave peso di queste considerazioni, le quali determinavano il tramonto di un ideale che aveva riempita l'intera vita di Galileo, si è condotti a ritenere improbabile che in un'ora così grave e solenne potessero trovar posto nell'animo di lui timori umani. Certo nell'animo di Galileo, religiosissimo e al termine della vita, non ha potuto rimanere senza risonanza un giudizio pronunziato da un'autorità sacra, ma la vera rinunzia e la più dolorosa era certo quella da lui già fatta in precedenza nel suo intimo.

Geologia. — *Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna.* Nota (*) del Corrisp. SILVIO VARDABASSO.

Un ambiente fisico bene delimitato, relativamente esteso, in posizione chiave fra due continenti, come lo è l'isola di Sardegna, nelle rocce della quale è documentata e riconoscibile una successione, vorrei dire scolastica, di avvenimenti geologici, che inizia in tempi remoti per arrivare ai giorni nostri, è senza dubbio un attraente campo di ricerca per saggiarne la ricostruzione storica.

Si potrà forse rilevare che sarebbe meglio attendere ancora per evitare il carattere provvisorio di una sintesi così impegnativa come quella grafica qui tentata per la prima volta, necessariamente ridotta a pochi tratti di penna. Ma che cosa non è provvisorio nel divenire della scienza?

Nell'inquadrare i fenomeni geologici nei tempi si è tenuto conto della durata delle singole formazioni, quale risulta dalle moderne ricerche radioattive, per cui, ad esempio, nel grafico il Periodo Cambrico figura più esteso dell'Era Terziaria.

Dall'analisi stratigrafica, più precisamente litologico-paleontologica, di ogni formazione si è ricavata, per così dire, la qualità della stessa, rappresentandola con i quattro diagrammi superiori, che mostrano appunto di quali sedimenti la formazione risulta essenzialmente ed in quale ordine questi si succedono (variazione di facies nel tempo).

Nello schematizzare il grafico, di proposito sono state escluse le facies estreme: la gessosa e la scelsiosa, eccezionali in Sardegna. Ritorneremo nelle conclusioni.

La quantità, cioè lo spessore o la potenza, delle formazioni è rappresentata nel diagramma inferiore, che sintetizza ad un tempo la storia geologica dell'Isola, mostrandone le oscillazioni ora lente ora rapide della crosta terrestre e l'avvicinarsi dei cicli di sedimentazione con le manifestazioni endogene (migmatismi, metamorfismi, vulcanismi, ecc.).

Passando alla lettura del grafico, si rileva che la formazione cambrica, con la quale inizia l'Era Paleozoica e la storia geologica della Sardegna, consiste di una serie di strati dapprima prevalentemente arenacei, nei quali se ne intercalano via via altri argillosi e poi calcarei, fino a passare a depositi esclusivamente calcareo-dolomitici; dai quali a loro volta si ritorna attraverso una più rapida transizione a sedimenti argillosi.

Il grafico mostra cioè che nel Cambrico sardo sostanzialmente sono riconoscibili due complessi litologici terrigeni includenti uno organogeno; con altre parole: un ciclo di sedimentazione marina determinato dalla oscillazione del fondo di un bacino poco profondo, nel quale si sono accumulati questi depositi.

Le attuali ricerche stratigrafiche non sono però ancora così progredite da permetterci di riconoscere fino a qual punto la sedimentazione risente le interferenze delle variazioni climatiche con i cambiamenti tettonici.

(*) Presentata nella seduta del 10 novembre 1951.

Il notevole spessore del Cambrico, forse il massimo raggiunto in una formazione della serie stratigrafica sarda (ordine di grandezza 1500 m), è rappresentato dalla curva *b*, mentre la curva *a* indica appunto che il bacino al principio e alla fine del ciclo si è trovato a distanza non eccessiva da terre emerse in via di smantellamento; interpretazione corrente del cambiamento litologico verticale della serie.

Dell'ultimo piano del Cambrico sardo non abbiamo – notoriamente – tracce di depositi. Sui diagrammi questa circostanza è indicata con i tratti orizzontali che seguono alle punte di massima sedimentazione delle arenarie, delle argille, delle dolomie e dei calcari.

È accertato che questa mancanza di sedimenti durante il Cambrico superiore coincide con una emersione in conseguenza di un piegamento regionale, che ha preceduto più estese dislocazioni negli attigui continenti (orogenesi caledonica) e che appunto perciò è stato considerato come una fase a sé (fase sarda).

Passando alla successiva formazione silurica, il grafico ci mostra il ripetersi di un analogo ciclo di sedimentazione, sia pure alquanto più accidentato nei particolari. Il ciclo comincia con un conglomerato ad elementi cambrici, ai quali tuttavia localmente si possono aggiungere anche ciottolotti di quarzo presumibilmente riferibili ad un'attività endogena (filoni?) concomitante col piegamento; attività nota altrove ma non ancora riconosciuta in Sardegna. Perciò nel diagramma viene indicato solo con riserva un possibile migmatismo caledonico profondo.

Le intercalazioni di rocce basiche nel complesso originariamente argilloso (attualmente schistoso) del Silurico superiore invece, dai più considerate coeve, sono attribuite ad un vulcanismo di geosinclinale. Una derivazione dello stesso pare sia anche il giacimento ferifero della Nurra.

La curva delle potenze (*b*) del ciclo sedimentare silurico è stata estesa al Devonico del Gerrei in quanto, nonostante la sua serie ridotta, si ammette una continuità di deposito da un periodo all'altro.

La curva delle facies (*a*) invece mostra qualche oscillazione in corrispondenza con intercalazioni conglomeratiche locali entro la serie silurica della Sardegna orientale (Sarrabus, Gerrei).

Più incerta è la posizione dei depositi terrigeni (alternanza di arenarie con argille) che seguono in leggera discordanza sul Silurico della Sardegna occidentale (Iglesiente, Nurra) senza che sia necessario ammettere una grande lacuna nel Devonico. Ciò non ostante per la presenza di scarse tracce vegetali di dubbia classificazione, questo « Postgotlandiano » viene per lo più considerato come un Carbonifero inferiore, nel qual caso esso rappresenterebbe una specie di facies di Culm della Sardegna. Si tratta, comunque, di un ciclo sedimentare limitato nello spazio ed incompleto, succeduto a quello del Silurico, molto più esteso e completo con le sue facies calcaree a Cefalopodi.

A questo punto il diagramma registra il più movimentato periodo della storia geologica dell'Isola: l'orogenesi ercinica, che ha coinvolto tutte le precedenti formazioni paleozoiche, metamorfosandole e mineralizzandole in varia misura, come è indicato con la sovrascritta di traverso sulla parte sinistra del grafico.

Le dislocazioni, i metasomatismi, ecc. coincidono con la lacuna stratigrafica (Carbonifero superiore), che ha preceduto la ripresa della sedimentazione nel Permico inferiore, bene documentato questo, dalla flora autuniana.

Anche per analogia con rapporti di giacitura meglio databili in Corsica, le dislocazioni erciniche della Sardegna andrebbero incluse piuttosto nella fase sudetica che non in quella asturica.

La messa in posto dei graniti entro lo spazio delle due isole attuali ha determinato la costituzione del grande massiccio ercinico sardo-corso, il quale ha influito in modo decisivo sull'ulteriore loro sviluppo.

In relazione con la venuta dei graniti sta tutto il ciclo di complesse manifestazioni endogene metallifere, comprese tra i fenomeni iniziali e profondi di gneissificazione e quelli tardivi e superficiali di estrusione porfirica.

La loro interpretazione rientra nella ben nota controversia d'indole generale fra geologi e petrografi (migmatismo o magmatismo?). Nel caso specifico della Sardegna bisogna riconoscere che le moderne ricerche su questa questione non sono sufficientemente estese ed approfondite.

Comunque, sul terreno è evidente che il granito ha invaso tutti i piani delle formazioni paleozoiche dell'Isola, fino al Permico escluso, sostituendosi largamente alle stesse. In altri termini il massiccio granitico sardo è cresciuto a spese delle formazioni paleozoiche e presumibilmente anche della infrastruttura precambrica, non affiorante, granitizzandole; perciò nel grafico sotto l'intrusione ercinica figura scritto « migmatismo orogenetico ».

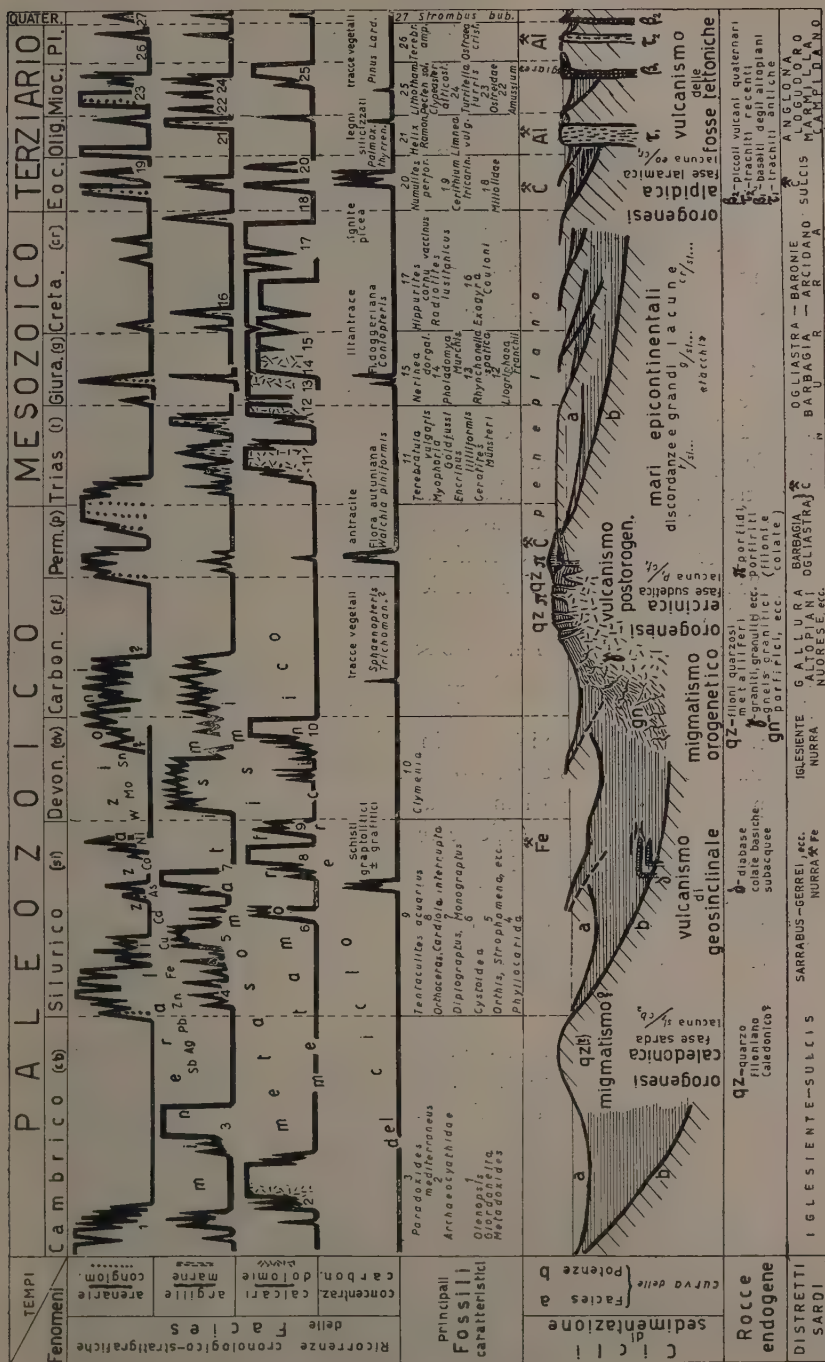
A questo segue un poco vistoso « vulcanismo postorogenetico » del Permico, ormai in piena fase continentale di emersione, alla quale sono legati pure i primi modesti accumuli di carbone fossile entro piccoli bacini lacustri (antracite della Barbagia e dell'Ogliastra).

A questo punto si inserisce nell'evoluzione geomorfologica dell'Isola un elemento nuovo, che influirà sul decorso della sedimentazione durante tutto il Mesozoico: il penepiano ercinico.

Lo spianamento del rilievo, incominciato fino dal Permico e documentato da quella facies conglomeratico-arenacea (verrucano), molto più diffusa in tutti i settori dell'Isola di quanto non si sapesse finora, è continuato nel Trias (Buntsandstein) e nei periodi successivi. In tal modo per le oscillazioni locali dell'antico massiccio cristallino spianato poterono stabilirsi sullo stesso mari epicontinentali di breve durata, relativamente più persistenti soltanto lungo una stretta zona marginale occidentale (Nurra).

La più evidente e caratteristica espressione morfologica di questa discordanza dei depositi marini mesozoici sul cristallino paleozoico, come l'aveva rilevata magistralmente già Lamarmora, è rappresentata dai piccoli altopiani calcareo-dolomitici nell'entroterra della costa orientale (« tacchi » dell'Ogliastra).

Molto meno tranquillo è stato il decorso dell'Era Terziaria in Sardegna, perchè l'antico massiccio cristallino, appena qua e là velato da queste sottili coperture mesozoiche, si è adattato piuttosto bruscamente al nuovo assetto tettonico



dello spazio eurafricano del bacino mediterraneo, dopo aver determinato con la sua resistenza passiva l'andamento delle catene recenti.

Non già che manchino in Sardegna gli indizi di un piegamento riferibile all'orogenesi alpidica; il quale infatti è riconoscibile in forma molto attenuata entro le zone mesozoiche marginali sia nella Nurra e nel Sulcis che nell'Ogliastra e nelle Baronie. Nei dintorni di Dorgali, ad esempio, sul Cretaceo inferiore piegato poggia l'Eocene tuttora quasi orizzontale, per cui si può forse parlare di una specie di fase laranica della Sardegna.

Ma il primo piegamento a grande raggio, che ha abbozzato le culminazioni (Gennargentu) e le depressioni (Campidano) attuali, è stato ben presto accompagnato da una serie di fratture, le quali hanno favorito la fuoruscita di lave. Così si è avuto un vulcanismo nelle fosse tettoniche e nelle zone marginali, continuato con qualche breve sosta dall'Oligocene al Plistocene.

La fase oligocenica delle cosiddette « trachiti antiche » è stata la più intensa, avendo prodotto una potente serie di lave e tufi a composizione molto varia dalle andesiti alle lipariti e viceversa.

La ristrettezza dello spazio nel diagramma, tracciato — come si è detto — sopra una trama cronologica, che tiene conto entro certi limiti dell'età assoluta di tutte le formazioni geologiche, non acconsente di rappresentare nei particolari i rapporti fra le oscillazioni della crosta terrestre, le invasioni marine ed il vulcanismo del Terziario e del Quaternario.

Sul grafico figurano perciò in modo schematico solo i fatti essenziali e precisamente l'alternarsi con ritmo accelerato di condizioni marine con quelle continentali.

I mari eocenico e miocenico sono in realtà insenature o canali. I brevi cicli di sedimentazione entro gli stessi sono caratterizzati da depositi prevalentemente terrigeni, paragonabili — se vogliamo — al macigno, rispettivamente alla molassa con facies calcaree subordinate (calcare nummulitico, calcare a litotamni).

L'accumulo di detriti vegetali ha dato origine solo nell'Eocene ad un bacino produttivo vero e proprio (lignite picea del Sulcis).

Il vulcanismo è stato più attivo in genere durante le fasi continentali. Manifestazioni idrotermali a bassa temperatura hanno prodotto alterazioni caoliniche locali (Al) sia nelle lave e tufi trachitici oligocenici che in quelli plioplistocenici (Logudoro, Arcidano, Campidano).

I vasti campi di lava basaltica, formatisi durante la regressione marina alla fine del Miocene, sono stati poi ridotti per erosione ad altopiani di varia ampiezza (« giare »), mentre le ultime eruzioni sono avvenute ai bordi di depressioni tettoniche, ulteriormente colpite da fratture, oppure entro bacini interni, parzialmente sgombrati dai precedenti depositi marini. Si ebbero così allineamenti di cupole o di piccoli vulcani, rispettivamente valli plioceniche occupate da lave quaternarie, che sono esempi scolastici in questo genere di rapporti morfotettonici.

Alla fine di questa rapida rassegna dei fatti più salienti della storia geologica della Sardegna si può concludere che questa è documentata soprattutto dal succedersi di una lunga serie di cicli sedimentari sempre più brevi.

Singularmente preso, ogni ciclo è caratterizzato da discordanze sempre più accentuate. Solo eccezionalmente due formazioni geologiche si seguono in concordanza fra di loro. La Sardegna infatti è la terra classica delle discordanze.

Sulle facies organogene prevalgono quelle terrigene con relativa frequenza di quelle clastiche piuttosto grossolane. Le rocce sedimentari qui più diffuse sono cioè le arenarie, mentre le facies calcareo-dolomitiche restano alquanto subordinate e sono di regola costruzioni di scogliera o, comunque, depositi di mari poco profondi. Anche perciò le intercalazioni selciose sono molto rare⁽¹⁾. Si possono escludere le facies veramente abissali e quindi ampie oscillazioni nei bacini di sedimentazione.

Notevole è pure l'estrema scarsità di depositi gessosi, rappresentati solo da sottili lenti nel Trias e dimostranti l'assenza di grandi specchi d'acqua tranquilli ad intensa evaporazione, tagliati fuori da apporti detritici.

Riassumendo, l'Isola si è sviluppata da un settore della crosta terrestre che ha dimostrato — mi si passi l'espressione — una specie di fobia del mare, cioè una tendenza geocratica sempre più accentuata. Da ciò il carattere prevalentemente continentale dei suoi terreni e del suo rilievo a vasti orizzonti, che la differenziano in modo così manifesto dalle altre regioni d'Italia.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*^(*). Nota di BRUNO PINI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

Basandosi su considerazioni di analisi funzionale, R. Caccioppoli ha dato una nuova dimostrazione del teorema di esistenza di una soluzione dell'equazione di Poisson su una superficie chiusa⁽¹⁾. Successivamente G. Cimmino ha costruito, e applicato in una serie di lavori⁽²⁾, un metodo per la trattazione, da un punto di vista esistenziale, di problemi relativi ad equazioni differenziali lineari. In particolare egli ha considerato l'equazione ellittica lineare del secondo ordine in due

(1) A compensare quasi questa scarsità di rocce silicee organogene si sono avute invece vaste ed intense silicizzazioni, specialmente nei calcari paleozoici, dovute alle soluzioni al seguito dell'intrusione granitica ercinica, subordinatamente anche nei sedimenti terziari al seguito del vulcanismo trachitico.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) R. CACCIOPPOLI, *Sui teoremi di esistenza di Riemann*. « Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. », Napoli (4), 4, 49-54 (1934) e « Annali Scuola Norm. Sup. », Pisa (2), 7, 177-187 (1938).

(2) G. CIMMINO, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*. « Annali Scuola Norm. Sup. », Pisa (2), 7, 73-96 (1938); *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. « Rend. Circolo Mat. », Palermo, t. LXI, 177-221 (1937); *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson*. « Rend. Sem. Mat. », Padova, 11, 28-89 (1940).

variabili su una superficie chiusa; problemi generalizzati di Dirichlet e di Neumann per l'equazione di Laplace in due variabili con dati al contorno sommabili, imponendo alla soluzione di assumerli in media di un certo ordine; l'estensione del medesimo problema generalizzato di Dirichlet per la più generale equazione ellittica del secondo ordine lineare in due variabili e per l'equazione di Poisson in un numero qualsiasi di variabili.

Recentemente C. Miranda⁽³⁾, servendosi dei potenziali generalizzati, ha trattato il problema di Dirichlet per le funzioni armoniche, congetturando che si potesse, sulla base dei lavori di G. Cimmino, trattare il problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare di tipo ellittico del secondo ordine.

Scopo della presente Nota è appunto la trattazione di tale problema col metodo di G. Cimmino. Noi abbiamo largheggiato nelle ipotesi e ci siamo limitati al più semplice problema di valori al contorno, ma apparirà chiaro come si possano analogamente trattare problemi più generali, per esempio di tipo misto, in un numero qualsiasi di variabili. L'applicazione del metodo si realizza mediante una opportuna modifica di una formola di media caratteristica per le soluzioni dell'equazione che interessa, siano queste intese in un senso ordinario o generalizzato, la quale gioca costantemente un ruolo fondamentale. Questa modifica rivela la propria efficacia in due direzioni: da una parte permette di scegliere, secondo le esigenze del caso, certi spazi funzionali più ampi di quelli considerati nelle ricerche di G. Cimmino; dall'altra si presta ad essere estesa ad equazioni d'ordine superiore e a sistemi, a differenza della formola di media usata nei lavori citati. Anzi, qualora ci si ponga su una superficie chiusa, il che permette di prescindere dai dati al contorno, si possono facilmente estendere alle equazioni lineari di tipo ellittico di ordine $2n$ e a una vasta classe di sistemi, i risultati conseguiti da G. Cimmino per l'equazione del secondo ordine. Questa estensione è l'oggetto di un'altra Nota⁽⁴⁾ alla quale rimandiamo per i dettagli delle dimostrazioni qui solamente abbozzate.

1. Sia A un campo limitato del piano x, y . Si consideri l'equazione ellittica

$$(1) \quad \mathcal{L}[u] = \sum_{0 \leq h+k \leq 2} a_{hk}(x, y) \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k} = f(x, y)$$

nell'ipotesi che in $A + FA$ i coefficienti a_{hk} siano funzioni continue con le derivate d'ordine $\leq h+k$ e la $\sum_{h+k=2} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$ sia una forma quadratica definita positiva.

Supponiamo ancora che la FA sia costituita da una sola curva regolare semplice chiusa della quale sia $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leq s \leq L$ una rappresentazione parametrica regolare. L'ipotesi che $A + FA$ sia un dominio semplicemente connesso non è affatto restrittiva; allo stesso modo, come apparirà chiaro dal seguito, si può trattare il caso più generale che tale dominio sia più volte connesso.

(3) C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*. « Atti Acc. Naz. Lincei », (8), 3, 55-59 (1947).

(4) B. PINI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine $2n$ di tipo ellittico e sui sistemi ellittici di equazioni lineari del secondo ordine sopra una superficie chiusa*, in corso di stampa.

Date due funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(s)$ continue rispettivamente in A e su $0 \leq s \leq L$, trattiamo il problema ordinario di Dirichlet:

Determinare una funzione $u(x, y)$ continua in $A + FA$ e dotata delle derivate prime e seconde continue in A tale che

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[u] = f & \text{in } A \\ u = \varphi & \text{su } FA. \end{cases}$$

Supponiamo che per il problema (2) e per l'aggiunto omogeneo sia soddisfatto un teorema di unicità e supponiamo, per semplicità, $a_{00}(x, y) \leq 0$; in tale ipotesi per una soluzione dell'equazione $\mathcal{L}[u] = f$ sussiste la formola di maggiorazione ⁽⁵⁾

$$(3) \quad |u| \leq \max_{FA} |u| + c \text{ estr. sup}_A |f|$$

(dove c è una costante positiva che però non interessa esplicitare). Nelle righe che seguono proveremo l'esistenza della soluzione. Ciò sarà fatto in ipotesi più restrittive di quelle ora specificate. Precisamente supporremo che i coefficienti di \mathcal{L} siano prolungabili in CA con lo stesso grado di regolarità indicato, e in A siano, di più, continui con le derivate prime e seconde tutti i coefficienti di \mathcal{L} e del suo aggiunto \mathcal{M} , e una analoga ipotesi faremo per la funzione f . Per quanto riguarda la FA , supporremo che la curva semplice chiusa che la costituisce sia dotata di tangente e curvatura continue. Queste ipotesi sono alquanto restrittive ma comode perchè permettono di utilizzare direttamente risultati già acquisiti; esse sono senz'altro riducibili ma qui non interessa stabilire in quale misura.

2. Indichiamo con Σ lo spazio funzionale delle coppie di funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(s)$, le prime misurabili e, a prescindere dai punti di un insieme di misura nulla, limitate in A , le seconde continue su $(0, L)$; con $\Sigma_{\mathcal{L}}$ il sottospazio delle coppie $\mathcal{L}[v]$, $v(x(s), y(s))$, con v funzione continua con le derivate prime e seconde; con Σ' lo spazio, duale di Σ , delle coppie $F(x, y)$, $\Phi(s)$ rispettivamente sommabili in A e a variazione limitata su $(0, L)$.

Proveremo il seguente teorema di completezza:

Se F, Φ è un elemento di Σ' per cui il funzionale lineare

$$(4) \quad \iint_A \mathcal{L}[v] F dP + \int_0^L v d\Phi$$

è nullo qualunque sia l'elemento $\mathcal{L}[v]$, v di $\Sigma_{\mathcal{L}}$, allora F, Φ è l'elemento nullo del relativo spazio funzionale.

In base a un noto teorema di Hahn-Banach-Ascoli segue che lo spazio $\Sigma_{\mathcal{L}}^*$, ottenuto da $\Sigma_{\mathcal{L}}$ aggregando a questo le coppie limiti secondo la metrica relativa, coincide con Σ . Pertanto, data una coppia f, φ di Σ , si potrà trovare una succes-

(5) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, 1940, p. 694 e sgg.

sione $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ di funzioni continue con le derivate prime e seconde, tale che

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{estr. sup}_A |f - \mathcal{L}[v_n]| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{FA} |\varphi - v_n| = 0,$$

dove la notazione $\text{estr. sup}_A |\psi|$ sta propriamente ad indicare lo *pseudo estremo superiore*, cioè l'estremo inferiore dei valori di M per cui si ha, quasi-dappertutto in A , $|\psi| \leq M$.

La dimostrazione di questo teorema poggia su una certa proprietà di media.

Indicando con P e Q i punti (x, y) e (ξ, η) , poniamo

$$U(P, Q) = \lg [a_{02}(Q)(x - \xi)^2 - 2a_{11}(Q)(x - \xi)(y - \eta) + a_{20}(Q)(y - \eta)^2]$$

e

$$(6) \quad U^*(P, Q) = U(P, Q) + \\ + \iint_A \frac{U(P, S)}{4\pi\sqrt{\Delta(S)}} \left(\mathcal{L}[U(S, Q)] + \iint_A \frac{\mathcal{L}[U(S, T)] \mathcal{L}[U(T, Q)]}{4\pi\sqrt{\Delta(T)}} dT \right) dS$$

dove $\Delta = a_{02}a_{20} - a_{11}^2$ e s'intende che l'operatore \mathcal{L} applicato a una funzione dipendente da due punti, operi sempre sulle coordinate del primo. La funzione (6), continua, per $P \equiv Q$, rispetto a P e Q , per $P \rightarrow Q$ si comporta come la soluzione fondamentale; cioè le derivate prime e seconde (rispetto a x e y) sono infinite rispettivamente del primo e del secondo ordine rispetto ad $1/\overline{PQ}$, mentre $\mathcal{L}[U^*]$ non presenta un infinito d'ordine maggiore di uno; anzi, a causa della presenza del potenziale di area, $\mathcal{L}[U^*]$ è addirittura privo di qualsiasi singolarità ⁽⁶⁾.

Consideriamo ora una famiglia di circuiti attorno a Q , riducibili al punto Q stesso, per esempio delle circonferenze col centro in Q . Indichiamo con γ uno

(6) In base a certi risultati dovuti a E. E. LEVI (*Sulle equazioni totalmente ellittiche alle derivate parziali*. «Rend. Circolo Mat. di Palermo», t. XXIV (1907), 275-317, in particolare pp. 286-291), se la funzione $f(P)$ è continua in A , esclusi al più certi punti, in numero finito, ove diventa infinita d'ordine non superiore ad uno, la funzione

$$W(P) = \iint_A U(P, Q) f(Q) dQ$$

è continua; le derivate prime si ottengono derivando sotto il segno di integrale in ogni punto P ove f è finita e nei punti ove f è infinita queste derivate presentano al più un infinito logaritmico; le derivate seconde esistono in ogni punto P ove $f(P)$ verifica una condizione di Hölder e riesce

$$\mathcal{L}[W] = \iint_A \mathcal{L}[U(P, Q)] f(Q) dQ - 4\pi\sqrt{\Delta(P)} f(P).$$

Attualmente si ha

$$\mathcal{L}[U^*] = \iint_A \frac{\mathcal{L}[U(P, S)]}{4\pi\sqrt{\Delta(S)}} \iint_A \frac{\mathcal{L}[U(S, T)] \mathcal{L}[U(T, Q)]}{4\pi\sqrt{\Delta(T)}} dT dS,$$

funzione priva di singolarità (cfr. E. E. LEVI, loc. cit., p. 292).

di questi, scelto in modo tale che il dominio limitato \mathfrak{D} che ha γ per completa frontiera, sia contenuto in A . Indichiamo con $\bar{U}(P, Q)$ una funzione *compensatrice al contorno*, cioè continua con le derivate prime e seconde tale che, su γ , $U^* - \bar{U}$ si annulli insieme alle derivate prime e seconde e tale, inoltre, che $\mathfrak{L}[\bar{U}]$ sia dotata delle derivate prime e seconde continue rispetto a ξ ed η , e

$$(7) \quad V = U^* - \bar{U}$$

abbia segno costante, almeno per \mathfrak{D} abbastanza piccolo (7).

Ebbene:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $v(Q)$, continua con le derivate prime e seconde, sia in A soluzione dell'equazione $\mathfrak{N}[v] = 0$ è che in ogni punto Q di A verifichi la relazione

$$(8) \quad v(Q) = \frac{-1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} v(P) \mathfrak{L}[V(P, Q)] dP$$

almeno per tutti i \mathfrak{D} abbastanza piccoli.

Supposta v soluzione dell'equazione, dalla formola di reciprocità, procedendo al solito modo, si deduce la (8). Inversamente, supposta valida la (8), avendosi

$$v(Q) = \frac{-1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} (v(P) \mathfrak{L}[V(P, Q)] - V(P, Q) \mathfrak{N}[v(P)]) dP,$$

per sottrazione dalla (8) si deduce

$$\iint_{\mathfrak{D}} V(P, Q) \mathfrak{N}[v(P)] dP = 0,$$

manifestamente assurda se $\mathfrak{N}[v] \neq 0$ in Q e \mathfrak{D} è sufficientemente piccolo.

Chiameremo la (8) *proprietà di media* relativa all'equazione $\mathfrak{N}[v] = 0$.

Evidentemente si possono stabilire infinite proprietà di media. Così nelle ricerche di G. Cimmino viene usata quella proprietà di media cui si perviene scegliendo come curve γ le ellissi

$$a_{02}(Q)(x - \xi)^2 - 2a_{11}(Q)(x - \xi)(y - \eta) + a_{20}(Q)(y - \eta)^2 = \rho^2$$

e prendendo la funzione $\lg r/\rho$ al posto di $U^*(P, Q)$. Senonchè qualora ci si limiti, con una tale scelta, al primo addendo nell'espressione di U^* , poichè $\mathfrak{L}[U]$ presenta un infinito del primo ordine per $P \equiv Q$, lo spazio Σ' deve essere quello delle funzioni sommabili con una potenza di esponente > 2 . Ciò è sufficiente per la trattazione del problema generalizzato considerato da G. Cimmino, ma non lo è

(7) Tutte le condizioni specificate si soddisfano facilmente per esempio scegliendo per γ una circonferenza col centro in Q e raggio r e ponendo

$$V(P, Q) = U^*(P, Q) \left(1 - \frac{\overline{PQ}^5}{r^5}\right)^3.$$

più qualora si voglia trattare il problema ordinario; in questo caso infatti occorre, per Σ' , uno spazio più ampio di quello ora indicato. Orbene, basta l'addizione del potenziale di area costituente il secondo addendo nell'espressione di U^* perchè $\mathcal{L}[U^*]$ sia priva di singolarità e si possa perciò scegliere Σ' così come occorre. D'altra parte la funzione $\lg r/\rho$ si annulla per $r = \rho$, ma non altrettanto avviene delle derivate prime; pertanto la formola di media si può, almeno inizialmente, stabilire solo in forma periferico-superficiale. Invece la compensazione al contorno, indicata nel presente lavoro, opera, diciamo così, non solo sulla funzione ma anche sulle sue derivate prime e seconde e ciò è utile non solo perchè la formola di media si può stabilire rapidamente in forma superficiale su domini a contorno arbitrario, ma anche perchè, più tardi, nella prova del teorema di completezza, si può scegliere in modo assai semplice una certa successione di funzioni.

Nelle righe che precedono abbiamo provato che la (8) è caratteristica per le soluzioni dell'equazione $\mathfrak{M}[v] = 0$, continue con le derivate prime e seconde. Si può però dimostrare che:

Se i coefficienti di \mathcal{L} e di \mathfrak{M} sono continui con le derivate prime e seconde, una funzione $v(P)$, supposta soltanto sommabile, la quale verifichi in ogni punto di A la (8) per tutti i \mathfrak{D} abbastanza piccoli, risulta, in conseguenza, dotata delle derivate prime e seconde continue e quindi soluzione dell'equazione $\mathfrak{M}[v] = 0$.

Le ipotesi sono alquanto restrittive ma comode per una più rapida dimostrazione per la quale però rimandiamo al primo dei lavori di G. Cimmino citati in (2).

3. Ciò posto, passiamo alla dimostrazione del teorema di completezza enunciato.

Fissiamo un punto Q in A e un intorno circolare di raggio r , da assumere come \mathfrak{D} . Consideriamo le funzioni

$$(9) \quad v_\mu = \begin{cases} V(P, Q) \left[1 - \left(1 - \frac{\overline{PQ}^3}{r^3} \right)^\mu \right] & \text{per } \overline{PQ} \leq r, \quad \mu = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{per } \overline{PQ} \geq r \end{cases}$$

le quali sono continue con le derivate prime e seconde in tutto il piano x, y .

Se r è scelto in modo tale che sia $\mathfrak{D} \subset A$, per l'ipotesi del teorema di 2, risulta

$$\iint_{\mathfrak{D}} F \mathcal{L}[v_\mu] dP = 0.$$

Da questa si deduce

$$\iint_{\mathfrak{D} - C_\varepsilon} \mathcal{L}[v_\mu] F(P) dP = - \iint_{C_\varepsilon} \mathcal{L}[v_\mu] F(P) dP,$$

essendo C_ε un cerchio di raggio ε interno a \mathfrak{D} e col centro in Q . Poniamo

$$\iint_{C_\varepsilon} \mathcal{L}[v_\mu] F dP = F(Q) \iint_{C_\varepsilon} \mathcal{L}[v_\mu] dP + \iint_{C_\varepsilon} [F(P) - F(Q)] \mathcal{L}[v_\mu] dP.$$

Per la formola di reciprocità è

$$\iint_{C_\varepsilon} (\mathfrak{L}[v_\mu] - v_\mu \mathfrak{N}[1]) dP = \int_{\gamma_\varepsilon} (M dy - N dx)$$

dove $\gamma_\varepsilon \equiv FC_\varepsilon$ ed M, N hanno un noto significato; sicchè

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{D}-C_\varepsilon} F(P) \mathfrak{L}[v_\mu] dP &= -F(Q) \left[\iint_{C_\varepsilon} \bar{a}_{00}(P) v_\mu dP + \int_{\gamma_\varepsilon} (M dy - N dx) \right] - \\ &- \iint_{C_\varepsilon} [F(P) - F(Q)] \mathfrak{L}[v_\mu] dP^{(8)}. \end{aligned}$$

Passiamo ora al limite per $\mu \rightarrow \infty$ e poi per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si riconosce facilmente che

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{D}} F(P) \mathfrak{L}[V(P, Q)] dP = \\ = 4\pi \sqrt{\Delta(Q)} F(Q) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \iint_{C_\varepsilon} [F(P) - F(Q)] \mathfrak{L}[v_\mu] dP. \end{aligned}$$

Il limite a secondo membro, almeno per Q quasi-dappertutto in A , è nullo. Per i particolari della dimostrazione rimandiamo alla Nota citata in ⁽⁴⁾.

Pertanto si ha, quasi-dappertutto in A , che la funzione F verifica la proprietà di media

$$(10) \quad F(Q) = \frac{-1}{4\pi \sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} F(P) \mathfrak{L}[V(P, Q)] dP$$

e quindi differirà al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione regolare di $\mathfrak{N}[v] = 0$.

Esaminiamo ora il comportamento di F sulla FA . Ripetendo il ragionamento già fatto ma prendendo r così grande che sia $\mathfrak{D} \supset A + FA$ ⁽⁹⁾, si ottiene

$$(11) \quad F(Q) = \frac{-1}{4\pi \sqrt{\Delta(Q)}} \left(\iint_A F(P) \mathfrak{L}[V(P, Q)] dP + \int_0^L V(P(s), Q) d\Phi(s) \right),$$

$$P(s) \equiv (x(s), y(s)).$$

(8) \bar{a}_{00} indica il coefficiente di u in $\mathfrak{N}[u]$.

(9) Per l'ipotesi che i coefficienti di \mathfrak{L} siano prolungabili in CA con lo stesso ordine di regolarità specificato all'inizio, la U^* di (6) si può modificare sostituendo ad A un campo più ampio, per esempio contenente tutti i cerchi che hanno il centro sulla FA e hanno per raggio il massimo diametro di A .

Se invece il punto Q si prende esternamente ad $A + FA$, si ha

$$(12) \quad 0 = \iint_A F(P) \mathcal{L}[V(P, Q)] dP + \int_0^L V(P(s), Q) d\Phi(s).$$

Sia ora Q un punto di FA ; indichiamo con Q_+ e Q_- i punti rispettivamente sulla normale interna e su quella esterna in Q a FA e a distanza δ da Q . Dalle (11) e (12) si trae

$$F(Q_+) = \frac{-1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q_+)}} \left(\iint_A F(P) \mathcal{L}[V(P, Q_+) - V(P, Q_-)] dP + \int_0^L [V(P(s), Q_+) - V(P(s), Q_-)] d\Phi(s) \right).$$

L'integrale doppio converge manifestamente a zero per $\delta \rightarrow 0$. Per il secondo integrale basta esaminare il comportamento dell'integrale

$$\int_0^L [U(P(s), Q_+) - U(P(s), Q_-)] d\Phi(s)$$

o, ciò ch'è lo stesso, dell'integrale

$$\int_0^L \lg \frac{\overline{PQ_+}}{\overline{PQ_-}} d\Phi(s).$$

Orbene, poichè la FA è dotata di curvatura continua, ad ogni punto Q di essa potremo associare un intorno I di raggio ρ in modo che, per un fissato $\epsilon > 0$, sia

$$|\cos \varphi| = |\cos(Q_+ Q_-, QP)| < \frac{\epsilon}{2 + \epsilon}$$

qualunque sia il punto P di $I \cdot FA$ e qualunque sia Q di FA . Pertanto $|\overline{PQ_+}^2 / \overline{PQ_-}^2 - 1|$, ponendo $d = \overline{PQ}$, risulta eguale a $(4d\delta|\cos \varphi|)/(d^2 + \delta^2 - 2d\delta\cos \varphi) \leq (4d\delta|\cos \varphi|)/(2d\delta - 2d\delta\cos \varphi) \leq (2|\cos \varphi|)/(1 - |\cos \varphi|) < \epsilon$ per $P \in FA \cdot I$, mentre risulta $< \epsilon$ per $P \in FA \cdot CI$ non appena sia δ abbastanza piccolo. Pertanto si ha uniformemente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lg \frac{\overline{PQ_+}}{\overline{PQ_-}} = 0$$

e quindi $F(Q)$ tende a zero per Q tendente comunque in A a un punto della FA .

Ma il problema

$$\begin{cases} \Re[v] = 0 & \text{in } A \\ v = 0 & \text{su } FA \end{cases}$$

ha la sola soluzione regolare nulla. Pertanto $F(Q)$ riesce quasi-dappertutto nullo in $A + FA$.

Dopo di ciò riesce

$$\int_0^L v d\Phi = 0$$

qualunque sia la funzione continua v , e ciò richiede che Φ differisca dal suo valor medio su $(0, L)$ al più in una infinità numerabile di punti.

Con ciò il teorema di completezza è provato.

4. Sia ora $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ la successione di funzioni continue con le derivate prime e seconde per cui sussistono le (5).

Poichè v_n è soluzione regolare di $\mathcal{L}[v] = \mathcal{L}[v_n]$, in base alla formola di maggiorazione (3) si riconosce che la detta successione converge uniformemente in $A + FA$ verso una funzione continua, v^* .

Ora in 2 abbiamo stabilito una formola di media caratteristica per le soluzioni di $\mathfrak{M}[v] = 0$. In modo del tutto analogo si può stabilire la seguente formola di media, caratteristica per le soluzioni dell'equazione $\mathcal{L}[u] = f$:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} (Vf - u\mathfrak{M}[V]) dP.$$

Pertanto dalle

$$v_n(Q) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} (V\mathcal{L}[v_n] - v_n\mathfrak{M}[V]) dP \quad n = 1, 2, \dots$$

si deduce, al limite per $n \rightarrow \infty$,

$$v^*(Q) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\Delta(Q)}} \iint_{\mathfrak{D}} (Vf - v^*\mathfrak{M}[V]) dP,$$

da cui, nell'ipotesi che f sia dotata delle derivate prime e seconde continue ⁽¹⁰⁾, segue che v^* è soluzione regolare di $\mathcal{L}[u] = f$.

Con ciò resta provata l'esistenza della soluzione per il problema di Dirichlet.

(10) Questa ipotesi è fatta per potersi richiamare direttamente al risultato di G. CIMMINO relativo all'equazione $\mathcal{L}[u] = f$, che è stato riportato in 2 per l'equazione $\mathfrak{M}[v] = 0$.

Analisi Matematica. — *Alcune limitazioni per gl'integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico* (*). Nota di CARLO PUCCI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota sono stabilite due semplici limitazioni quantitative per gl'integrali di equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico e la seconda limitazione è data relativamente a condizioni alla frontiera per le quali non sono note altre formule di maggiorazione (1).

a) Indichiamo con X un punto di uno spazio euclideo S_r a r dimensioni, $r \geq 2$ (2), e con x_1, x_2, \dots, x_r le coordinate di X . Indichiamo con A un campo, cioè un insieme aperto di punti di S_r , e con FA l'insieme dei punti frontiera di A facendo l'ipotesi che in ogni punto di FA sia definito un asse l penetrante in A e diretto verso l'interno di A (3). Indichiamo infine con Γ la classe di funzioni continue insieme alle loro derivate parziali prime in $A + FA$ e che possiedono derivate parziali del secondo ordine continue in A .

TEOREMA I. — *Supponiamo che esista una funzione $u(X)$, appartenente alla classe Γ , che sia un integrale in A dell'equazione differenziale*

$$(1) \quad \sum_{h,k} a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(X) u = f(X)$$

e che soddisfi su FA le condizioni alla frontiera

$$(2) \quad \alpha(X) \frac{du}{dl} + \beta(X) u = \gamma(X),$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) Altre limitazioni relative ad integrali di equazioni differenziali dello stesso tipo di quelle qui considerate sono state date sotto varie ipotesi nelle seguenti pubblicazioni: M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali di equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (6), 5, pp. 138-143 (1927); M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*. «Ann. Mat. pura e appl.» (4), 7, pp. 145-192 (1929); M. PICONE, *Nuove formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (6), 28, pp. 331-338 (1938); M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*. Napoli, 1940, pp. 694-710; C. MIRANDA, *Sulla proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (8), 10, pp. 117-120 (1951).

(2) Il caso $r = 1$ è già stato studiato in una Memoria in corso di pubblicazione sugli «Ann. di Mat. pura e appl.», 1951, C. PUCCI, *Formule di maggiorazione per l'integrale di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine che soddisfa le condizioni ai limiti di Sturm*.

(3) Ricordiamo che un asse l passante da un punto X della frontiera FA si dice penetrante in A se esiste su di esso un punto Y tale che i punti interni al segmento XY appartengono ad A .

ove $f(X)$, $c(X)$, $b_h(X)$, $a_{hk}(X)$, per $h, k = 1, 2, \dots, r$, sono funzioni reali definite in A e $\alpha(X)$, $\beta(X)$, $\gamma(X)$ sono funzioni reali definite in FA . Se l'equazione differenziale (1) è in A di tipo ellittico-parabolico non negativo ⁽⁴⁾ e se è

$$(3) \quad c(X) < 0 \quad \text{per} \quad X \in A,$$

$$(4) \quad \alpha(X)\beta(X) \leq 0, \quad \beta(X) \neq 0 \quad \text{per} \quad X \in FA,$$

sussiste in $A + FA$ la seguente limitazione:

$$\min \left\{ \min_A \left[\frac{b}{c} \right], \min_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} \leq u(X) \leq \max \left\{ \max_A \left[\frac{b}{c} \right], \max_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} \quad (5).$$

Indichiamo con Y il punto di $A + FA$ ove $u(X)$ assume il suo valore massimo. Supponiamo da prima che Y appartenga ad A . È allora

$$(5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} = 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, r,$$

e la forma quadratica

$$\sum_{hk}^{1r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} dx_h dx_k$$

è definita o semidefinita negativa. Essendo per ipotesi definita o semidefinita positiva la forma quadratica

$$\sum_{hk}^{1r} a_{hk}(Y) \lambda_h \lambda_k$$

per un teorema di Moutard ⁽⁶⁾ è

$$(6) \quad \sum_{hk}^{1r} a_{hk}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} \leq 0.$$

Per la (3) possiamo dividere primo e secondo membro della (1) per $c(X)$ e per la (5) è

$$u(Y) = \frac{b(Y)}{c(Y)} - \frac{1}{c(Y)} \sum_{hk}^{1r} a_{hk}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{Y=X},$$

(4) Ricordiamo che l'equazione differenziale (1) si dice di tipo ellittico-parabolico non negativo in A se per ogni punto X di A la forma quadratica $\sum_{hk}^{1r} a_{hk}(X) \lambda_h \lambda_k$ negli r parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ è definita o semidefinita positiva. Potendo quindi essere anche identicamente nulle le funzioni $a_{hk}(X)$ in ogni punto di A il teorema sussiste pure per equazioni differenziali del primo ordine.

(5) Indichiamo con $\max_I [f]$ il massimo valore assunto dalla funzione $f(X)$ per X variabile nell'insieme I .

Osserviamo che questo teorema sussiste pure se la (1) è di tipo ellittico-parabolico non positivo e $c(X) > 0$ in A . Moltiplicando infatti per -1 il primo e secondo membro dell'equazione (1) si torna nelle ipotesi del teorema enunciato.

Notiamo infine che la disuguaglianza stabilita è una effettiva limitazione per $u(X)$ solo se sono finite le quantità $\min_A [b/c]$, $\min_{FA} [\gamma/\beta]$, $\max_A [b/c]$, $\max_{FA} [\gamma/\beta]$.

(6) Cfr. ad esempio M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Napoli, 1940, p. 695.

e per la (3) e la (6)

$$(7) \quad u(Y) \leq \frac{b(Y)}{c(Y)} \leq \max_A \left[\frac{b}{c} \right].$$

Supponiamo ora che il punto Y sia sulla frontiera FA . È allora

$$\left(\frac{du}{dl} \right)_{X=Y} \leq 0,$$

e dalla (2) per la (4)

$$(8) \quad u(Y) = \frac{\gamma(Y)}{\beta(Y)} - \frac{\alpha(Y)}{\beta(Y)} \left(\frac{du}{dl} \right)_{X=Y} \leq \frac{\gamma(Y)}{\beta(Y)} \leq \max_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right].$$

Per la definizione di Y dalla (7) e dalla (8) segue

$$u(X) \leq u(Y) \leq \max \left\{ \max_A \left[\frac{b}{c} \right], \max_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\}$$

per X variabile in $A + FA$.

Per dimostrare anche la limitazione inferiore di $u(X)$ basta osservare che è

$$(9) \quad \sum_{hk} a_{hk}(X) \frac{\partial^2 (-u)}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial (-u)}{\partial x_h} + c(X)(-u) = -f(X) \quad \text{per } X \in A,$$

$$\alpha(X) \frac{d(-u)}{dl} + \beta(X)(-u) = -\gamma(X) \quad \text{per } X \in FA,$$

e per quanto è stato precedentemente dimostrato è

$$\begin{aligned} -u(X) &\leq \max \left\{ \max_A \left[\frac{-b}{c} \right], \max_{FA} \left[\frac{-\gamma}{\beta} \right] \right\} = \\ &= \max \left\{ -\min_A \left[\frac{b}{c} \right], -\min_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} = -\min \left\{ \min_A \left[\frac{b}{c} \right], \min_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\}, \\ u(X) &\geq \min \left\{ \min_A \left[\frac{b}{c} \right], \min_{FA} \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

per X variabile in $A + FA$.

b) Indichiamo con D un dominio di S_r e con FD la sua frontiera e supponiamo che per ogni punto X di FD sia definito un asse l passante per X e penetrante in $D - FD$ e tale che ogni asse λ passante per X e formante con l un angolo inferiore a $\pi/2$, penetri esso pure in $D - FD$ (7). Indichiamo con Γ^i la classe delle funzioni continue in D insieme alle loro derivate parziali del primo e secondo ordine.

TEOREMA II. - Supponiamo che esista una funzione $u(X)$, appartenente alla classe Γ^i , che sia una soluzione in D dell'equazione differenziale

$$(1) \quad \sum_{hk} a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(X)u = f(X),$$

(7) Notiamo che se nel punto X è definito un iperpiano tangente a FD e quindi una normale n a FD , ogni asse λ passante per X e formante con n un angolo inferiore a $\pi/2$ penetra in D . Quindi il dominio D soddisferà in particolare alle ipotesi dichiarate se FD ammette in ogni punto iperpiano tangente.

ove $f(X)$, $c(X)$, $b_h(X)$, $a_{hk}(X)$, con $h, k = 1, 2, \dots, r$, sono funzioni reali definite in D , e che soddisfatti alle condizioni alla frontiera

$$(10) \quad \frac{du}{dl} = 0.$$

Se l'equazione differenziale (1) è di tipo ellittico-parabolico non negativo non degenera⁽⁸⁾ e se è

$$(11) \quad c(X) < 0 \quad \text{per } X \in D$$

sussiste in D la seguente limitazione

$$\min_D \left[\frac{b}{c} \right] \leq u(X) \leq \max_D \left[\frac{b}{c} \right].$$

Indichiamo con Y il punto di D ove $u(X)$ assume il suo valore massimo e supponiamo da prima che Y sia su FD .

Siccome un cambiamento delle variabili indipendenti mediante una sostituzione lineare muta l'equazione differenziale (1) in un'altra pure di tipo ellittico-parabolico non negativo⁽⁹⁾ e siccome anche nelle nuove variabili sussiste la (10) essendo l'asse l definito in ogni punto di FD indipendentemente dal sistema di riferimento, senza alterare le generalità della dimostrazione si può supporre per semplicità che l'asse l definito nel punto Y e l'asse x_r siano paralleli e concordi.

Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ r numeri reali che fissiamo arbitrariamente con l'unica condizione $\lambda_r > 0$. Indichiamo con λ la retta passante per Y di coseni direttori

$$\cos \hat{\lambda} x_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Essendo l'asse l definito in Y e l'asse x_r paralleli e concordi ed essendo $\lambda_r > 0$ è $\cos \hat{\lambda} x_r = \cos \hat{\lambda} l > 0$ e cioè la retta λ , formando un angolo acuto con il considerato asse l , per ipotesi penetra in $D - FD$ nel punto Y . Si può determinare perciò un numero positivo ε sufficientemente piccolo in modo che il punto $T = (y_1 + \tau \lambda_1, y_2 + \tau \lambda_2, \dots, y_r + \tau \lambda_r)$ sia interno a D per $0 \leq \tau \leq \varepsilon$.

Si ha quindi

$$u(T) - u(Y) = \sum_{h=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} \tau \lambda_h \leq 0,$$

ove T' indica un punto del segmento YT e quindi di D . Potendo essere τ arbitrariamente piccolo e quindi i punti T e T' prossimi quanto si vuole al punto Y , per la continuità in D delle derivate prime di $u(X)$, è

$$\sum_{h=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} \lambda_h \leq 0.$$

(8) Diciamo che l'equazione differenziale (1) non è degenera se le funzioni $a_{hk}(X)$, per $h, k = 1, 2, \dots, r$, non si annullano mai simultaneamente in alcun punto X di D .

(9) M. PICONE, op. cit. (6), pp. 657-658.

Per la (10) e il parallelismo dell'asse x_r e dell'asse l definito in Y è

$$(12) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_r} \right)_{X=Y} = 0$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^{r-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} \lambda_h \leq 0.$$

Dovendo tale relazione essere verificata comunque si fissino gli $r-1$ numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ deve necessariamente sussistere il solo segno $=$ e deve essere

$$(13) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} = 0, \quad h = 1, 2, \dots, r.$$

Per la (12) e (13) si ha allora con le solite notazioni e la condizione $\lambda_r > 0$

$$u(T) - u(Y) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=T'} \tau^2 \lambda_h \lambda_k \leq 0.$$

Potendo essere τ arbitrariamente piccolo e quindi i punti T e T' prossimi quanto si vuole al punto Y per la continuità in D delle derivate parziali seconde di $u(X)$ è

$$(14) \quad \sum_{h,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} \lambda_h \lambda_k \leq 0$$

ove i numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sono arbitrari e il numero λ_r è positivo. Cambiando di segno tutti i numeri λ_h la relazione (14) rimane inalterata e quindi essa sussiste anche per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ qualsiasi e λ_r negativo. La (13) sussiste perciò per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ qualsiasi e λ_r positivo o negativo, ma allora per continuità la (13) sussiste pure per $\lambda_r = 0$ e quindi in conclusione si è provato che la forma quadratica (13) è definita o semidefinita negativa. Essendo per ipotesi definita o semidefinita positiva la forma quadratica

$$\sum_{h,k} a_{h,k}(Y) \lambda_h \lambda_k,$$

per un già citato teorema ⁽¹⁰⁾ e per la (14) è

$$(15) \quad \sum_{h,k} a_{h,k}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} \leq 0.$$

Allora dalla (1) per la (11) e le (12), (13) si ha

$$u(Y) = \frac{b(Y)}{c(Y)} - \frac{1}{c(Y)} \sum_{h,k} a_{h,k}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y},$$

e per la (11) e la (15)

$$(16) \quad u(Y) \leq \frac{b(Y)}{c(Y)} \leq \max_D \left[\frac{b}{c} \right].$$

Nel caso invece che il punto Y , di massimo per $u(X)$ in D , sia interno a D , sussistono evidentemente le (12), (13), (14) per le proprietà di punto di massimo e da tali relazioni per la dimostrazione già svolta segue la (15) e poi la (16). La (16) sussiste quindi sia per Y appartenente ad FD , sia per Y interno a D , e perciò dalla definizione di Y segue

$$u(X) \leq u(Y) \leq \max_D \left[\frac{b}{c} \right].$$

Per dimostrare anche la limitazione inferiore di $u(X)$ data dal teorema basta considerare la funzione $-u(X)$ che soddisfa in D alla (9) e su FD alla (10). Per quanto abbiamo ora dimostrato è

$$\begin{aligned} -u(X) &\leq \max_D \left[\frac{-b}{c} \right] \leq -\min_D \left[\frac{b}{c} \right], \\ u(X) &\geq \min_D \left[\frac{b}{c} \right]. \end{aligned}$$

Analisi matematica. — *Sulle funzioni epicicloidali e alcune nuove relazioni fra le funzioni di Bessel.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

1. La considerazione di alcuni problemi di Fisica matematica come quello delle vibrazioni di una membrana con contorno epicicloidale fisso, della propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico indefinito, la cui sezione retta è limitata da una epicicloide, e della conduzione del calore in un cilindro omogeneo, anch'esso di sezione epicicloidale, mi ha condotto, in una Memoria in corso di stampa negli « Annali di Matematica », allo studio di una nuova classe di funzioni che ho chiamate *funzioni epicicloidali*.

I problemi a cui ho accennato conducono tutti alla ricerca di soluzioni $u(\rho, \varphi)$ dell'equazione differenziale

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 n^2 a^2 [1 + 2c\rho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + c^2 \rho^{2(n-1)}] u = 0,$$

regolari per $\rho = 0$, e con assegnata condizione per $\rho = 1$.

Essa non è altro che la trasformata dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0,$$

ove λ è un parametro, mediante le formule

$$x = na\rho \cos \varphi + b\rho^n \cos n\varphi, \quad y = na\rho \sin \varphi + b\rho^n \sin n\varphi,$$

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

che danno la rappresentazione conforme, sopra un cerchio di raggio $\rho = 1$, del campo interno ad una epicicloide con $n - 1$ lobi descritta da un punto interno ad un cerchio di raggio a rotolante esternamente sopra una circonferenza di raggio $(n - 1)a$, con n intero ≥ 2 . In esse con b ($< a$) è indicata la distanza del punto che genera l'epicicloide dal centro del cerchio rotolante ed è $c = b/a < 1$.

Ponendo

$$r = \lambda n a \rho \quad , \quad \gamma = c/(\lambda n a)^{n-1}$$

la (1) assume la forma più semplice

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + [1 + 2\gamma r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \gamma^2 r^{2(n-1)}] u = 0,$$

che non è integrabile per separazione di variabili. La (2) per $\gamma = 0$, cioè per $c = 0$, ammette soluzioni regolari per $r = 0$ della forma $J_k(r) \cos k\varphi$, $J_k(r) \sin k\varphi$, con k intero positivo ed ove $J_k(r)$ è la funzione di Bessel di 1ª specie e di ordine k . Queste considerazioni mi hanno fatto pensare di costruire delle soluzioni dell'equazione differenziale (2) che per $\gamma = 0$ si riducano proprio alle funzioni $J_k(r) \cos k\varphi$, $J_k(r) \sin k\varphi$. Sono queste soluzioni che ho chiamato funzioni epicicloidali e che ho indicato rispettivamente con $\mathcal{E}_k(r, \varphi, \gamma)$, $\mathcal{E}_k^*(r, \varphi, \gamma)$.

Nella Memoria a cui ho accennato, immaginando ciascuna di queste funzioni sviluppata in serie di potenze di γ , il cui primo termine è naturalmente $J_k(r) \cos k\varphi$, oppure $J_k(r) \sin k\varphi$, la ricerca dei coefficienti dei successivi termini dello sviluppo ha condotto all'integrazione di un sistema di infinite equazioni differenziali lineari del 2º ordine, alle derivate parziali non omogenee e di forma ricorrente. Di ognuna di queste equazioni interessava determinare un integrale particolare e il fatto rimarchevole è che questo integrale è stato assegnato, in base al principio di induzione, in modo esplicito per l'equazione generica del sistema e quindi per tutte, traendo partito dalle note formule ricorrenti delle funzioni di Bessel.

Ciascuna delle soluzioni richieste si presentava in tal modo sotto forma di una serie doppia e il fatto ancora più notevole è quello di essere riuscito a ridurla a una serie semplice, avendo potuto effettuare la somma rispetto al parametro γ .

Le soluzioni trovate risultano così espresse, in modo molto semplice ed elegante, sotto forma di serie di Fourier di soli coseni, o di soli seni, rispetto all'argomento φ , e sono precisamente

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_k(r, \varphi, \gamma) \\ \mathcal{E}_k^*(r, \varphi, \gamma) \end{cases} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \begin{cases} \cos [k + p(n-1)]\varphi \\ \sin [k + p(n-1)]\varphi \end{cases}$$

e queste serie sono assolutamente convergenti per ogni valore di r , come si riconosce facilmente in base alle note espressioni delle funzioni di Bessel.

2. In questa Nota mi limito ora a verificare come le (3) sono effettivamente soluzioni dell'equazione (2).

Invero, ponendo

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 + \gamma^2 r^{2(n-1)},$$

dalla prima delle (3) si ricava, dopo aver effettuato le semplificazioni tenendo conto dell'equazione differenziale a cui soddisfano le funzioni di Bessel:

$$D \mathcal{E}_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{2np(p-k)}{r^2} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + \right. \\ \left. + 2\gamma r^{n-1} J'_{k-p}(r) \cdot J'_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \right\} \cos [k + p(n-1)] \varphi,$$

ove l'apice sta ad indicare derivazione rispetto all'argomento chiuso fra parentesi.

Si ha inoltre

$$2 \mathcal{E}_k \cdot \cos (n-1) \varphi = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \{ \cos [k + (p+1)(n-1)] \varphi + \\ + \cos [k + (p-1)(n-1)] \varphi \} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{k-p+1}(r) J_{p-1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + \right. \\ \left. + J_{k-p-1}(r) J_{p+1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \right\} \cos [k + p(n-1)] \varphi.$$

Perciò, indicando con

$$\Delta \mathcal{E}_k = D \mathcal{E}_k + 2\gamma r^{n-1} \mathcal{E}_k \cos (n-1) \varphi$$

quello che diventa il primo membro della (2) quando in luogo di u si ponga \mathcal{E}_k , e ponendo

$$F_{p,k}(r, \gamma) = \frac{2np(p-k)}{r^2} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + 2\gamma r^{n-1} J'_{k-p}(r) J'_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + \\ + \gamma r^{n-1} J_{k-p+1}(r) J_{p-1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + \gamma r^{n-1} J_{k-p-1}(r) J_{p+1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right),$$

risulta

$$(4) \quad \Delta \mathcal{E}_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_{p,k}(r, \gamma) \cos [k + p(n-1)] \varphi.$$

Ma tenendo conto dell'identità

$$2 J'_{k-p}(r) = J_{k-p-1}(r) - J_{k-p+1}(r)$$

si ha

$$F_{p,k} = \frac{2np(p-k)}{r^2} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + \gamma r^{n-1} J_{k-p-1}(r) \left[J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) + J_{p+1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \right] - \\ - \gamma r^{n-1} J_{k-p+1}(r) \left[J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) - J_{p-1}\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \right]$$

e ricordando ancora le identità

$$(5) \quad J'_p(x) + J_{p+1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) \quad , \quad J'_p(x) - J_{p-1}(x) = -\frac{p}{x} J_p(x)$$

si ottiene

$$F_{p,k} = \frac{np}{r} J_p \left(\gamma \frac{r^n}{n} \right) \left[-\frac{2(k-p)}{r} J_{k-p}(r) + J_{k-p-1}(r) + J_{k-p+1}(r) \right],$$

ove la quantità fra parentesi quadre è nulla identicamente, in virtù di un'altra identità delle funzioni di Bessel che segue dalle (5) eliminando la $J_p(x)$.

Dunque le funzioni $F_{p,k}$ sono identicamente nulle per ogni valore degli indici p, k e la (4) porge

$$\Delta \mathcal{E}_k = 0,$$

cioè la funzione \mathcal{E}_k definita dalla prima delle (3) è soluzione della (2). In modo perfettamente analogo si verifica che è anche soluzione la \mathcal{E}_k^* .

Essendo ora C_k, C_k^* costanti arbitrarie, la soluzione generale dell'equazione differenziale (2), o della (1), regolare per $\rho = 0$, risulta

$$u = \sum_k^{\infty} (C_k \mathcal{E}_k + C_k^* \mathcal{E}_k^*).$$

Per mezzo di essa è possibile risolvere le questioni di Fisica matematica a cui ho accennato in principio e la determinazione degli autovalori del parametro λ in ognuno dei problemi ai limiti che così ne nasce, conduce alla risoluzione di una o più equazioni indipendenti, ciascuna ottenuta uguagliando a zero un determinante di ordine infinito del quale è dimostrata la convergenza nel senso di Poincaré. Gli autovalori positivi del parametro λ sono in numero infinito e ad essi corrispondono infinite autosoluzioni dell'equazione differenziale (1) formanti un sistema fondamentale di funzione di ρ, φ soddisfacenti a una determinata relazione di ortogonalità.

3. Il confronto delle soluzioni (3) con quelle da me date precedentemente sotto altra forma in una Nota pubblicata in questi « Rendiconti »⁽¹⁾, mi ha permesso ancora di stabilire delle nuove importanti relazioni fra le funzioni di Bessel, alcune delle quali comprendono, come caso particolarissimo, note formule di Neumann e di Schlöfli.

Nella detta Nota avevo messo la soluzione generale della (1) sotto la forma

$$(6) \quad u(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} A_0 J_0(\lambda n a \rho \chi) + \sum_k^{\infty} \frac{J_k(\lambda n a \rho \chi)}{\chi^k} \sum_j^k \binom{k}{j} \left(\frac{c}{n} \right)^j \rho^{(n-1)j} \{ A_k \cos[k+j(n-1)]\varphi + B_k \sin[k+j(n-1)]\varphi \},$$

(1) C. AGOSTINELLI, *Sulla determinazione degli autovalori nel problema delle vibrazioni di una membrana con contorno epicicloideale fisso*. (« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. VII, fasc. 6, a. 1949).

ove A_0, A_k, B_k sono costanti arbitrarie e nella quale si è posto

$$\chi^2 = 1 + 2 \frac{c}{n} \rho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{c^2}{n^2} \rho^{2(n-1)}.$$

Per $c=0$, risulta $\chi=1$ e la (6) porge

$$u = \frac{1}{2} A_0 J_0(\lambda n a \rho) + \sum_k J_k(\lambda n a \rho) (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$$

la quale si riduce a $J_k(\lambda n a \rho) \cos k\varphi = J_k(r) \cos k\varphi$, ponendo $A_k=1$ e annullando le rimanenti costanti arbitrarie. Ne segue che se nella (6) si annullano tutte le costanti arbitrarie, ad eccezione di A_k che si pone uguale ad 1, si ha la funzione epicycloidale che abbiamo indicato con \mathcal{E}_k ; cioè se poniamo

$$x = r = \lambda n a \rho, \quad y = \gamma \frac{r^n}{n} = c \lambda a \rho^n,$$

tenendo conto della prima delle (3) si hanno le notevoli identità

$$\begin{aligned} (7) \quad & \frac{J_k(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi})}{(x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi)^{k/2}} \sum_j \binom{k}{j} x^{k-j} y^j \cos[k+j(n-1)]\varphi = \\ & = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(x) J_p(y) \cos[k+p(n-1)]\varphi, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Dalla (7), per $k=0$, cambiando x in $-x$, e ponendo $(n-1)\varphi = \theta$, si ha la formula di C. Neumann⁽²⁾

$$J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}) = J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_p(x) J_p(y) \cos p\theta.$$

Per $\varphi=0$, la (7) porge ancora

$$J_k(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(x) J_p(y)$$

che è una nota formula di K. Neumann e Schläfli⁽³⁾.

Analogamente alla (7) sussiste la formula che si ottiene da essa scambiando il coseno con il seno.

Sommando la (7) con quella ora considerata, moltiplicata per l'unità immaginaria i , si deduce ancora la formula

$$\begin{aligned} (8) \quad & \frac{J_k(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi})}{(x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi)^{k/2}} \sum_j \binom{k}{j} x^{k-j} y^j e^{i \cdot j(n-1)\varphi} = \\ & = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(x) J_p(y) e^{i \cdot p(n-1)\varphi}, \quad (i = \sqrt{-1}), \end{aligned}$$

che si scinde in altre due uguagliando le parti reali e le parti immaginarie.

(2) C. NEUMANN, *Theorie der Bessel'schen Functionen*. Leipzig, 1867.

(3) Vedi per esempio: E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *Modern Analysis*. Chap. XVII, p. 357 (Cambridge University Press, 1946).

Da queste ultime si deducono facilmente le relazioni integrali

$$J_{k-p}(x) J_p(y) \pm J_{k+p}(x) J_{-p}(y) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J_k(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi})}{(x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi)^{k/2}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} y^j \begin{matrix} \cos j(n-1)\varphi \cdot \cos p(n-1)\varphi \\ \text{sen } j(n-1)\varphi \cdot \text{sen } p(n-1)\varphi \end{matrix} d\varphi$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots),$$

e sommando la formula corrispondente al segno + con quella relativa al segno — nel primo membro, si ha infine

$$J_{k-p}(x) \cdot J_p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J_k(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi})}{(x^2+y^2+2xy\cos(n-1)\varphi)^{k/2}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} y^j \cos(p-j)(n-1)\varphi \cdot d\varphi$$

che è un'altra notevole nuova relazione integrale fra le funzioni di Bessel.

Geometria. — *Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati.* Nota di DIONIGI GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Recenti ricerche di F. Severi ⁽¹⁾ e B. Segre ⁽²⁾ mettono in luce l'estrema difficoltà del problema di determinare il massimo numero μ_n di nodi isolati che può avere una superficie algebrica d'ordine n dello spazio ordinario. Il problema è risolto soltanto per $n \leq 4$; sicchè ha interesse di migliorare le limitazioni note per μ_n ⁽³⁾.

In questa Nota limito inferiormente il numero μ_n , in modo più restrittivo di quanto sia stato fatto finora, costruendo esempi di superficie algebriche che posseggono un numero elevato di punti singolari isolati.

Considero dapprima superficie con soli nodi, e trovo:

$$(1) \quad \mu_n \geq \frac{1}{4}(n+1)(n-1)^2 \quad \text{per } n \text{ dispari,}$$

$$(2) \quad \mu_n \geq \frac{1}{4}(n+1)(n^2-4)+1 \quad \text{per } n \text{ pari.}$$

Costruisco inoltre esempi di superficie d'ordine n dispari che posseggono un punto triplo ed altri $1/4(n+1)(n^2-9)$ punti doppi.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) F. SEVERI, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio*. « Annali di Mat. », 4, 25, pp. 1-41 (1946).

(2) B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine*. « Boll. U. M. I. », 3, 2, pp. 204-212 (1947).

(3) Per notizie sull'argomento cfr. E. G. TOGLIATTI, *Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi* (Conferenza tenuta a Torino il 16-3-1950). « Rend. Sem. Mat. di Torino », t. IX, pp. 47-59 (1950).

B. Segre ⁽⁴⁾ ha osservato che, contrariamente a quanto avviene per le curve piane, non è possibile esprimere μ_n (per $n = 1, 2, \dots$) come un polinomio in n (a coefficienti razionali); non ha escluso però che ciò possa accadere per tutti gli n che superano un certo n_0 , ed ha dimostrato che — in tal caso — dovrebbe essere necessariamente

$$(3) \quad \mu_n = an^3 + bn^2 + cn + d \quad (\text{per } n > n_0),$$

con $1/2 \geq a > 1/6$. La presente Nota migliora questo risultato, in quanto dalle (1) e (2) segue che una relazione come la (3) potrebbe sussistere soltanto con $a \geq 1/4$.

2. In uno spazio S_3 in cui (x_0, x_1, x_2, x_3) siano coordinate proiettive omogenee di punto, consideriamo la superficie \mathcal{F}^{2m+i} , di ordine $2m+i$ (m, i interi ≥ 1), di equazione:

$$(4) \quad f \equiv x_0^{2m} \alpha + 2 x_0^m \beta + \gamma = 0,$$

dove α, β, γ denotano forme ternarie nelle sole x_1, x_2, x_3 , di gradi rispettivi $i, m+i, 2m+i$. La \mathcal{F}^{2m+i} possiede manifestamente un punto i -plo in $P(1, 0, 0, 0)$.

Relativamente ad essa, stabiliamo il seguente lemma:

1° Se Q è un punto doppio di \mathcal{F} , che non stia nè sul piano $x_0 = 0$ nè sul cono $\beta = 0$, la retta PQ risulta generatrice doppia del cono Φ di equazione $\varphi \equiv \alpha\gamma - \beta^2 = 0$.

2° Una generatrice doppia del cono Φ , che non giaccia sul cono $\beta = 0$, contiene m punti doppi di \mathcal{F} , distinti fra loro e da P .

Se Q è un punto doppio di \mathcal{F} , ivi si ha:

$$(5) \quad f_0 \equiv 2 m x_0^{m-1} (\alpha x_0^m + \beta) = 0$$

$$(6) \quad f_k \equiv x_0^{2m} \alpha_k + 2 x_0^m \beta_k + \gamma_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5),$$

oltre naturalmente alla (4), conseguenza delle (5), (6). Se Q non appartiene al piano $x_0 = 0$, la (5) riducesi alla $\alpha x_0^m + \beta = 0$, onde la (4) fornisce $\beta x_0^m + \gamma = 0$. Pertanto, se Q non sta sul cono $\beta = 0$, nel punto Q risulta $\alpha \neq 0$, ed inoltre:

$$(7) \quad \alpha : \beta : \gamma = 1 : -x_0^m : x_0^{2m}.$$

Le (6), (7) implicano che un qualunque punto della retta PQ deve annullare $\varphi_k \equiv \gamma \alpha_k - 2 \beta \beta_k + \alpha \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$); e ciò dimostra la prima parte del lemma.

Sia ora $R(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la traccia sul piano $x_0 = 0$ di una generatrice doppia del cono Φ , tale che $\beta(\bar{x}) \neq 0$. Risulta $\alpha(\bar{x}) \gamma(\bar{x}) - \beta^2(\bar{x}) = 0$, e quindi $\alpha(\bar{x}) \neq 0$, ed inoltre:

$$(8) \quad \varphi_k(\bar{x}) \equiv \gamma(\bar{x}) \alpha_k(\bar{x}) - 2 \beta(\bar{x}) \beta_k(\bar{x}) + \alpha(\bar{x}) \gamma_k(\bar{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

(4) B. SEGRE, loc. cit., § 2.

(5) Indichiamo con $f_k, \varphi_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ le derivate parziali di $f, \varphi, \alpha, \beta, \gamma$ rispetto ad x_k ($k = 0, 1, 2, 3$).

Se \bar{x}_0 è uno degli m valori (distinti e non nulli) di x_0 per cui

$$\alpha(\bar{x}) : \beta(\bar{x}) : \gamma(\bar{x}) = 1 : -x_0^m : x_0^{2m},$$

il punto $M(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è doppio per \mathcal{F} perchè, in forza delle (5), (6) e (8), si ha $f_k(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

È così dimostrata la seconda parte del lemma.

Per ottenere che la superficie \mathcal{F} abbia un numero elevato di punti doppi, basterà dunque scegliere α, β, γ in modo tale che il cono Φ abbia un numero elevato di generatrici doppie, non appartenenti al cono $\beta = 0$. E, per la prima parte del lemma, se Φ è privo di componenti multiple, i punti doppi di \mathcal{F} che non appartengano al piano $x_0 = 0$ risultano tutti isolati.

3. Supponiamo in primo luogo $i = 1$, onde la (4) definisce delle \mathcal{F}^{2m+1} con un punto semplice in P.

Nel piano $x_0 = 0$ consideriamo una generica curva β d'ordine $m+1$, di equazione $\beta = 0$, ed una retta α , di equazione $\alpha = 0$, che seghi β in $m+1$ punti distinti A_1, A_2, \dots, A_{m+1} . Se $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m+1}$ sono $m+1$ coniche generiche (di equazioni $\sigma_i = 0$) tangenti ad α rispettivamente in A_1, A_2, \dots, A_{m+1} , la curva del fascio

$$\beta^2 - \lambda \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m+1} = 0$$

che passa per un punto della retta α distinto dai punti A contiene tale retta come parte. Pertanto esistono un polinomio di grado $2m+1$, γ , ed un valore λ_0 di λ tali che

$$\beta^2 - \alpha\gamma \equiv \lambda_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m+1}.$$

I $4 \binom{m+1}{2} = 2m(m+1)$ punti di incontro delle $m+1$ coniche σ a due a due sono doppi per la curva $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, e nessuno di essi sta sulla $\beta = 0$. Pertanto, in virtù del lemma, la superficie \mathcal{F}^{2m+1} di equazione $x_0^{2m} \alpha + 2x_0^m \beta + \gamma = 0$ possiede almeno $2m^2(m+1)$ punti doppi isolati, ciò che implica la (1).

4. Assumiamo ora $i = 2$, onde la (4) definisce delle \mathcal{F}^{2m+2} con un punto doppio in P.

Nel piano $x_0 = 0$ consideriamo una generica curva β d'ordine $m+2$, di equazione $\beta = 0$, ed una generica conica α , di equazione $\alpha = 0$, che seghi β nei punti (distinti) $A_1, A_2, \dots, A_{2m+4}$. Se $d_1, d_2, \dots, d_{2m+4}$ (di equazioni $d_i = 0$) sono le tangenti ad α nei punti A_i , la curva del fascio

$$\beta^2 - \lambda d_1 d_2 \dots d_{2m+4} = 0$$

che passa per un generico punto di α contiene α come parte. Pertanto esistono un polinomio γ di grado $2m+2$ ed un valore λ_0 di λ per cui

$$\beta^2 - \alpha\gamma \equiv \lambda_0 d_1 d_2 \dots d_{2m+4};$$

sicchè la superficie \mathcal{F}^{2m+2} di equazione $x_0^{2m} \alpha + 2 x_0^m \beta + \gamma = 0$ possiede almeno

$$\binom{2m+4}{2} m + 1 = (2m+3)(m+2)m + 1$$

punti doppi isolati. Da ciò segue la (2).

Per $m = 1$ si ha una \mathcal{F}^4 di Kummer; per $m = 2$ si trova una \mathcal{F}^6 , con 57 punti doppi, che sembra abbastanza notevole in quanto il numero dei suoi nodi poco si scosta dal noto limite superiore 66⁽⁶⁾.

5. Nel piano $x_0 = 0$, siano da ultimo α , di equazione $\alpha = 0$, una curva del terzo ordine generica (e quindi di genere 1), $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m+3}$ $m+3$ coniche (di equazioni $\sigma_h = 0$) tritangenti ad α , A_{h1}, A_{h2}, A_{h3} ($h = 1, 2, \dots, m+3$) i punti di contatto di α con σ_h .

Si possono scegliere le coniche σ_h in modo tale che, per i punti A_{hk} ($h = 1, 2, \dots, m+3$; $k = 1, 2, 3$) passi una curva d'ordine $m+3$ non contenente α come parte. Infatti: diciamo u l'integrale di prima specie esistente su α scelto in modo che la condizione di allineamento di tre punti di α sia $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$, ed u_{hk} i valori che esso assume nei punti A_{hk} . La conica σ_h appartiene all'uno o all'altro dei tre sistemi di coniche tritangenti ad α , a seconda che la somma $u_{h1} + u_{h2} + u_{h3}$, a meno di multipli dei periodi, vale $\omega_1/2$, oppure $\omega_2/2$, oppure $(\omega_1 + \omega_2)/2$.

Se si scelgono le $m+3$ coniche σ_h in modo tale che ognuno dei tre sistemi di coniche tritangenti ad α ne contenga un numero pari se m è dispari, ed un numero dispari se m è pari, i punti A_{hk} risultano tali che

$$\sum_{h,k} u_{hk} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

ond'essi giacciono su di una curva d'ordine $m+3$, β (di equazione $\beta = 0$), non contenente α come parte.

Ripetendo *mutatis mutandis* il ragionamento dei nn. 3, 4, si conclude che esistono un polinomio di grado $2m+3$, γ , ed un valore λ_0 di λ per cui

$$\beta^2 - \alpha\gamma \equiv \lambda_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m+3}.$$

Corrispondentemente, la \mathcal{F}^{2m+3} di equazione $x_0^{2m} \alpha + 2 x_0^m \beta + \gamma = 0$ possiede un punto triplo P ed almeno $4m \binom{m+3}{2} = 2m(m+2)(m+3)$ punti doppi isolati.

Per $m = 1$ si ritrova così la superficie del 5° ordine già considerata da E. G. Togliatti, in una Nota⁽⁷⁾ la cui lettura mi ha suggerito la presente ricerca.

Il prof. B. Segre ha semplificato, nella forma qui esposta, la dimostrazione che avevo data per il lemma.

(6) A. B. BASSER, *The maximum number of double points on a surface*. «Nature», 73, p. 246 (1906); *On the singularities of surfaces*. «Quart. J.», 38, pp. 63-83 (1907). Il prof. Segre mi comunica di aver dimostrato l'esistenza di una superficie del 6° ordine con 63 nodi, ed anche di aver ottenuto per il numero a , di cui al n. 1, limitazioni migliori di quelle note.

(7) E. G. TOGLIATTI, *Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie di 5° ordine*. «Studi in onore di Salvatore Ortu Carboni», Genova 1935, pp. 253-259 (Tipografia del Senato).

Fisica. — *Sulla fluorescenza destata da particelle α nelle soluzioni*^(*).
 Nota II di MARIO AGENO e RUGGERO QUERZOLI, presentata^(**) dal
 Socio G. C. TRABACCHI.

In una Nota precedente⁽¹⁾, abbiamo esposto come, facendo uso di una semplice tecnica fotografica, si possa mettere in evidenza il fatto che parte dell'energia ceduta ad una soluzione scintillante da particelle α che la attraversino viaggia per un tratto dell'ordine di alcuni millimetri attraverso la soluzione stessa, prima di trasformarsi in radiazione di fluorescenza.

Ci siamo naturalmente proposti di chiarire il meccanismo di tale trasporto e la Nota presente espone le prime conclusioni ottenute.

Il dispositivo sperimentale da noi adottato è mostrato schematicamente nella figura 1. La vaschetta esterna B in vetro, della forma di un cilindro a generatrici orizzontali del diametro di 5 cm, è limitata anteriormente e posteriormente da due facce piane di vetro da lastre fotografiche, incollate al cilindro con araldite a caldo. Tutte le fotografie sono state eseguite attraverso la parete anteriore.

Nella vaschetta B è immerso un secondo recipiente A pure in vetro, costituito da un tubo a generatrici verticali del diametro di 12 mm, chiuso in

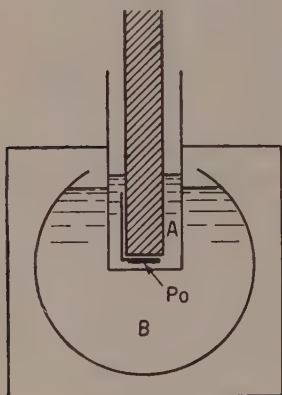


Fig. 1.

fondo da una lastrina pure incollata con araldite a caldo. Nella provetta A è immersa la sorgente di particelle α , costituita da un dischetto di nichel del diametro di circa 5 mm, disposto parallelamente al fondo della provetta e su cui erano originariamente depositi circa 10 millicurie di polonio. È oggi difficile stabilire un qualsiasi dato quantitativo sull'intensità della sorgente, perchè le lunghe immersioni in liquidi diversi, i lavaggi ripetuti, ecc., hanno fatto sì che tanto il numero delle α emesse quanto il percorso di ogni particella risultino notevolmente ridotti: non è perciò possibile stabilire con una certa esattezza l'energia totale ceduta dalle α al liquido in cui la sorgente è immersa e di conseguenza tutte le nostre conclusioni saranno per ora basate essenzialmente su osservazioni di carattere qualitativo.

Il dispositivo sperimentale ora descritto permette evidentemente di separare la soluzione in cui si esaurisce il percorso delle α (soluzione superiore, provetta

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità, Laboratorio di Fisica, Roma.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) M. AGENO e R. QUERZOLI, « Rend. Acc. Lincei », vol. XI, fasc. 5, 2° sem., 1951.

A), da quella in cui si desta la fluorescenza (soluzione inferiore, vaschetta B). Ciò naturalmente è possibile solo se il meccanismo del trasporto dell'energia

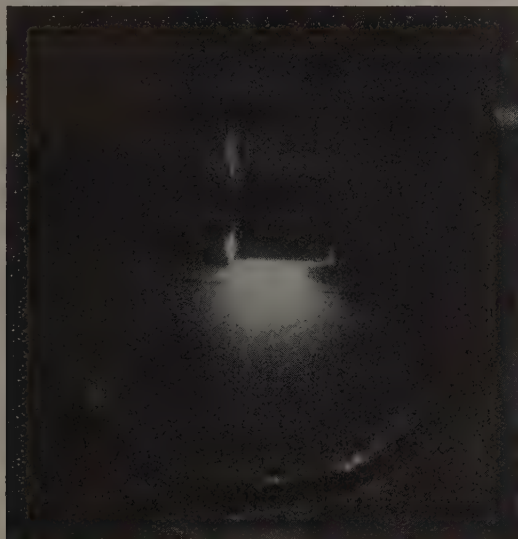


Fig. 2.

attraverso la soluzione è tale da non trovare un ostacolo insormontabile nel vetrino di fondo della provetta A.

Per chiarire questo punto e scegliere eventualmente un vetro di composizione opportuna, abbiamo fatto delle fotografie preliminari col dispositivo della Nota I,



Fig. 3.

sopprimendo la provetta A e immergendo la sorgente direttamente nella soluzione fluorescente (terfenile in xilolo al 5‰) ponendo un paio di millimetri al disotto di essa una lastrina del vetro in esame. La figura 2 mostra il risultato

ottenuto con una determinata qualità di vetrini coprioggetti, dello spessore di 0,18 mm. Nella figura 3a è mostrato lo spettro di assorbimento di tali vetrini, che risultano ancora abbastanza trasparenti a 2800 Å, mentre la figura 3b mostra lo spettro di assorbimento del vetro delle facce piane della vaschetta B, che pure è stato usato come fondo della A, in talune fotografie.

Abbiamo quindi eseguito col dispositivo della figura 1 tutta una serie di fotografie, variando opportunamente sia il liquido superiore sia il liquido inferiore.

Solo di alcune di queste si farà parola nella presente Nota, mentre l'esame delle rimanenti, con le conclusioni che se ne possono trarre, viene rimandato ad una Nota successiva.

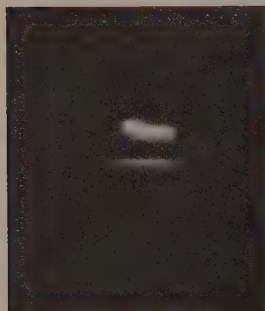


Fig. 4.

La figura 4 mostra il risultato che si ottiene ponendo in A xilolo puro e in B la solida soluzione scintillante di terfenile in xilolo al 5‰.

Questa fotografia dà innanzi tutto una dimostrazione assolutamente evidente del trasporto dell'energia dalla prima alla seconda soluzione, attraverso il vetrino coprioggetto. È inoltre senz'altro escluso che un effetto di questo genere possa esser dovuto ai raggi γ del Po, i cui coefficienti di assorbimento nelle due soluzioni sono pressochè uguali e assai più piccoli di quanto è

mostrato dall'andamento spaziale della fluorescenza. Analoghe considerazioni escludono pure che la fluorescenza possa esser dovuta a raggi β emessi da un residuo di radio D mescolato al Po.

Per chiarire tuttavia in modo definitivo questo punto, abbiamo posta anche nella provetta A la soluzione di terfenile in xilolo, le cui scintillazioni sono assai più intense di quelle dello xilolo puro ed abbiamo ricoperto inferiormente il vetrino coprioggetto con un foglio di alluminio di 0,01 mm. di spessore. Tale foglio è agevolmente attraversato da raggi γ o β (ed anche da raggi X molli) mentre rappresenta un ostacolo insormontabile per il visibile e l'ultravioletto. Come si vede nella figura 5, la radiazione emessa dalla soluzione di terfenile in xilolo viene completamente riflessa dall'alluminio. Per agevolare l'interpretazione di questa fotografia, la figura 6 mostra, allo stesso ingrandimento, il dispositivo sperimentale. Il risultato ottenuto è poi da confrontare con quello della fotografia della figura 7, fatta nelle identiche condizioni, con l'unica differenza che il foglio di alluminio è stato soppresso. Nella figura 5, la lineetta luminosa inferiore è dovuta ad un pochino di soluzione fluorescente infiltrata tra il vetrino che costituisce il fondo della provetta A ed il foglio di alluminio.



Fig. 5.



Fig. 6.

Ci sembra dunque di poter concludere, sulla base dei risultati sopra descritti, che il trasporto dell'energia nelle soluzioni che ci interessano avviene tramite una radiazione elettromagnetica emessa nel punto della soluzione bombardato dalle particelle α ed energicamente riassorbita dal terfenile, che la riemette poi sotto forma di luce di fluorescenza. Siccome questa radiazione attraversa agevolmente i vetrini che costituiscono il fondo della nostra provetta (i quali hanno un taglio tra 2800 e 3000 Å), ed è riflessa da un sottile foglio di alluminio, essa deve, almeno per la maggior parte, avere lunghezza d'onda maggiore di 3000 Å.

La sorgente di Polonio ci è stata fornita dal professor E. Amaldi direttore del Centro per la Fisica Nucleare del C. N. R. e gli spettri di assorbimento della figura 3 sono stati eseguiti per noi dal prof. G. Milazzo del nostro Istituto. Ad entrambi porgiamo i nostri più vivi ringraziamenti.

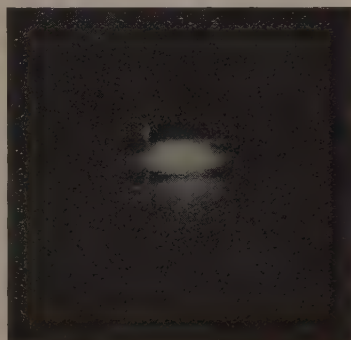


Fig. 7.

Fisica. — *Liberazione di elettroni secondari da parte di ioni poliatomici, e fenomeni di invecchiamento nei contatori di G. e M. a spegnimento spontaneo.* Nota di ENRICA BERETTA E ANNAMARIA BIANCHI, presentata (*) dal Corrisp. A. ROSTAGNI.

1. Come è stato esposto in un precedente lavoro⁽¹⁾, l'analisi della distribuzione nel tempo degli impulsi di un contatore a spegnimento spontaneo (self-quenching) consente una determinazione approssimata del coefficiente k di liberazione di elettroni dalla superficie catodica da parte degli ioni che la raggiungono. Il lavoro stesso contiene i risultati di misure preliminari di k relative a ioni di alcool etilico su diverse superficie catodiche.

Numerose altre sostanze sono state successivamente prese in esame. Abbiamo ottenuto risultati positivi col metano, l'etere etilico, il metilale, una serie di alcoli e una serie di acetati. Non ci è stato possibile invece costruire un buon contatore self-quenching con vapori di idrocarburi aromatici, in particolare con benzolo. Di un analogo tentativo infruttuoso col benzolo è stato già riferito da A. Trost⁽²⁾.

I valori trovati per i coefficienti di liberazione di elettroni da parte di ioni delle sostanze esaminate su pareti di ottone sono riportati nella tabella: si può osservare che il metano, che ha la molecola più semplice tra le sostanze sperimentate, presenta il coefficiente di liberazione più alto. In generale si osserva che in una serie di composti omologhi k cresce al crescere del peso molecolare, in accordo con quanto si può prevedere teoricamente: ciò avviene sia nella serie degli alcoli che degli acetati. Il valore di k dipende, d'altra parte, dalla struttura della molecola: esso risulta diverso, infatti, in composti isomeri, come gli alcoli normalpropilico ed isopropilico; e risulta più grande negli acetati che negli alcoli corrispondenti, che pure hanno peso molecolare notevolmente inferiore.

Molecola	Formula	k
metano	CH_4	$(3,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-10}$
etere etilico	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$	$(1,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$
metilale	$\text{CH}_2(\text{OCH}_3)_2$	$(0,57 \pm 0,12) \cdot 10^{-10}$
alcool metilico	CH_3OH	$(0,97 \pm 0,13) \cdot 10^{-10}$
» etilico	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	$(0,76 \pm 0,08) \cdot 10^{-10}$
» isopropilico	$\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$	$(0,68 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
» normalpropilico		$(0,41 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
acetato di metile	$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2-\text{CH}_3$	$(1,32 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
» » etile	$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2-\text{C}_2\text{H}_5$	$(1,01 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
» » isopropile	$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}_2-\text{C}_3\text{H}_7$	$(0,76 \pm 0,08) \cdot 10^{-10}$

(*) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) E. BERETTA, A. ROSTAGNI, «Nuovo Cimento», VI, 5 (1949) (citato in seguito come N.I.).

(2) A. TROST, «Zeitschrift für Physik», 105, 399 (1937).

Nella tabella sono indicati gli errori statistici. Altri errori possono intervenire sia nella determinazione del numero di ioni incidenti sulla superficie catodica, fondata sulla misura della capacità del contatore e dell'altezza degli impulsi, sia nella taratura del circuito selettore degli intervalli di tempo, fondata su misure di costanti di tempo e di frequenze di impulsi. Avendo avuto cura di eseguire tutte le misure nelle medesime condizioni, senza introdurre variazioni nelle dimensioni dei contatori o nelle caratteristiche del dispositivo di misura, riteniamo che questi errori possano bensì introdurre una incertezza ulteriore, di carattere sistematico, nei valori assoluti di k , ma senza influire sul rapporto dei valori relativi alle diverse sostanze.

Al concorso di errori di questo genere ed in particolare a un difetto di taratura del selettore d'altezza degli impulsi usato nelle prime misure riteniamo che si debba imputare lo scarto di un fattore 2 all'incirca dei valori assoluti di k per alcool etilico su ottone riportati in N. I da quelli attuali. Questi errori influiscono nello stesso modo sulle determinazioni di k con entrambi i metodi contemplati in N. I: sia dalla distribuzione degli impulsi nel tempo che dalla pendenza del pianerottolo. Riteniamo che le misure attuali, per vari perfezionamenti introdotti nel dispositivo, siano più attendibili nei riguardi dei valori assoluti.

2. Nelle misure sistematiche i vapori poliatomici in esame sono stati usati in miscela con argon, ad una pressione di 10 torr contro 90 di argon. Solo il metano è stato usato puro: e il fatto che il suo coefficiente k risulti confrontabile con quelli determinati nei contatori a miscela, può essere una conferma dell'ipotesi generalmente accettata, ma essenziale per le nostre deduzioni, che in questi ultimi siano solo gli ioni poliatomici che raggiungono la parete catodica. È questa la condizione affinché i valori trovati rappresentino effettivamente i coefficienti di liberazione degli ioni poliatomici in questione.

I valori elencati nella tabella si ricavano, come è stato esposto in N. I, dalla curva di distribuzione degli intervalli di tempo fra due impulsi successivi in funzione dell'ampiezza degli intervalli stessi.

La fig. 1-A mostra le curve ottenute con l'alcool metilico e con l'alcool normalpropilico: in ascissa è riportata l'ampiezza t degli intervalli e in ordinata la frequenza $\delta v/\text{min.}$ degli intervalli di ampiezza compresa tra t e $t + \delta t$ (nelle nostre misure δt può variare da 10 $\mu\text{sec.}$ a 15 $\mu\text{sec.}$; la frequenza media degli impulsi è di 110/sec.).

Nella fig. 1-B sono tracciati i pianerottoli dei due contatori: in ascissa è riportata l'altezza H dell'impulso in volt (anziché la tensione applicata come di solito), in ordinata il numero N di impulsi corrispondente. Si noti come a un coefficiente di liberazione più basso corrisponda un pianerottolo di minore pendenza (ved. N. I).

3. Poiché la serie delle misure occorrenti ad una determinazione di k dura generalmente qualche decina di ore, con un numero complessivo di impulsi dell'ordine di 107, abbiamo avuto campo di notare delle alterazioni progressive nelle condizioni di funzionamento, vale a dire dei fenomeni di « invecchiamento » dei contatori.

Una prima anomalia, che riguarda il primo periodo di funzionamento ($\sim 10^6$ impulsi) è illustrata in fig. 1-A. La curva a_1) rappresenta la distribuzione iniziale degli intervalli fra gli impulsi per un contatore ad alcool metilico. Nel corso di circa 10^6 impulsi essa si trasforma gradualmente nella curva a_2) che mantiene questo aspetto, modificandosi solo molto lentamente, per almeno $\sim 10^7$ impulsi. Le aree comprese tra le curve a_1) ed a_2) e la retta k sono eguali, e corrispondono perciò, secondo la nostra interpretazione (ved. N. I), ad uno stesso valore del coefficiente k .

Lo stesso andamento si riscontra, qualitativamente, in tutti i contatori sperimentati, fuorchè in quelli a metano, che verranno considerati a parte. Una possibile spiegazione di questo fatto è suggerita da osservazioni di D. Willard e C. G. Montgomery (3): in base alle quali si formerebbero, nel primo periodo di

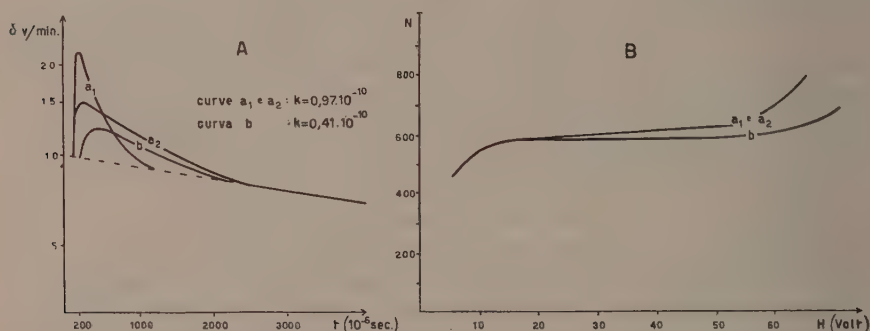


Fig. 1. - Curve di distribuzione degli intervalli fra due impulsi successivi (A) e pianerottoli (B) per un contatore

a_1) ad alcool metilico all'inizio del funzionamento,

a_2) » » » dopo $\sim 10^6$ impulsi,

b) » » » normalpropilico dopo $\sim 10^6$ impulsi.

Nelle curve (A) il δt è $14 \cdot 10^{-6}$ sec, la frequenza f degli impulsi è 110 sec, l'altezza H degli impulsi è 20 V.

funzionamento del contatore, per decomposizione delle molecole complesse presenti, delle molecole con notevole affinità per gli elettroni (per esempio CO_2): una parte degli impulsi secondari verrebbe perciò ritardata, in quanto gli elettroni che vi danno origine, catturati da tali molecole, impiegano maggior tempo a raggiungere la zona di campo intenso prossima al filo, dove ha luogo la ionizzazione per urto.

La vita del contatore in regime normale, corrispondente alla curva a_2), varia colla natura del vapore che esso contiene; quelli ad etere etilico divengono praticamente inservibili dopo qualche 10^7 impulsi; quelli ad alcool etilico conservano un comportamento quasi regolare dopo oltre $5 \cdot 10^8$ impulsi. In tutti si nota da un lato un aumento progressivo di pendenza del pianerottolo, e d'altro lato un aumento nel numero d'impulsi secondari. Entrambi i fatti corrispondono ad un aumento nel coefficiente k : soltanto che, come è stato osservato in N. I, l'aumento di k che si deduce dalla variazione di pendenza è maggiore di quello che risulta dall'incremento degli impulsi secondari.

(3) D. WILLARD, C. G. MONTGOMERY, «R. S. I.», 21, 520 (1950).

Si è dunque portati a ritenere che l'invecchiamento dia luogo bensì ad alterazioni della superficie catodica e della composizione chimica del gas, alterazioni che sono state riscontrate anche direttamente per diverse vie da vari autori ⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾. Ma queste alterazioni devono determinare, oltreché un aumento nel coefficiente di liberazione di elettroni da parte di ioni in arrivo al catodo, anche la comparsa di impulsi spuri di altra natura, o eventualmente di impulsi secondari fortemente ritardati, i quali sfuggono alla rivelazione col nostro metodo.

La fig. 2 mette in evidenza questo processo di invecchiamento in un contatore ad argon ed etere etilico.

4. La fig. 3 illustra le fasi di invecchiamento di un contatore a metano puro. A differenza di quello che succede negli altri tipi di contatori, si trova qui che

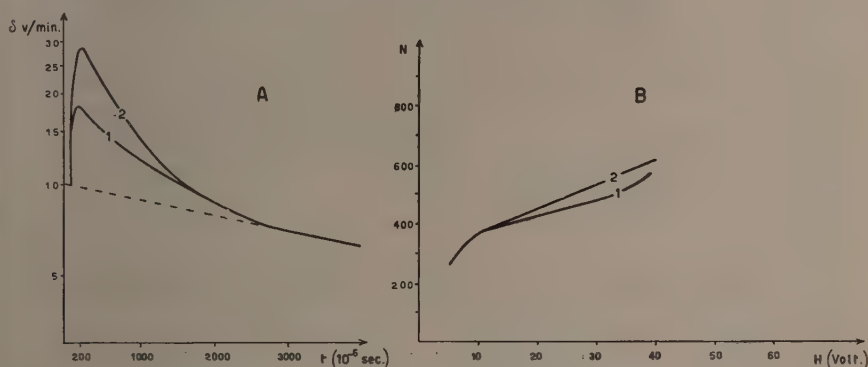


Fig. 2. - Curve di distribuzione degli intervalli fra due impulsi successivi (A) e pianerottoli (B) per un contatore ad etere etilico

1) da $\sim 10^6$ a $\sim 5 \cdot 10^6$ impulsi,

2) da $\sim 10^7$ a $\sim 1,5 \cdot 10^7$ impulsi.

Nelle curve (A) $\delta t = 14 \cdot 10^{-6}$; $f = 110/\text{sec}$; $H = 20$ V.

il coefficiente k di liberazione di elettroni, dedotto sia dalle curve di distribuzione degli impulsi che dal pianerottolo, decresce dapprima da $\sim 3 \cdot 10^{10}$ a $\sim 1 \cdot 10^{10}$ per poi risalire gradualmente. La diminuzione iniziale di k si può forse attribuire alla formazione a partire dal CH_4 di molecole complesse, come C_2H_6 , C_2H_2 , C_3H_6 , C_4H_{10} , la cui presenza in un contatore a metano invecchiato è stata effettivamente rivelata dall'analisi spettroscopica ⁽⁷⁾, mentre la successiva risalita potrebbe derivare da alterazione della superficie catodica, come altri A. hanno osservato in casi analoghi ⁽⁸⁾.

Quando il contatore si trova nelle condizioni rappresentate dalle curve (3) e (4) accanto all'aumento di k interviene un'altra anomalia: esponendolo a radia-

(4) W. D. SPATZ, «Phys. Rev.», **64**, 238 (1943).

(5) W. D. SPATZ, «Phys. Rev.», **71**, 577 (1947).

(6) M. CHAUDHRI, A. G. FENTON, «Proc. Phys. Soc.», **66**, 113 (1952).

(7) E. C. FARMER, S. C. BROWN, «Phys. Rev.», **74**, 902 (1949).

(8) D. BLANC, «Journal de Physique et de Radium», **10**, 444 (1919).

zioni di determinata intensità si nota che la frequenza degli impulsi va crescendo per un certo tempo al disopra del valore corrispondente all'intensità stessa; allontanata la sorgente la frequenza diminuisce lentamente e gradualmente, conservando un « ricordo » dell'intensità precedente, che può essere sensibile per decine di minuti. Il fenomeno richiama quello osservato da altri A. su contatori ordinari tenuti per qualche tempo in regime di scarica⁽⁶⁾ o irradiati con una notevole intensità di raggi X⁽⁹⁾.

Le anomalie dei contatori a metano sono state studiate pure da D. Blanc⁽⁸⁾, su contatori in vetro a catodo esterno. Anch'egli osserva un aumento progressivo del numero d'impulsi sotto irradiazione con intensità costante, che si manifesta

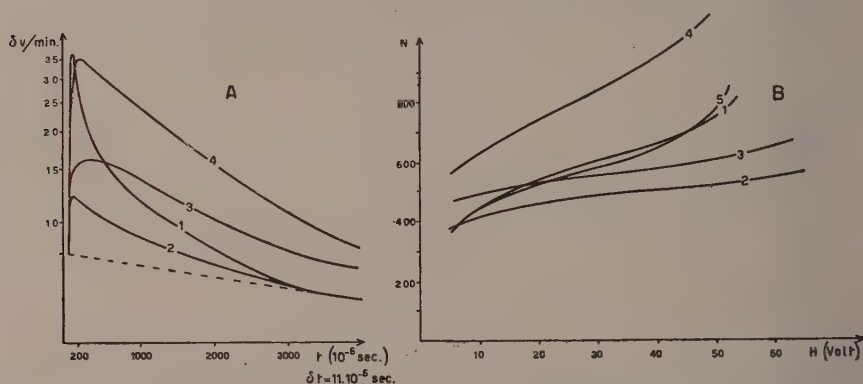


Fig. 3. - Curve di distribuzione degli intervalli fra due impulsi successivi (A) e pianerottoli (B) per un contatore a metano

- 1) da 0 a $\sim 5 \cdot 10^6$ impulsi,
- 2) da $\sim 5 \cdot 10^6$ a $\sim 10^7$ impulsi,
- 3) da $\sim 10^7$ a $\sim 1,5 \cdot 10^7$ impulsi,
- 4) da $\sim 1,5 \cdot 10^7$ a $\sim 2 \cdot 10^7$ impulsi.

Il pianerottolo 5) è ottenuto, dopo ultimata la curva 4), col contatore lasciato a riposo per alcune ore.

Nelle curve (A) $\delta t = 11 \cdot 10^{-6}$ sec; $f = 110$ /sec; $H = 20$ V.

attraverso a un forte innalzamento del pianerottolo; non fa menzione invece della successiva scomparsa del fenomeno nel contatore in riposo, da noi osservata. In accordo con M. Chaudhri e A. G. Fenton⁽⁶⁾ egli vorrebbe ricondurre il fenomeno ad un'alterazione della superficie catodica con riduzione del lavoro d'estrazione d'elettroni da questa al punto da rendere apprezzabile l'emissione termoionica alla temperatura ordinaria. Nelle nostre esperienze abbiamo constatato che un contatore a metano invecchiato al punto da manifestare chiaramente tutte codeste anomalie si riporta nelle condizioni iniziali mantenendolo sotto vuoto per 48 ore alla temperatura ordinaria e riempiendolo nuovamente. Tale trattamento è dunque sufficiente a far scomparire la presunta alterazione catodica.

Ringraziamo il prof. U. Croatto e il dott. A. Iliceto, dell'Istituto di Chimica dell'Università di Padova, e il dott. I. Filosofo, dell'Istituto di Fisica, per l'aiuto prestato nella preparazione dei composti chimici.

(9) R. BRUNETTI, Z. OLLANO, « Nuovo Cimento », X, 92 (1933)

Metallurgia. — *Le formule delle fasi di Hume-Rothery in leghe con più di due componenti*^(*). Nota di FRANCESCO MAZZOLENI, presentata^(**) dal Socio F. GIORDANI.

Col nome di fasi di Hume-Rothery si indicano ormai correntemente i composti intermetallici elettronici, le cui composizioni corrispondono a rapporti definiti tra il numero degli elettroni di valenza e il numero degli atomi dei metalli costituenti^(x).

Fin dal 1926, infatti, W. Hume-Rothery ha rilevato che in molte leghe binarie si formano composti intermetallici quando quel rapporto assume il valore di $3:2$, $7:4$ o $21:13$. Nel primo caso i composti hanno il reticolo cubico a corpo centrato del tipo dell'ottone β , o quello più complesso del manganese β , nel secondo caso il reticolo esagonale compatto, nel terzo il reticolo complesso, derivato dal cubico, dell'ottone γ .

Le prime osservazioni di Hume-Rothery furono successivamente confermate in molti casi, mentre lo stesso A. chiariva esaurientemente la validità e le limitazioni delle leggi ora dette sull'influenza della concentrazione degli elettroni di valenza sulla struttura⁽²⁾.

Nel 1946 ho preso in esame la possibilità di esistenza di fasi di Hume-Rothery in leghe di più di due componenti. Ho sviluppato pertanto un procedimento per determinare preventivamente le composizioni delle fasi che soddisfacessero, in sistemi con più di due componenti, ai suddetti rapporti tra il numero degli elettroni di valenza e il numero di atomi. Soltanto ora riferisco sui risultati ottenuti perchè solo recentemente mi è stato possibile con la disponibilità dei necessari mezzi procedere alla relativa verifica sperimentale, che è risultata pienamente soddisfacente.

In questa prima Nota mi limito ad esporre il metodo elaborato per la determinazione delle formule delle fasi di Hume-Rothery in sistemi a più componenti e ad elencare le formule stesse. Queste formule possono essere di prezioso ausilio per l'inquadramento razionale del lavoro nello studio di sistemi complessi indicando *a priori* nel diagramma di stato relativo i punti in cui si hanno determinate strutture cristalline. Riferisco poi brevemente sulle prime verifiche sperimentali, riservandomi di ritornare con la dovuta ampiezza su questo argomento e sui suoi successivi sviluppi.

Studi precedenti⁽³⁾ hanno chiarito che nelle applicazioni delle leggi di Hume-Rothery il contributo elettronico dei metalli di transizione si deve considerare

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Tecnologia dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) G. MASING, *Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde*. Berlin, p. 146 (1950).

(2) W. HUME-ROTHERY, *The Structure of Metals and Alloys*. London, p. 110 (1947).

(3) U. DEHLINGER, *Gitteraufbau metallischer Systeme*. (Band I, Handbuch der Metallphysik von G. Masing), Leipzig, p. 96 (1935).

di regola nullo, mentre per gli altri metalli esso corrisponde al valore della valenza caratteristica del posto occupato nel sistema periodico, ad esempio uguale ad 1 per il rame.

Con questa avvertenza si indichino con A gli atomi di metalli di transizione, con B, C, D, E ed F rispettivamente gli atomi di metalli mono-, bi-, tri-, tetra- e pentavalenti che costituiscono un composto intermetallico elettronico. Con le corrispondenti lettere minuscole si indichino i numeri di atomi di ciascun tipo che entrano nella formula del composto, così che questa si scriva:

$$(1) \quad A_a B_b C_c D_d E_e F_f.$$

In questa formula a, b, c, d, e ed f sono numeri interi positivi, eventualmente nulli, primi tra loro.

Il numero di atomi occorrenti per formare il composto (1) è allora:

$$(2) \quad N = a + b + c + d + e + f.$$

Il numero degli elettroni di valenza che complessivamente appartengono agli N atomi è dato da:

$$(3) \quad E = b + 2c + 3d + 4e + 5f$$

poichè gli atomi A, di metalli di transizione, non apportano elettroni di valenza, gli atomi B, monovalenti, ne apportano un ugual numero b , gli atomi C, bivalenti, ne apportano un numero doppio $2c$ e così via.

Perchè un composto avente la formula (1) abbia un rapporto tra elettroni di valenza ed atomi rispettivamente di $3:2$, $21:13$ o di $7:4$, devono essere soddisfatte dai numeri a, b, c, d, e ed f interi e positivi rispettivamente la prima, la seconda o la terza delle equazioni:

$$(4) \quad E = 3/2 N \quad (5) \quad E = 21/13 N \quad (6) \quad E = 7/4 N$$

che si scrivono, sostituendo ad E e ad N i valori (2) e (3) e semplificando:

$$(4') \quad 3a + b = c + 3d + 5e + 7f \quad (\text{rapporto } 3:2)$$

$$(5') \quad 21a + 8b = 5c + 18d + 31e + 44f \quad (\text{rapporto } 21:13)$$

$$(6') \quad 7a + 3b = c + 5d + 9e + 13f \quad (\text{rapporto } 7:4).$$

La determinazione delle possibili formule delle fasi di Hume-Rothery è così ricondotta alla risoluzione in numeri interi e positivi delle equazioni (4'), (5') e (6'). In esse non possono essere simultaneamente nulli a e b , dato che il secondo membro è costituito da una somma di numeri positivi. Quindi in una fase di Hume-Rothery devono necessariamente essere presenti atomi del tipo A (metalli di transizione) o del tipo B (monovalenti) o anche simultaneamente dei due tipi. Non possono però esistere fasi di Hume-Rothery costituite da atomi di queste sole specie perchè il secondo membro delle equazioni risulterebbe allora nullo.

Le equazioni trovate hanno evidentemente dal punto di vista algebrico infinite soluzioni, ma dal punto di vista fisico corrisponderanno a fasi effettivamente diverse soltanto le soluzioni che non siano combinazioni di altre più semplici.

Su questa osservazione è fondato il procedimento seguito per la determinazione delle formule cercate. Si determinano anzitutto le soluzioni delle equazioni nei casi particolari in cui esse si riducono ad avere una sola incognita al primo membro ed una sola al secondo membro. In tal modo ponendo $a=0$ o $b=0$ nelle (4'), (5') e (6') ed eguagliando a zero anche tre delle quattro incognite del secondo membro scelte in tutti i modi possibili si hanno le seguenti equazioni che risolte forniscono le formule di tutti i possibili composti elettronici binari:

Rapporto 3 : 2		Rapporto 21 : 13		Rapporto 7 : 4	
$3a = c$	$b = c$	$21a = 5c$	$8b = 5c$	$7a = c$	$3b = c$
$3a = 3d$	$b = 3d$	$21a = 18c$	$8b = 18d$	$7a = 5d$	$3b = 5d$
$3a = 5e$	$b = 5e$	$21a = 31e$	$8b = 31e$	$7a = 9e$	$3b = 9e$
$3a = 7f$	$b = 7f$	$21a = 44f$	$8b = 44f$	$7a = 13f$	$3b = 13f$

Si consideri ad esempio la prima equazione $3a = c$ la cui risoluzione è immediata e fornisce $a = 1$ $c = 3$. Essa corrisponde quindi alla formula del composto binario AC_3 . Questa equazione ammette non solo questa soluzione, ma infinite altre, ad esempio $a = 2$ $c = 6$, ma è evidente che dal punto di vista fisico la seconda soluzione non corrisponderebbe a un composto diverso dal primo e non deve quindi essere presa in considerazione ai fini che qui interessano.

Le formule di fasi binarie che soddisfano alle leggi di Hume-Rothery, ottenute dalla risoluzione delle equazioni ultime scritte si sono raccolte nella Tabella I, insieme con diversi esempi già conosciuti che con esse concordano.

TABELLA I.

Fasi di Hume-Rothery a due componenti.

Rapporto 3 : 2		Rapporto 21 : 13		Rapporto 7 : 4	
Formule	Esempio	Formule	Esempio	Formula	Esempio
AC_3	$CoZn_3$	A_5C_{21}	Fe_5Zn_{21}	AC_7	$FeZn_7$
AD	$FeAl$	A_6D_7		A_5D_7	
A_5E_3		$A_{31}E_{21}$		A_9E_7	
A_7F_3		$A_{44}F_{21}$		$A_{13}F_7$	
BC	$CuZn$	B_5C_8	Cu_5Zn_8	BC_3	$CuZn_3$
B_3D	Cu_3Al	B_9D_4	Cu_9Al_4	B_5C_3	Ag_5Al_3
B_3E	Cu_7Sn	$B_{31}E_8$	$Cu_{31}Sn_8$	B_3E	Cu_3Sn
B_7F	Cu_7Sb	$B_{11}F_2$		$B_{13}F_3$	

Si può ora osservare che la formula di un composto di Hume-Rothery ternario non dovrà risultare decomponibile in parti che rappresentano dei possibili composti binari. Ad esempio, non si può considerare la formula A_2C_3D come corrispondente a un reale composto ternario perchè questa formula è decomponibile nelle altre binarie AC_3 e AD ed è quindi logico che gli atomi delle diverse specie presenti si riuniscano a preferenza in due fasi distinte del tipo più semplice.

Questo « principio di semplicità » per ora si propone come postulato, ammettendo che i composti effettivamente esistenti siano quelli le cui formule non siano decomponibili in altre più semplici. Su questo punto mi riservo però di tornare

in una prossima Nota perchè esso merita, malgrado il convincente significato fisico, una più diffusa trattazione.

Le formule dei composti elettronici ternari devono corrispondere alle soluzioni in numeri interi positivi delle equazioni che si ottengono dalle (4'), (5') e (6') ponendo successivamente uguali a zero tre delle sei incognite scelte in tutti i modi possibili. Ad esempio per i composti con rapporto 3 : 2 queste equazioni si scrivono:

$$\begin{array}{lll}
 3a + b = c & 3a = c + 3d & b = c + 3d \\
 3a + b = 3d & 3a = c + 5e & b = c + 5e \\
 3a + b = 5e & 3a = c + 7f & b = c + 7f \\
 3a + b = 7f & 3a = 3d + 5e & b = 3d + 5e \\
 & 3a = 3d + 7f & b = 3d + 7f \\
 & 3a = 5e + 7f & b = 5e + 7f.
 \end{array}$$

Si consideri la prima equazione:

$$(7) \quad 3a + b = c.$$

Essa evidentemente non ha soluzioni diverse da quelle corrispondenti alla riunione delle soluzioni delle due equazioni:

$$(8) \quad 3a = c \quad b = c.$$

Poichè infatti a , b e c devono essere numeri interi e positivi, nella soluzione della (7) c deve necessariamente essere somma di due numeri interi e positivi l'uno eguale a $3a$ e l'altro eguale a b . Poichè le soluzioni delle due equazioni (8) corrispondono già a due formule di composti binari si conclude in base al postulato innanzi detto che alla soluzione della (7) non corrisponde la formula di un composto ternario effettivamente esistente e lo stesso accade per la soluzione dell'equazione $3a + b = 3d$. Si consideri invece l'equazione:

$$(9) \quad 3a + b = 5e$$

che differisce dalle precedenti per il fatto che il coefficiente dell'incognita al secondo membro è differente da ciascuno di quelli delle incognite al primo membro. Essa è soddisfatta dalle due terne di valori:

$$a = 1 \quad b = 2 \quad e = 1 \qquad a = 3 \quad b = 1 \quad e = 2$$

che corrispondono alle formule AB_2E e A_3BE_2 che non sono ottenibili da combinazioni lineari a coefficienti interi delle formule corrispondenti alle equazioni binarie tra le stesse incognite $3a = 5e$ e $b = 5e$.

Si può formulare una semplice regola per la ricerca delle soluzioni del tipo ora detto. Si può scrivere infatti:

$$(10) \quad AB_2E = 1/5 (A_5E_3 + 2 B_5E) \quad A_3BE_2 = 1/5 (3 A_5E_3 + B_5E).$$

Si vede quindi che i composti ternari si ottengono dalla « condensazione » e « semplificazione » di composti binari. È logico ritenere che le formule AB_2E e A_3BE_2 corrispondano effettivamente a composti intermetallici ternari perchè in esse si realizza il valore di 3 : 2 del rapporto tra elettroni ed atomi con un numero complessivo di atomi delle tre specie A , B ed E minore di quello che occorrerebbe

per realizzare lo stesso rapporto se gli atomi stessi fossero invece riuniti in un miscuglio di composti binari del tipo A_5E_3 e B_5E .

La « condensazione » accennata è possibile se le fasi binarie hanno una specie di atomi in comune, nell'esempio la specie E, ed altre due specie, A e C, diverse, ma con numeri di atomi uguali, nell'esempio 5, o con un divisore comune. Si possono allora combinare le formule binarie secondo coefficienti tali che il numero complessivo di atomi della specie comune, E, risulti anch'esso divisibile per il numero comune degli atomi delle altre due specie o per un divisore comune di questi numeri.

TABELLA II.

Fasi di Hume-Rothery a tre componenti.

Rapporto 3:2

Metalli componenti	Composto	Formazione
ABC	nessuno	
ABD	nessuno	
ABE	AB_2E	$1/5 (A_5E_3 + 2 B_5E)$
	A_3BE_2	$1/5 (3 A_5E_3 + B_5E)$
ABF	AB_4F	$1/7 (A_7F_3 + 4 B_7F)$
	A_2BF	$1/7 (2 A_7F_3 + B_7F)$
ACD	nessuno	
ACE	A_2CE	$1/3 (AC_3 + A_5E_3)$
ACF	A_3C_2F	$1/3 (2 AC_3 + A_7F_3)$
	A_5CF_2	$1/3 (AC_3 + 2 A_7F_3)$
ADE	nessuno	
ADF	nessuno	
AEF	A_4EF	$1/3 (A_5E_3 + A_7F_3)$
BCD	nessuno	
BCE	nessuno	
BCF	nessuno	
BDE	nessuno	
BDF	nessuno	
BEF	nessuno	

Rapporto 21:13

Metalli componenti	Composti					
ABC	AB_3C_9	A_2BC_{10}				
ABD	$A_2B_6D_5$	$A_4B_3D_6$				
ABE	AB_9E_3	$A_4B_5E_4$	A_7BE_5			
ABF	$A_4B_6F_3$	A_8BF_4				
ACD	A_3C_9D	$A_4C_6D_3$	$A_5C_3D_5$			
ACE	$A_6C_{19}E$	$A_7C_{17}E_2$	$A_8C_{15}E_3$	$A_9C_{13}E_4$	$A_{10}C_{11}E_5$	
	$A_{11}C_9E_6$	$A_{12}C_7E_7$	$A_{13}C_5E_8$	$A_{14}C_3E_9$	$A_{15}CE_{10}$	
ACF	$A_7C_3F_3$	A_4C_8F				
ADE	$A_{23}DE_{15}$	$A_{15}D_2E_9$	$A_7D_3E_3$			
AEF	A_8E_4F	$A_{17}E_3F_6$	$A_{16}E_2F_{11}$	$A_{35}EF_{16}$		
BCD	B_6C_6D	$B_7C_4D_2$	$B_8C_2D_3$			
BCE	B_7C_5E	$B_9C_2E_2$				
BCF	B_8C_4F					
BDE	$B_{10}DE_2$					
BEF	$B_{21}E_4F$					

segue: TABELLA II.

Rapporto 7:4

ABC	nessuno		
ABD	ABD ₂		
ABE	A ₃ B ₂ E ₃	A ₆ BE ₅	
ABF	AB ₂ F	A ₇ BF ₄	
ACD	AC ₂ D	A ₃ CD ₄	
ACE	A ₂ C ₅ E	A ₃ C ₃ E ₂	A ₄ CE ₃
ACF	A ₂ CF		
ADE	A ₂ DE		
ADF	A ₄ D ₃ F	A ₇ D ₂ F ₃	A ₂₀ DF ₅
AEF	A ₅ EF ₂	A ₇ E ₄ F	
BCD	B ₂ CD		
BCF	B ₅ C ₂ F	B ₉ CF ₂	
BCE	nessuno		
BDE	nessuno		
BDF	B ₆ DF		
BEF	nessuno		

Applicando sistematicamente il metodo esposto si sono determinate le formule possibili per i composti ternari riportate in Tabella II. Per i composti con rapporto 3:2 si sono indicati i modi di formazione delle formule, a titolo di esempio.

In modo analogo si sono determinate le formule dei composti quaternari, quinari e senari, riportate nelle Tabelle III, IV e V. Si ha ad esempio per il primo composto della Tabella III:

$$A B_4 C_7 D = 1/5 (4 C_5 D_8 + A_5 C_3 D_5)$$

cioè, al solito, nelle formule più semplici che si combinano gli atomi A, B e D non comuni hanno lo stesso indice 5, mentre gli atomi C della specie comune hanno indici diversi.

Le formule trovate si sono ordinate nelle tabelle in modo che appaiano evidenti le regolari variazioni dei diversi indici numerici lungo le linee e le colonne. Queste regolarità confermano, come ci si convince facilmente, che le formule elencate sono effettivamente *tutte* quelle possibili.

Per le verifiche sperimentali effettuate, alle quali posso qui per esigenze di spazio soltanto accennare, ho proceduto anzitutto alla preparazione di composti ternari tra metalli delle specie A, B ed E. Secondo la Tabella II tra metalli di questi tipi si possono formare i seguenti composti:

rapporto 3:2	AB ₂ E	A ₃ BE ₂	
rapporto 21:13	AB ₉ E ₃	A ₄ B ₅ E ₄	A ₇ BE ₅
rapporto 7:4	A ₃ B ₂ E ₃	A ₆ BE ₅	

Se come metallo di transizione si sceglie il nichel, come metallo monovalente il rame e come metallo tetravalente lo stagno, cioè metalli che soddisfino reciprocamente alle condizioni di formare soluzioni solide⁽⁴⁾ e presentino quindi la

(4) W. HUME-ROTHERY, op. cit., p. 57 e sg.

possibilità di portare effettivamente a contatto in un unico reticolo le tre specie di atomi, a queste formule corrispondono i composti:

rapporto 3 : 2	NiCu ₂ Sn	Ni ₃ CuSn ₂	
rapporto 21 : 13	NiCu ₉ Sn ₃	Ni ₄ Cu ₅ Sn ₄	Ni ₇ CuSn ₅
rapporto 7 : 4	Ni ₃ Cu ₂ Sn ₃	Ni ₆ CuSn ₅	

Essi si sono preparati direttamente mediante fusione dei costituenti nelle proporzioni volute.

TABELLA III.

Fasi di Hume-Rothery a quattro componenti.

Rapporto 3 : 2

Nessun composto

Rapporto 21 : 13

Metalli componenti

Composti

ABCD	AB ₄ C ₇ D	A ₂ B ₂ C ₈ D				
	AB ₅ C ₅ D ₂	A ₂ B ₃ C ₆ D ₂	A ₃ BC ₇ D ₂			
	AB ₆ C ₃ D ₃	A ₂ B ₄ C ₄ D ₃	A ₃ B ₂ C ₅ D ₃			
	AB ₇ CD ₄	A ₂ B ₅ C ₂ D ₄	A ₃ B ₃ C ₃ D ₄	A ₄ BC ₄ D ₄		
			A ₃ B ₄ CD ₅	A ₄ B ₂ C ₂ D ₅		
					A ₅ BCD ₆	
ABCE	AB ₅ C ₆ E	A ₂ B ₃ C ₇ E	A ₃ BC ₈ E			
	AB ₇ C ₃ E ₂	A ₂ B ₅ C ₄ E ₂	A ₃ B ₃ C ₅ E ₂	A ₄ BC ₆ E ₂		
		A ₂ B ₇ CE ₃	A ₃ B ₅ C ₂ E ₃	A ₄ B ₃ C ₃ E ₃	A ₅ BC ₄ E ₃	
					A ₅ B ₃ CE ₄	A ₆ BC ₂ E ₄
ABCF	AB ₆ C ₅ F	A ₂ B ₄ C ₆ F	A ₃ B ₂ C ₇ F			
	AB ₉ CF ₂	A ₂ B ₇ C ₂ F ₂	A ₃ B ₅ C ₃ F ₂	A ₄ B ₃ C ₄ F ₂	A ₅ BC ₅ F ₂	
					A ₅ B ₄ CF ₃	A ₆ B ₂ C ₂ F ₃
ABDE	AB ₈ D ₃ E	A ₂ B ₇ D ₂ E ₂	A ₃ B ₆ DE ₃			
			A ₃ B ₅ D ₄ E	A ₄ B ₄ D ₃ E ₂	A ₅ B ₃ D ₂ E ₃	A ₆ B ₂ DE ₄
					A ₅ B ₂ D ₅ E	A ₆ BD ₄ E ₂
ABDF	A ₂ B ₇ D ₃ F	A ₄ B ₄ D ₄ F	A ₆ BD ₅ F			
	A ₂ B ₈ DF ₂	A ₄ B ₅ D ₂ F ₂	A ₆ B ₂ D ₃ F ₂			
			A ₆ B ₃ DF ₃			
ABEF	A ₂ B ₈ E ₂ F	A ₃ B ₇ EF ₂				
ACDE	A ₄ C ₇ DE	A ₅ C ₄ D ₃ E	A ₆ CD ₅ E			
		A ₅ C ₅ DE ₂	A ₆ C ₂ D ₃ E ₂			
			A ₆ C ₃ DE ₃			
				A ₇ CDE ₄		
ACDF	A ₅ C ₅ D ₂ F	A ₆ C ₂ D ₄ F				
		A ₆ C ₄ DF ₂	A ₇ CD ₃ F ₂			
ACEF	A ₅ C ₆ EF	A ₆ C ₄ E ₂ F	A ₇ C ₂ E ₃ F			
				A ₈ CEF ₃		
ADEF	A ₁₇ DEF ₇	A ₇ D ₄ EF				
BCDE	B ₈ C ₃ DE	B ₉ CD ₂ E				
BCDF	B ₉ C ₂ DF					
BDEF	nessuno					
BCEF	B ₁₀ CEF					

Rapporto 7 : 4 - Esistono solo i seguenti tre composti:

ABCE A₄BDF₂ A₄BE₂F

TABELLA IV.

Fasi di Hume-Röthery a cinque componenti.

Rapporto 21 : 13

Metalli componenti		Composti				
ABCDE	AB ₆ C ₄ DE	A ₂ B ₄ C ₅ DE	A ₃ B ₂ C ₆ DE			
	AB ₇ C ₂ D ₂ E	A ₂ B ₅ C ₃ D ₂ E	A ₃ B ₃ C ₄ D ₂ E	A ₄ BC ₅ D ₂ E		
		A ₂ B ₆ CD ₃ E	A ₃ B ₄ C ₂ D ₃ E	A ₄ B ₂ C ₃ D ₃ E		
				A ₄ B ₃ CD ₄ E	A ₅ BC ₂ D ₄ E	
	AB ₈ CDE ₂	A ₂ B ₆ C ₂ DE ₂	A ₃ B ₄ C ₃ DE ₂	A ₄ B ₂ C ₄ DE ₂		
			A ₃ B ₅ CD ₂ E ₂	A ₄ B ₃ C ₂ D ₂ E ₂	A ₅ BC ₃ D ₂ E ₂	
					A ₅ B ₂ CD ₃ E ₂	
				A ₄ B ₄ CDE ₃	A ₅ B ₂ C ₂ DE ₃	
						A ₆ BCD ₂ E ₃
ABCEF	AB ₈ C ₂ EF	A ₂ B ₆ C ₃ EF	A ₃ B ₄ C ₄ EF	A ₄ B ₂ C ₅ EF		
			A ₃ B ₆ CE ₂ F	A ₄ B ₄ C ₂ E ₂ F	A ₅ B ₂ C ₃ E ₂ F	
				A ₄ B ₅ CE ₂ F	A ₅ B ₃ C ₂ E ₂ F	
				A ₆ BC ₃ EF ₂		A ₇ BCE ₂ F ₂
ABDEF	AB ₉ DEF		A ₃ B ₆ D ₂ EF		A ₅ B ₃ D ₃ EF	
				A ₄ B ₅ DE ₂ F		A ₆ B ₂ D ₂ E ₂ F
					A ₅ B ₄ DE ₂ F	A ₇ B ₂ D ₂ EF ₂
ACDEF			A ₇ CD ₂ E ₂ F			
			A ₇ C ₂ DEF ₂			
BCDEF			nessuno			

Non esistono composti quinari con rapporto 3 : 2 e con rapporto 7 : 4.

TABELLA V.

Fasi di Hume-Röthery a sei componenti.

Rapporto 21 : 13

		Composti		
A ₂ B ₇ CDEF	A ₃ B ₅ C ₂ DEF	A ₄ B ₃ C ₃ DEF	A ₅ BC ₄ DEF	
		A ₄ B ₄ CD ₂ EF	A ₅ B ₂ C ₂ D ₂ EF	
				A ₆ BCD ₃ EF
				A ₆ B ₂ CDEF ₂

Non esistono composti senari con rapporto 3 : 2 e con rapporto 7 : 4.

L'analisi strutturale con i raggi X ha effettivamente mostrato che i primi due composti hanno reticolo cubico a corpo centrato, i secondi il reticolo dell'ottone γ (composto Cu_7Zn_8) e gli ultimi due reticolo esagonale compatto.

Altre verifiche eseguite su composti a 4, 5 e 6 componenti hanno dato ugualmente risultati positivi, ma l'argomento richiede una più estesa trattazione, che sarà svolta in altra sede, limitandosi qui ai pochi cenni ora detti.

Nell'esempio citato le formule innanzi date permettono di individuare nel sistema ternario Ni-Cu-Sn, ancora non completamente studiato, sette punti in corrispondenza dei quali esistono fasi di struttura nota ed è facile rendersi conto dell'utilità pratica di questa possibilità nello studio delle leghe a molti componenti.

È infine da richiamare l'attenzione sul fatto che in una formula qualsiasi il numero complessivo di atomi di un tipo può anche essere formato con atomi di specie diversa, purchè della stessa valenza. Ad esempio alla formula AB_2E corrispondono sia il composto $NiCu_2Sn$ che il composto $Ni(CuAg)Sn$.

Da quanto si è qui brevemente esposto, con riserva di una prossima più estesa trattazione, appare confermata la grande fecondità delle idee primitive di Hume-Rothery di ricercare una guida alla interpretazione dei diagrammi di stato nella considerazione della concentrazione degli elettroni di valenza. La fecondità e il valore euristico di quelle idee appaiono in piena e maggiore luce dalla possibilità qui esposta di applicazione allo studio di sistemi a più di due componenti.

Chimica organica. — *Sullo spettro ultrarosso del pirrolo tra 2,8 e 4 μ . Sdoppiamento della banda ultrarossa riferita al gruppo NH (*)*.
Nota di PAOLO MIRONE, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

Lo spettro ultrarosso del pirrolo, dopo essere stato studiato da Coblentz⁽¹⁾, non fu mai riesaminato completamente con mezzi di maggiore potenza. I lavori successivi presero in esame solo le porzioni di spettro tra il visibile e $1,2 \mu$ ⁽²⁾, e al di là di 5μ ^{(3), (4)}.

Inoltre fu studiato l'assorbimento del pirrolo in soluzione di tetracloruro di carbonio: da Wulf e Liddel nella zona tra $1,4$ e $1,5 \mu$ ⁽⁵⁾, e da Gordy e Stanford nella zona tra $2,7$ e 3μ ⁽⁶⁾.

Gli autori di quest'ultimo lavoro trovarono che la banda riferita al gruppo NH, con massimo nel pirrolo puro a circa 3450 cm^{-1} , si sposta a 3590 cm^{-1} in soluzione $0,1 \text{ M}$ di tetracloruro di carbonio (pari a una concentrazione termodinamica $\gamma \cong 0,01$). Analoghi spostamenti essi trovarono per diverse altre sostanze contenenti il gruppo NH o NH_2 , quali, per esempio, la difenilammina. Essi interpretarono senz'altro questi spostamenti come dovuti all'esistenza di legami a idrogeno, e quindi di associazioni intermolecolari, nelle sostanze allo

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica del C. N. R. nell'Istituto chimico «C. Ciamician» di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) W. W. COBLENTZ, *Investigations of Infra-red Spectra*. 1905, p. 99 e p. 278.

(2) R. MANZONI-ANSIDEI e M. ROLLA, «La Ricerca Scientifica», ser. II, anno IX, vol. I, n. 7-8.

(3) R. MANZONI-ANSIDEI e M. ROLLA, «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», Classe di Scienze Fis. Mat. Nat., XXVII, 410 (1938).

(4) R. C. LORD jr. e FOIL A. MILLER, «J. Chem. Phys.», 10, 328 (1942).

(5) O. R. WULF e U. LIDDEL, «J. Amer. Chem. Soc.», 57, 1464 (1935).

(6) W. GORDY e S. C. STANFORD, «J. Am. Chem. Soc.», 62, 497 (1940).

stato puro. Poco dopo però, Buswell ed altri⁽⁷⁾ mostrarono che non è ammissibile interpretare in tal senso ogni spostamento di questo genere osservato, potendo questo effetto, specie se lieve, essere dovuto a cause di tutt'altro genere, quali azioni polari del solvente, forze di Van der Waals ecc. Buswell ed altri pensavano che, nel caso specifico del pirrolo e della difenilammina, non vi fosse associazione.

D'altra parte Bonino⁽⁸⁾ aveva precedentemente osservato che una dimerizzazione delle molecole del pirrolo potrebbe render conto di alcune discordanze notate tra lo spettro Raman e lo spettro ultrarosso di questa sostanza. Mi è sembrato pertanto di estremo interesse studiare, con maggiore accuratezza di quanto sia stato fatto finora, lo spettro del pirrolo e di sue soluzioni in tetracloruro di carbonio tra 2,8 e 4 μ . A tal uopo mi sono servito di uno spettrofotometro Beckman mod. IR 2, dotato di prisma in fluoruro di litio.

Le bande osservate sul pirrolo allo stato puro⁽⁹⁾ sono raggruppate nella tabella seguente:

$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	I %	$\bar{\nu}$ Coblenz (cm^{-1})
3415	95	3390
3115	20	3100
3085	20	—
3040	2	—
2925	20	—
2805	3	2800
2700	5	—
2675	3	—
2605	3	—
2560	10	2530
2470	3	—

I è l'intensità percentuale di assorbimento, valutata molto approssimativamente. Questo spettro fu osservato schiacciando senz'altro una goccia di pirrolo tra due lastrine di fluorite; lo spessore dello strato liquido così ottenuto può considerarsi compreso tra 0,005 e 0,01 mm.

Negli spettri delle soluzioni di pirrolo in tetracloruro di carbonio, ho notato un fatto particolarmente interessante riguardante la banda riferita alla vibrazione di valenza del gruppo NH, banda che ha il massimo verso 3415 cm^{-1} .

(7) A. M. BUSWELL, J. R. DOWNING e W. H. RODEBUSH, « J. Am. Chem. Soc. », 62, 2759 (1940).

(8) G. B. BONINO, « Atti del II Congr. Internaz. di Chimica », Roma 1938, vol. II, p. 141.

(9) Il campione di pirrolo puro sintetico è stato preparato in questo Istituto dalla prof.ssa E. Ghigi che ringrazio vivamente.

Verso le minori lunghezze d'onda, e precisamente a 3510 cm^{-1} , si manifesta una seconda componente di questa banda, la cui intensità relativa aumenta al diminuire della concentrazione del pirrolo, mentre corrispondentemente diminuisce l'intensità relativa della componente verso 3415 cm^{-1} . Infatti, per una concentrazione (termodinamica) di pirrolo $\gamma = 0,25$, la componente a 3510 cm^{-1} si manifesta come un aguzzo « picco » sul « versante » della componente originaria, che ha ora il massimo a 3410 cm^{-1} ; per $\gamma = 0,15$ le due componenti hanno la stessa intensità, e i massimi sono a 3510 cm^{-1} e a 3420 cm^{-1} ; per $\gamma = 0,05$ la componente a 3510 cm^{-1} è già molto più intensa di quella a 3420 cm^{-1} , e infine, per $\gamma = 0,02$, la componente verso 3415 cm^{-1} scompare quasi completamente, e resta solo un'aguzzo componente a 3510 cm^{-1} .

È interessante osservare che le due componenti hanno una forma notevolmente diversa: mentre la componente verso 3415 cm^{-1} presenta un massimo un po' arrotondato nel pirrolo sia puro che in soluzione, quella a 3510 cm^{-1} presenta un massimo estremamente netto, molto simile a quelli della vicina banda del vapor d'acqua.

Le soluzioni sono state esaminate nei seguenti spessori:

soluzione a $\gamma = 0,25 : 0,05\text{ mm}$

soluzioni a $\gamma = 0,15$, $\gamma = 0,05$, $\gamma = 0,02 : 0,10\text{ mm}$.

Durante la registrazione degli spettri, la larghezza della fenditura veniva fatta variare con continuità per mezzo di un semplice dispositivo ideato da me, in modo di compensare la non uniformità di emissione della lampada Nernst. La larghezza della fenditura assumeva i seguenti valori corrispondenti alle larghezze spettrali segnate tra parentesi:

a $2,8\text{ }\mu : 0,215\text{ mm}$ (30 cm^{-1})

a $3,4\text{ }\mu : 0,28\text{ mm}$ (22 cm^{-1})

a $4,0\text{ }\mu : 0,37\text{ mm}$ (17 cm^{-1}).

DISCUSSIONE. — Wulf e Liddel⁽¹⁰⁾ osservarono che, in soluzione di tetracloruro di carbonio, la prima armonica della banda dell'NH pirrolico, posta a 6859 cm^{-1} , era accompagnata da un debole satellite a circa 50 cm^{-1} dalla parte delle maggiori lunghezze d'onda. D'altra parte, Freyman⁽¹⁰⁾ e successivamente Zumwalt e Badger⁽¹¹⁾ osservarono che la seconda armonica della stessa banda nel vapore di pirrolo è costituita di tre componenti di intensità decrescente verso le maggiori lunghezze d'onda, con massimi rispettivamente a 10183 , 10111 e 10039 cm^{-1} . Pauling⁽¹²⁾ spiegava il raddoppio della prima armonica supponendo che la componente principale fosse dovuta a una molecola piana, e la secondaria a una molecola in cui l'idrogeno imminico sta fuori dal piano dell'anello. Zumwalt e Badger invece concludono, in base a un accurato studio della forma delle

(10) M. FREYMAN, « Ann. de Chemie », 11, 11 (1939).

(11) L. R. ZUMWALT e R. M. BADGER, « J. Chem. Phys. », 7, 629 (1939).

(12) L. PAULING, « J. Amer. Chem. Soc. », 58, 94 (1936).

tre componenti della seconda armonica, che queste sono dovute ad assorbimento a partire da stati di differente eccitazione vibrazionale.

Comunque stiano le cose, è chiaro che lo sdoppiamento da me osservato, manifestandosi in due componenti separate da un intervallo di circa 100 cm^{-1} , è dovuto a cause di natura ben diversa da quelle che provocano i due fenomeni sopraccennati.

L'ipotesi più semplice che si affaccia per la spiegazione dello sdoppiamento della banda dell'NH pirrolico consiste nell'ammettere che vi sia un'associazione tra le molecole di pirrolo allo stato puro, associazione che avverrebbe attraverso gli idrogeni imminici e quindi diminuirebbe la frequenza della loro oscillazione di valenza. In soluzioni via via più diluite, la percentuale di molecole impegnate in tale associazione diverrebbe sempre minore, e corrispondentemente nello spettro di assorbimento si formerebbe e finirebbe per prevalere una nuova banda a frequenza più alta, prodotta dalla vibrazione di quei gruppi NH non più impegnati nell'associazione suddetta.

Tuttavia, non è semplice rendersi conto del modo con cui questa associazione può stabilirsi tra le molecole di pirrolo. Infatti le proprietà aromatiche del pirrolo richiedono la presenza di un sestetto di elettroni p_z ; l'atomo che dovrebbe fornire due di tali elettroni sarebbe quello di azoto, il quale dovrebbe avere perciò la struttura $1s^2 2s^2 2p_x p_y p_z^2$. Agli orbitali di valenza di tale struttura spetta una simmetria trigonale piana, e perciò l'idrogeno imminico dovrebbe giacere nel piano della molecola del pirrolo. In tali condizioni, l'unica forma di associazione pensabile è quella schematizzabile nel seguente modo:



in cui i due anelli pentatomici giacciono in due piani paralleli, e tra ciascun azoto e ciascun idrogeno si stabilisce un debole legame di carattere polare.

Bisogna però ricordare, che la questione, se l'idrogeno imminico stia o non nel piano della molecola, non è ancora definita a favore della prima alternativa. Il fatto, per esempio, che nello N-acetilpirrolo il legame $C=O$ non si coniughi con l'anello, come si ricava dallo spettro Raman, parla decisamente a favore della seconda alternativa. In tal caso, l'azoto dovrebbe avere la struttura $1s^2 2s^2 2p_x p_y p_z$, cui corrisponde per gli orbitali di valenza una simmetria trigonale piramidale. L'associazione intermolecolare potrebbe così avvenire per mezzo di due veri e propri legami a idrogeno, e si potrebbe avere risonanza tra le due strutture:



In entrambi i casi, la banda verso 3400 cm^{-1} sarebbe dovuta alle molecole associate, e quella a 3510 cm^{-1} alle molecole non associate.

È interessante notare che la struttura (I) possiede una simmetria C_{2h} e al struttura (II) una simmetria D_{2h} ; ambedue hanno perciò un centro di simmetria. Bonino⁽⁸⁾ osservò che la presenza di tale elemento di simmetria nel pirrolo allo stato liquido potrebbe spiegare le parziali discordanze tra lo spettro ultrarosso e lo spettro Raman di questa sostanza.

Si può anche supporre che le due componenti della banda dell'NH siano dovute a due diverse specie molecolari in equilibrio. L'equilibrio sarebbe completamente spostato in un senso nel pirrolo allo stato puro, nell'altro senso nel pirrolo in soluzione molto diluita ($\gamma \leq 0,02$).

Le due forme in equilibrio potrebbero essere le stesse introdotte da Pauling per spiegare il raddoppio della prima armonica, ma allora per tale raddoppio occorrerebbe immaginare una nuova spiegazione.

Infine, si potrebbe pensare che le due frequenze osservate a 3415 e 3510 cm^{-1} siano dovute a un effetto Fermi⁽¹³⁾, cioè a una risonanza tra due livelli di vibrazione della molecola molto vicini e interagenti tra di loro. Uno di questi livelli sarebbe naturalmente dato dalla fondamentale della vibrazione di valenza dell'NH, mentre l'altro potrebbe essere dato dalla 2ª armonica della vibrazione di deformazione dello stesso NH, vibrazione cui Lord e Miller⁽⁴⁾ assegnano una frequenza di 1146 cm^{-1} : infatti $1146 \times 3 = 3438$. In tal caso però è difficile spiegarsi come mai nel pirrolo allo stato puro e in soluzione molto diluita si trovi solo una delle due frequenze, cioè, in altre parole, come mai il rapporto di intensità dei due assorbimenti non sia, almeno approssimativamente, costante.

Nell'ipotesi che le molecole del pirrolo allo stato puro siano associate, la frequenza da assegnarsi alla vibrazione dell'NH pirrolico sarebbe quella di 3510 cm^{-1} . Ricordando che Liddel e Wulf⁽⁵⁾ hanno trovato, in condizioni identiche alle nostre cioè in soluzione diluita di tetracloruro di carbonio, la prima armonica di questa banda a 6859 cm^{-1} , possiamo calcolare da questi dati la costante di anarmonicità e la vera frequenza dell'oscillazione in questione. Abbiamo:

$$(1 - 2x) \omega_e = 3510 \text{ cm}^{-1}$$

$$(1 - 3x) 2 \omega_e = 6859 \text{ cm}^{-1}.$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$\omega_e = 3670 \text{ cm}^{-1} \quad x = 0,022.$$

In considerazione dell'interesse del problema, abbiamo intenzione di estendere le nostre ricerche sull'assorbimento in ultrarosso del gruppo NH a omologhi del pirrolo (tetrametilpirrolo, indolo, carbazolo), alla difenilammina e ad altri eterocicli contenenti il gruppo NH.

Ringrazio il prof. G. B. Bonino, il quale mi ha accolto ed ospitato in questo Centro Studi, mi ha proposto questa ricerca e mi ha messo a disposizione tutti i mezzi necessari per eseguirla, mi ha fornito consigli e sviluppato discussioni sui risultati di queste esperienze.

(13) D. M. DENNISON, «Rev. Mod. Phys.», 12, 179 (1940).

Chimica. — *Ricerche sui composti solforati organici. Spettri u. v. e su alcune proprietà dei difenil-solfuri -solfossidi e -solfoni in acido solforico concentrato*^(*). Nota di ANGELO MANGINI e RICCARDO PAS-SERINI, presentata^(**) dal Socio GIOV. B. BONINO.

A seguito della gran massa dei dati numerici già pubblicati⁽¹⁾, e disponendo ora di altri numerosi risultati sperimentali (sono stati esaminati nel complesso oltre 150 composti fra alchil-aril- e diaril-solfuri, -solfossidi e -solfoni e registrati oltre 1000 spettri nell'u. v. e nel visibile), ci è stato possibile caratterizzare i sistemi cromoforici responsabili dell'assorbimento del difenil-solfuro, e studiarne le « modificazioni » in relazione agli effetti induttivo, mesomero e sterico di alcuni sostituenti (CH_3 , Alg , OCH_3 , NH_2 , NO_2); lo studio è stato esteso ad alcuni termini piridinici.

Collegate a queste ricerche, sono quelle sull'alocromia in acido solforico concentrato presentata da alcuni nitro-difenil-solfuri, anche in relazione ai difenil-solfossidi e difenil-solfoni.

Rimandando ad altra sede una discussione più approfondita, riassumiamo qui le più significative conclusioni.

1. *Difenil-solfuro e suoi derivati* CH_3- , $\text{Alg}-$, NO_2- *sostituiti*⁽¹⁾. a) Le due bande di assorbimento u. v. del difenil-solfuro, 250 e 274 $\text{m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.08$, 3.75 [a bassa temperatura, -150° e -180° , la posizione delle bande rimane praticamente inalterata; di assai poco potenziate le intensità⁽²⁾], vengono attribuite a due diversi stati di eccitazione della molecola, aventi sede nello stesso fenile, o anche nell'uno e nell'altro.

La banda 250 $\text{m}\mu$ viene assegnata essenzialmente alla eccitazione del sistema esa-elettronico benzenico $\text{C}_6\text{H}_5-\overset{*}{\text{S}}$, cromoforo π^6 , modificato dalla catena laterale $\text{S}-\text{C}_6\text{H}_5$ (detta eccitazione, cioè, viene considerata come una forma perturbata della transizione B_{2u} del benzolo); la banda 275 $\text{m}\mu$, a sua volta, viene considerata come corrispondente alla eccitazione del sistema $\text{C}_6\text{H}_5-\overset{*}{\text{S}}$, cromoforo otto-elet-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) A. MANGINI, « R. A. L. », ser. VIII, vol. VII, fasc. 6, 321 (1949); A. MANGINI, R. PAS-SERINI, ib. ib., 324; « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, VII, 63, 64, 65 (1949); VIII, 12, 14, 15, 133 (1950); « Chem. Ab. », 44, 8771, 9251 (1950); 45, 3241 (1951).

Parte di queste ricerche costituiscono argomento di altra Nota in corso di stampa.

(2) Ricerche in corso nel « W. Ramsay and Ralph Forster Laboratory », University College, London: ci è assai gradito in questa occasione rivolgere il nostro più vivo ringraziamento al prof. C. K. Ingold per la sua squisita ospitalità e per i mezzi che con tanta amichevole larghezza à messo a nostra disposizione. Alcune di queste ricerche sulla spettroscopia di assorbimento u. v. nei solventi rigidi, rientrano nel piano di studi per cui fu assegnata a uno di noi (M.) una borsa Donegani.

tronico (cui prende parte una delle coppie elettroniche dello zolfo) $\pi_{(S)}^8$, modificato dal gruppo C_6H_5 :



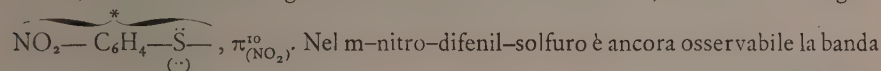
b) Lo spettro u. v. del difenil-solfuro, e così quello del tioanisolo, non viene sostanzialmente modificato dalla presenza nelle varie posizioni di un metile o di un alogeno; anche la presenza di due metili in o-o'- al ponte di zolfo non modifica lo spettro (assenza di effetto sterico): perciò i cromofori responsabili dell'assorbimento sono ancora quelli del difenil-solfuro, come non modificati.

Notevoli modificazioni invece compaiono negli o-o'-dialogeno-difenil-solfuri (3).

c) Nei nitro-difenil-solfuri (o-, m-, p-), insorge un nuovo massimo nella zona 335-370 m μ , e nel ramo della curva verso le minori λ (da circa 290 m μ) si osservano modificazioni più o meno notevoli rispetto al difenil-solfuro (modificazioni o inattivazione dei sistemi π^6 e $\pi_{(S)}^8$, ad opera del gruppo nitrico).

La banda verso le maggiori λ viene attribuita alla eccitazione del sistema contenente l' NO_2 .

Nell'o e nel p-nitro-difenil-solfuro, ma più attenuata rispetto ai nitro-tioanisoli, è evidente la coniugazione $S-NO_2$ attraverso il fenile, cromoforo coniugato



del sistema comprendente l' NO_2 , ma assai indebolita: cromoforo $-\overset{*}{C_6H_4}-NO_2$, $\pi_{(NO_2)}^8$, e al quale quindi non partecipa la coppia elettronica dello zolfo.

I nitro-tio-anisoli non si differenziano sostanzialmente dai nitro-difenil-solfuri.

d) Nei nitro-fenil-tolil-solfuri, e nei nitro-fenil-alogeno-fenil-solfuri non si osservano sostanziali variazioni dello spettro rispetto ai nitro-difenil-solfuri, e in particolare la banda corrispondente alla eccitazione del sistema $\pi_{(NO_2)}^{10}$ viene assai poco modificata.

Nei poli-nitro-difenil-solfuri la banda corrispondente al cromoforo $\pi_{(NO_2)}^{10}$ cade nel campo 340-380 m μ .

2. *Piridil-fenil-solfuri* (1). - a) Nel piridil-metil-solfuro-(I) compaiono ancora due bande, 250 e 292 m μ , che vengono rispettivamente attribuite alla eccitazione dei due sistemi $\pi_{(PY)}^6$ e $\pi_{(S, PY)}^8$: tali bande si ritrovano di poco modificate nel

(3) A. MANGINI, R. PASSERINI, G. LEANDRI, « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, IX (1951), in corso di stampa.

piridil-fenil-solfuro-(II): $\overline{\text{NC}_5\text{H}_4-}$, $\pi_{(\text{Py})}^6$ [modificato da $-\text{S}-\text{CH}_3$ in (I), e da $-\text{S}-\text{C}_6\text{H}_5$ in (II)], $\overline{\text{NC}_5\text{H}_4-\text{S}}$, $\pi_{(\text{S}, \text{Py})}^8$ [modificato da CH_3 in (I), e da C_6H_5 in (II)].

In (II) compare, inoltre, pur se involupato il cromoforo $\pi_{(\text{S}, \text{C}_6\text{H}_5)}^8$.

b) Nello spettro del 2-(5-nitro)-piridil-metil- e -fenil-solfuro si ritrovano due bande, 335-330 m μ , simili a quelle del p-nitro-tio-anisolo e del p-nitro-difenil-solfuro (337-340 m μ), e quindi corrispondenti alla eccitazione del sistema $\pi_{(\text{NO}_2, \text{Py})}^{10}$.

I nitro-piridil-alogeno-fenil-solfuri sono, a loro volta, da considerare essenzialmente dei nitro-fenil-alogeno-fenil-solfuri, e il 4-4'-dinitro-fenil-piridil-solfuro (λ mass. 341 m μ , $\lg \epsilon = 4.24$) come il 4-4'-dinitro-difenil-solfuro (λ mass. 334 m μ , $\lg \epsilon = 4.18$).

3. *Amino- e amino-nitro-difenil-solfuri.* - a) Gli amino-difenil-solfuri⁽⁴⁾, gli amino-tio-anisoli⁽⁵⁾, e i loro acetil-derivati⁽⁶⁾, presentano delle curve di assorbimento il cui andamento dipende essenzialmente dalla posizione del gruppo aminico nel fenile. Nello spettro u. v., a seconda dei casi e in maniera più o meno chiaramente rilevabile, si può mettere in evidenza, pur se reciprocamente e a volte notevolmente modificata, la parte dell'assorbimento che compete alla unità coniugativa fenil-aminica $\overline{\text{C}_6\text{H}_4-\text{NH}_2}$, sistema $\pi_{(\text{NH}_2)}^8$, o al residuo solforato della molecola.

In particolare, l'unica banda di assorbimento del p-amino-difenil-solfuro (λ mass. = 256 m μ ; $\lg \epsilon = 4.28$) viene considerata un « involuppo non risolto », cui partecipano più cromofori, fra i quali il $\pi_{(\text{NH}_2)}^8$.

Nei cloridrati degli amino-difenil-solfuri⁽⁷⁾ ricompare praticamente inalterato lo spettro del difenilsolfuro.

(4) Lo spettro del p-amino-difenil-solfuro, in soluzione alcolica e acida, è stato per primo registrato da MANGINI e PASSERINI, « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, VIII, 12, 133 (1950); « Chem. Ab. », 44, 9251 (1950); 45, 3241 (1951).

In un recente lavoro SZMANT e MC. INTOSH (« J. Am. Chem. Soc. », 73, 4356 (1951)) riportano i dati relativi all'assorbimento, oltre che dello stesso p-amino-difenil-solfuro, anche del: p-nitro- e p-p'-dinitro-difenil-solfuro, difenil-solfone, p-amino-difenil-solfone, p-p'-dinitro-difenil-solfossido e -solfone, p-nitro-p'-amino-difenil-solfuro -solfossido e -solfone. Di tutti questi composti Mangini e Passerini avevano già registrato da tempo gli spettri e pubblicati i risultati numerici [ved. nota (1)], del resto praticamente coincidenti con quelli dei citati Autori. A seguito della recensione sul « Chem. Ab. » (loc. cit.) dei citati lavori, H. Szmant (lett. 9 maggio 1951) richiedeva a uno di noi (M.) gli estratti; questi furono spediti con lettera di accompagnamento il 18 maggio 1951: i citati Autori peraltro non fanno alcun riferimento alle nostre ricerche.

Per gli altri amino-difenil-solfuri, anche sostituiti, cfr.: MANGINI, PASSERINI, « R. A. L. » e « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, loc. cit.

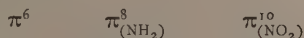
(5) I dati relativi agli o- e m-amino-tio-anisoli, sono in corso di stampa su « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, IX (1951).

Lo spettro del p-amino-tio-anisolo è stato anche descritto da FEHNEL e CARMACK, « J. Am. Chem. Soc. », 71, 2889 (1949), i risultati dei quali coincidono con i nostri.

(6) MANGINI, PASSERINI, loc. cit.

(7) MANGINI, PASSERINI, « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, VIII, 133 (1950).

b) All'assorbimento degli amino-fenil-nitro-fenil-solfuri^(1,3) sono di regola interessati, più o meno modificati, i sistemi



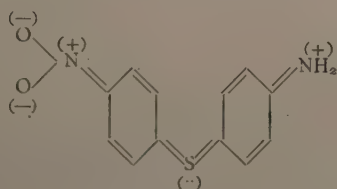
agenti però come praticamente « isolati »⁽⁸⁾.

Ed invero, per quanto specificatamente riguarda le modificazioni della banda cui è interessato il gruppo nitrico, indotte dal sistema $\pi_{(\text{NH}_2)}^8$, è da sottolineare che esse sono tanto ridotte da essere difficilmente attribuibili a effetti di natura coniugativa [nella seguente tabella vengono riportati i dati corrispondenti alla banda del sistema $\pi_{(\text{NO}_2)}^{10}$ dei composti $(\text{NO}_2)\text{C}_6\text{H}_4\text{-S-C}_6\text{H}_5$ e $(\text{NO}_2)\text{C}_6\text{H}_4\text{-S-C}_6\text{H}_4\text{-NX}_{2-p}$; per un miglior confronto, sono pure riportati i numeri relativi ai composti $(\text{NO}_2)\text{-C}_6\text{H}_4\text{-S-C}_6\text{H}_4\text{-X}$, $\text{X} = \text{H}, \text{CH}_3, \text{Cl}, \text{OCH}_3$; DFS = difenil-solfuro]:

Sostituente in para'	o-Nitro-DFS		m-Nitro-DFS		p-Nitro-DFS	
	λ mass.	$\lg \varepsilon$	λ mass.	$\lg \varepsilon$	λ mass.	$\lg \varepsilon$
H	368	3.65	336-346 (f)	3.02	337	4.12
NH ₂	373	3.67	=	=	345	4.12
NHAc	371	3.71	=	=	339	4.12
N(CH ₃) ₂	375	3.65	(365; c)	(3.02)	342	4.12
CH ₃	371	3.67	340-346	3.02	339	4.13
Cl	367	3.71	=	=	336	4.12
OCH ₃	373	3.65	=	=	338	4.13

f.: struttura fine; c: convessità assai poco notevole.

Questi numeri illustrano chiaramente la situazione, e sono ben lungi dal dimostrare che la coniugazione del gruppo aminico si spinge sino all' NO_2 attraverso i due fenili e il ponte di zolfo. Pertanto, nel caso specifico del p-amino-p'-nitro-difenil-solfuro, una struttura limite del tipo seguente



(8) Ricerche in corso di stampa, ved. nota (5).

come recentemente ammessa da Szmant e Mc. Intosh⁽⁹⁾ non prende significativamente parte alla mesomeria del sistema: ciò del resto anche in accordo colla geometria della molecola dei solfuri⁽¹⁰⁾.

4. *Difenil-solfuri, solfossidi e -solfoni in soluzione di acido solforico conc.*⁽¹¹⁾ -

a) In soluzione solforica (acido $d = 1.84$) lo spettro dei diaril-solfuri viene spostato verso il rosso. Ad esempio, nel difenil-solfuro le due bande $250-274 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.08, 3.75$, vengono portate a $272-308 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.08, 3.91$, ma non si nota alocromia⁽¹²⁾.

Negli o- e nei p-nitro-difenil-solfuri, ma non nei m-nitro-composti, lo spostamento batocromo è assai più grande, e lo spettro viene spostato anche sino a $600 \text{ m}\mu$, ottenendosi dei notevolissimi fenomeni alocromici (delle soluzioni solforiche di tutti questi composti abbiamo registrato lo spettro: i risultati numerici relativi alle caratteristiche spettrali al tempo « zero » sono in corso di stampa):

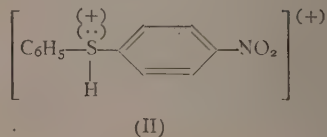
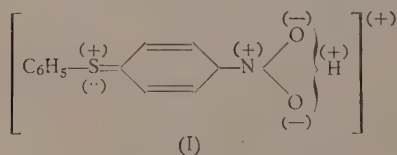
O-NITRO-DERIVATI, colorazione verde o verde azzurra (assorbimento a $\sim 400 \text{ m}\mu$, e $\sim 550-600 \text{ m}\mu$), solo in qualche caso rossa o arancione (assorbimento sui $500 \text{ m}\mu$).

P-NITRO-DERIVATI, colorazione nei vari toni del rosso (assorbimento a ~ 400 e $500 \text{ m}\mu$), in qualche caso blu-viola (assorbimento a circa $500-600 \text{ m}\mu$).

b) In acido solforico 1.84 , i solfossidi e i solfoni, pur contenenti gruppi nitrici e purchè « allo stato di estrema purezza », non danno assolutamente luogo a fenomeni di alocromia: secondo Szmant e Mc. Intosh⁽¹²⁾ il difenil-solfossido e alcuni difenil-nitro-solfossidi, e lo stesso difenil-solfuro, sono alocromi in acido solforico 100% .

Pertanto, il p-nitro-difenil-solfossido, ad esempio, che dopo nove cristallizzazioni dall'alcool fonde a 110° , anche operando nelle condizioni di Szmant e Mc. Intosh, non è assolutamente alocromo: alocromo è invece il prodotto non puro, p. f. 106° (p. f. del prodotto di Szmant e Mc. Intosh).

c) Stante il fatto che i m-nitro-difenil-solfuri e tutti i solfossidi e solfoni non presentano alocromia in $\text{H}_2\text{SO}_4 - 1.84$, per i nitrosolfuri alocromi si sono prese in considerazione, come le « maggiormente » interessate al colore, delle strutture limiti joniche, tipo jone nitronico (form. I, nel caso ad esempio del p-nitro-difenil-solfuro), come già ammesso da Pfeiffer e Heinrich per i nitro-fenil-alchil-solfuri⁽¹³⁾ - i cui risultati peraltro coincidono con i nostri - e da noi stessi⁽¹¹⁾, anzicchè quelle a tipo ione solfonio (form. II).



(9) « J. Am. Chem. Soc. », 73, 4356 (1951).

(10) TOUSSAINT, « Bull. soc. chim. Belg. », 54, 319 (1948).

(11) MANGINI, PASSERINI, « Boll. sci. fac. chim. ind. », Bologna, VIII, 133 (1950). Cfr. anche nota (3).

(12) « J. Am. Chem. Soc. », 73, 4175 (1951).

(13) PFEIFFER, HEINRICH, « Ber. », 75, 1885 (1942).

Chimica generale. — *Sullo spettro Raman dell' α -acetilfurano* (*).

Nota di PAOLO CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio GIOV. B. BONINO.

In un precedente lavoro⁽¹⁾ si è discussa la natura del caratteristico raddoppio della riga carbonilica nello spettro Raman dell'aldeide furilica e con lo studio di varie soluzioni dell'aldeide stessa in solventi diversi, associativi od inerti, si è concluso che alla base di tale caratteristica spettroscopica si debbono verosimilmente considerare fenomeni di associazione intermolecolare, sul cui meccanismo comunque, in base ai risultati che hanno formato l'oggetto di quel lavoro, non si potevano ancora formulare ipotesi attendibili.

Fenomeni analoghi di interazioni intermolecolari spettroscopicamente rilevabili si sono successivamente messi in evidenza per derivati carbonilici del pirrolo, per esempio l' α -acetilpirrolo⁽²⁾ e l' α -pirrolaldeide⁽³⁾, composti questi, tuttavia, pei quali si può pensare ad un diverso gioco di interazioni, per la presenza del gruppo N-H nell'anello eterociclico, che potrebbe prender parte attiva e diretta ai fenomeni associativi in questione.

D'altro canto, ricerche in corso di pubblicazione sullo spettro Raman dell'acetotienone (α -acetiltiofene) e dell'aldeide α -tiofenica hanno messo in luce caratteristiche nuove degli spettri Raman di questi composti, che sin qui non erano mai stati determinati. Mentre nello spettro della tiofenaldeide si riproduce il raddoppio della riga del C=O già ampiamente discusso nel caso del furfurolo, e con le stesse caratteristiche, nello spettro dell'acetotienone l'analoga riga è semplice, e dall'esame degli spettri Raman delle soluzioni benzeniche di detto composto sembra di dover concludere che verosimilmente le molecole dell'acetotienone, allo stato puro liquido, non sono fra loro apprezzabilmente associate, a differenza di quanto accade per la corrispondente aldeide.

Ci è parso che sarebbe stato interessante vedere se sia possibile stabilire un più stretto parallelismo, riguardo a questi fenomeni di interazioni intermolecolari, fra i composti carbonilici della serie furanica e tiofenica, così profondamente simili dal punto di vista della loro struttura. Un tale diretto confronto avrebbe anche potuto fornire nuovi elementi per una discussione critica più approfondita e sicura dei fenomeni di associazione messi in luce nello studio dei derivati carbonilici del pirrolo, già esaminati per l'addietro in questo Istituto.

Occorreva per questo conoscere lo spettro Raman dell' α -acetilfurano, non ancora apparso, a nostra conoscenza, nella letteratura scientifica. Su questo spettro appunto, da noi recentemente determinato, vogliamo qui brevemente riferire.

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica-fisica del C. N. R., presso l'Istituto chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) ROLLA, CHIORBOLI, «Gazz. chim. ital.», 79, 513 (1949).

(2) BONINO, CHIORBOLI, «Rend. Accad. Lincei» [VIII], 10, 104 (1951).

(3) CHIORBOLI, MORELLI-EMILIANI, «Gazz. chim. ital.», in corso di stampa.

Spettro Raman dell' α -acetilfurano.

Furano (Raman)	Furano (ultrarosso)	α -metil- furano (Raman)	α -acetilfurano puro	α -acetil- furano in sol. benzenica $\gamma=0,21$ (4)	α -acetil- furano in sol. benzenica $\gamma=0,09$ (4)	α -acetil- furano in fenolo $\gamma=0,25$ (4)
BONINO, MAN- ZONI 1934 (1)	MANZONI, ROLLA 1938 (2)	MATSUNO, HAN 1934 (3)				
—	—	—	191 (3) (5)	188 (1) (5)	—	190 (2) (5)
—	—	250 (5)	—	—	—	—
—	—	344 (3)	370 ($1/2$)	—	—	—
483 ($1/2$)	—	—	497 (1)	—	—	497 ($1/2$)
609 ($1/2$)	601 (ff)	626 (3)	627 (1)	—	—	625 ($1/2$)
—	648 (d)	655 (6)	677 ($1/2$)	—	—	—
719 ($1/2$)	740 (ff)	726 (1 dif)	—	—	—	—
—	—	799 (1 dif)	—	—	—	—
842 (1)	—	—	—	—	—	—
867 (1 $1/2$)	864 (f)	(855) (1 dif)	864 (1 $1/2$)	—	—	860 (1)
—	—	888 (3)	881 (3)	880 (1)	—	883 (1 $1/2$)
—	—	—	901 (4)	906 (2)	903 ($1/2$) (5)	904 (2)
—	—	918 (4)	916 (5)	916 ($2 1/2$)	918 ($1/2$)	916 (3)
963 ($1/2$)	—	—	957 ($2 1/2$)	959 (1)	—	955 (1 $1/2$)
985 (3)	990 (ff)	(978) (2)	969 (2)	—	—	970 ($1/2$)
—	—	—	1010 (3)	1012 (1)	—	1012 (1 $1/2$)
1034 (1 $1/2$)	—	1020 (3)	1026 ($4 1/2$)	1024 (2)	1025 ($1/2$)	1026 (6) (6)
1056 (3)	1052 (f)	1086 (8)	1077 (2)	—	—	1073 (1)
—	—	—	1101 (1 ?) f-1165	—	—	—
1137 (6)	1176 (m)	1149 (3)	1165 ($5 1/2$)	1162 (3)	1165 (1 $1/2$)	1162 ($7 1/2$) (6)
—	—	1215 (4)	1224 (1 $1/2$)	—	—	1220 (1)
—	1249 (d)	1233 (3)	—	—	—	—
—	—	—	1287 ($1/2$?) g-1389	—	—	—
1378 (8)	1375 (m)	1376 (3)	1360 (2)	—	—	1363 (1)
—	—	1389 (6)	1385 (6)	1381 ($3 1/2$)	1390 (2)	1384 (4)
—	—	—	1395 ($5 1/2$)	1392 (3)	—	1395 ($3 1/2$)
1483 (7)	1495 (ff)	1453 (4 dif)	1469 (18)	1469 (9)	1467 ($5 1/2$)	1465 (12)
—	—	1512 (10)	1515 ($1/2$?) f-1566	—	—	—
—	—	1603 (6)	1570 (6)	1568 ($3 1/2$)	1570 (2)	1570 (4)
—	—	—	1616 ($1/2$?) f-1673	—	—	—
—	—	—	1676 (13)	1683 (7)	1682 (4)	1659 (9)
—	—	2745 (2)	2752 (1)	—	—	—
—	—	2888 (3)	2878 (1)	—	—	—
—	—	2929 (7)	2926 (3)	2928 (1)	—	2925 (1)
—	—	2958 (2)	2963 ($1/2$)	—	—	—
—	—	(2998) (1)	—	—	—	—
3120 (1)	—	3122 (6)	3118 (3)	3120 (1)	—	3116 (2)
3160 (3)	—	3155 (4)	3155 ($3 1/2$)	3160 (1 $1/2$)	3160 (1)	3158 (2)

(1) BONINO, MANZONI, « Z. phys. Chem. », 25, 327 (1934).

(2) MANZONI, ROLLA, questi « Rendiconti » (VII), 27, 410 (1938).

(3) MATSUNO, HAN, « Bull. Chem. Soc. Japan », 9, 327 (1934); ved. anche MORDARD, « Bull. Soc. Chim. France », 1, 934 (1934).

(4) γ = frazione molecolare dell'acetilfurano nella miscela.

(5) Intensità misurate dalle microfotometrie degli spettri.

(6) Intensità fortemente esaltata dalla sovrapposizione di righe del fenolo.

L' α -acetilfurano utilizzato per le nostre ricerche proveniva dalla collezione di prodotti dell'Istituto: è stato purificato per ripetute distillazioni a pressione molto ridotta (tra gli 8 e i 10 mm_{Hg}) in atmosfera di azoto puro, essendo un prodotto alterabilissimo all'aria. Gli spettri sono stati ripresi con la tecnica solita, su cui già ci siamo intrattenuti in precedenti lavori. Ci si è sempre assicurati che il contenuto dei tubicini, anche dopo le pose più lunghe, fosse sempre perfettamente limpido ed incolore. Per impedire qualunque alterazione della sostanza, che all'aria ingiallisce rapidamente, i tubicini Raman sono stati chiusi alla fiamma, in atmosfera di azoto puro, sotto un vuoto corrispondente a meno di 10 mm_{Hg}.

Sono stati ripresi gli spettri sia dell'acetilfurano puro liquido, sia dell' α -acetilfurano in soluzione benzenica a varia concentrazione e in soluzione con fenolo, sempre usando sostanze aventi tutte le caratteristiche di alta purezza. I risultati sperimentali sono riassunti nella tabella allegata, insieme con gli spettri del furano e dell' α -metilfurano, per una più agevole identificazione delle principali righe proprie dell'anello eterociclico sostituito. Nel nostro spettro dell' α -acetilfurano puro sono contrassegnate con punto interrogativo talune righe che potrebbero provenire da eccitazioni secondarie di altre oscillazioni da parte delle meno intense componenti «f» e «g» a 2295 e 23040 cm⁻¹ rispettivamente del tripletto del mercurio a 4358 Å; in ogni caso sono specificate le possibili assegnazioni.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Analogamente a quanto si verifica negli spettri Raman dei derivati carbonilici sostituiti in α della serie pirrolica e tiofenica che sono stati già oggetto di precedenti discussioni, anche nello spettro dell' α -acetilfurano sono presenti le principali righe proprie dell'anello eterociclico fondamentale (colonna I della tabella) e dei derivati α -sostituiti (colonna III), come del resto era prevedibile.

In particolare però vogliamo ancora una volta soffermarci in questa sede in una più dettagliata discussione delle caratteristiche della riga carbonilica dello spettro di questo composto, per meglio rilevare analogie e differenze fra questo e gli altri composti simili già studiati.

Anzitutto è da osservare che tale riga, che cade a 1676 cm⁻¹ nello spettro dell' α -acetilfurano allo stato puro liquido, è semplice, a differenza di quanto accade per la corrispondente riga dell'aldeide furilica, che si presenta come un doppietto con le due componenti a 1669 e a 1690 cm⁻¹ rispettivamente.

Nel già citato lavoro di Rolla e Chiorboli sullo spettro Raman dell'aldeide furilica in solventi diversi e a varia concentrazione si pensò di dover attribuire la componente a più alta frequenza di tale doppietto all'oscillazione di valenza del C=O in molecole di aldeide libere da interazioni intermolecolari e quella a più bassa frequenza all'oscillazione medesima in molecole fra loro in qualche modo associate attraverso un meccanismo che perturbi direttamente il carbonile: i risultati delle varie esperienze compiute utilizzando soluzioni varie con solventi di diversa natura erano tutti perfettamente coerenti con una tale interpretazione.

Passando a considerare lo spettro Raman dell' α -acetilfurano, sembra logico e naturale ritenere la riga carbonilica a 1676 cm⁻¹ come la manifestazione spettroscopica di un gruppo C=O che abbia rispetto ad eventuali fenomeni di

perturbazione, le stesse caratteristiche del gruppo $C=O$ cui si deve, nello spettro del furfurolo, la riga a 1690 cm^{-1} , ossia, più precisamente, sembra di dover attribuire la riga in questione a 1676 cm^{-1} all'oscillazione di gruppi $C=O$ non impegnati in azioni di carattere intermolecolare ma solo perturbati piuttosto notevolmente dalla coniugazione del nucleo furanico.

Invero, passando dall'aldeide furilica all' α -acetilfurano, la sola alterazione della struttura molecolare deriva dalla sostituzione di un gruppo metilico al posto dell'idrogeno del gruppo aldeidico. Da tale sostituzione molto verosimilmente deriva al gruppo $C=O$ solo una perturbazione che si riassume nella «iperconiugazione» del metile e che deprime lievemente il carattere di doppio legame del legame $C=O$ medesimo. Come passando dalla benzaldeide all'acetofenone (entrambi considerati allo stato puro liquido) la frequenza Raman caratteristica del gruppo $C=O$ scende da 1698 a 1680 cm^{-1} circa, e tale depressione si può ragionevolmente attribuire in linea di massima all'«iperconiugazione» del metile, così passando dal furfurolo all' α -acetilfurano c'è da attendersi una lieve ma rilevabile e significativa depressione della frequenza carbonilica: la frequenza a 1676 cm^{-1} , riscontrata nello spettro dell' α -acetilfurano, non può che corrispondere appunto alla frequenza a 1690 cm^{-1} dell'aldeide furilica, depressa dall'«iperconiugazione» del metile adiacente al gruppo carbonilico.

Dunque già all'esame dello spettro Raman dell' α -acetilfurano allo stato puro si è indotti a concludere che in detta molecola il gruppo $C=O$ non è impegnato in interazioni intermolecolari di entità rilevabile spettroscopicamente, ossia che le molecole di α -acetilfurano - a differenza di quanto accade per il furfurolo - non sono fra loro associate. Invero, se il gruppo $C=O$ dell' α -acetilfurano fosse impegnato in interazioni intermolecolari di entità non trascurabile, come si verifica per le molecole della corrispondente aldeide, la sua frequenza propria di oscillazione non dovrebbe risultare superiore a $1668-1670\text{ cm}^{-1}$, ossia non dovrebbe risultare più alta della frequenza propria dei gruppi $C=O$ del furfurolo intermolecolarmente perturbati, anzi eventualmente dovrebbe risultare più bassa di questa, per il probabile effetto depressivo, se pur lieve, dell'«iperconiugazione» del metile.

Del resto l'esame degli spettri Raman dell' α -acetilfurano in soluzione benzenica più o meno diluita conferma pienamente queste conclusioni. Dalla tabella infatti risulta che pure in dette soluzioni, anche molto diluite, la riga carbonilica si mantiene semplice e praticamente inalterata. Il lieve spostamento verso le più alte frequenze che si verifica con la diluizione, valutato di circa 7 cm^{-1} , deve farsi corrispondere all'analogo lieve spostamento che nelle stesse condizioni si verifica, e press'a poco con la stessa entità, per la riga del $C=O$ dell'acetofenone, spostamento già ampiamente discusso da Bonino e Chiorboli in un precedente lavoro ⁽⁴⁾.

Se le molecole del chetone allo stato puro fossero associate fra loro in misura non derivante solo da secondari fenomeni, la progressiva diluizione finirebbe molto verosimilmente col provocare uno sdoppiamento della riga in questione, facendo comparire accanto alla primitiva riga propria eventualmente delle mole-

(4) BONINO, CHIORBOLI, «Memorie Accad. Scienze Bologna» [X], 7, 113 (1949-50).

cole fra loro associate una seconda riga propria delle molecole ormai libere da ogni reciproca interazione diretta, come accade ad esempio nel caso dell'aldeide pirrolica e dell' α -acetilpirrolo che sono già stati oggetto di ampia discussione in precedenti lavori⁽⁵⁾. Ciò invece per l' α -acetilfurano non si verifica, ed anche ad alta diluizione il gruppo funzionale caratteristico C=O manifesta praticamente le stesse caratteristiche di perturbazione che lo contraddistinguono nello stato puro del composto in esame.

D'altro canto la frequenza carbonilica si deprime di circa 15–20 cm⁻¹ quando l'acetilfurano è in miscela con fenolo, stabilendosi manifestamente una interazione diretta schematizzabile mediante «ponti» d'idrogeno fra il carbonile del chetone e l'ossidril del fenolo. Ciò è del tutto coerente con quanto è già stato trovato da altri autori per l'acetofenone ed altri chetoni⁽⁶⁾ e da noi per l'acetotienone⁽⁷⁾. Questo risultato è ancora una volta perfettamente coerente con l'ipotesi che il gruppo C=O dell'acetilfurano (allo stato puro) sia un gruppo «libero». Se invero esso fosse impegnato in strette interazioni intermolecolari, molto probabilmente l'aggiunta di fenolo o di altri composti capaci di azione chelativa non produrrebbe alcuna sensibile depressione della relativa frequenza di oscillazione. A conferma di ciò valga l'esempio del furfurolo, nel cui spettro Raman la riga carbonilica più perturbata, a 1669 cm⁻¹, ascrivibile a gruppi C=O già perturbati da dirette azioni associative, rimane nella stessa identica posizione quando il furfurolo è in miscela con fenolo.

Chimica inorganica. — *Composti Ni⁰-tetracarbilamminici da sali del nichel bivalente*^(*). Nota di LAMBERTO MALATESTA e di ADRIANO SACCO, presentata^(**) dal Socio L. CAMBI.

In una Nota precedente sui complessi dei metalli di transizione con le carbilammine uno di noi⁽¹⁾ prospettava la possibilità che, nel caso del nichel, fossero possibili composti tetracarbilamminici con il metallo di elettrovalenza formale zero, analoghi cioè al nichel-tetracarbonile e al nichel-(O)-tetracianoato di potassio K₄Ni(CN)₄ di Burgess⁽²⁾.

Poco tempo fa, precedendoci in questa direzione, Hieber⁽³⁾ e quasi contemporaneamente Klages e Monkemeyer⁽⁴⁾ resero nota la preparazione di Ni⁰(CN·C₆H₅)₄ per azione della fenilcarbilammina sul nichel-tetracarbonile.

(5) Ved. note (2) e (3).

(6) MURTY, SESHADRI, «Proc. Indian Acad. Sci.», 15, 154 (1942); LECOMTE, TABOURY, «Bull. Soc. Chim. France», 1947, p. 774.

(7) Ricerche in corso di pubblicazione.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) L. MALATESTA, «Gazz. Chim. It.», 77, 241 (1947).

(2) M. BURGESS e W. EASTES, «J. Am. Chem. Soc.», 64, 1187 (1942).

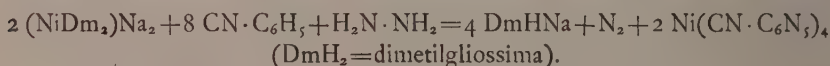
(3) W. HIEBER, «Z. Naturforsch.», 56, 129 (1950).

(4) F. KLAGES e K. MÜNKEMEYER, «Ber.», 83, 501 (1950).

Questo composto venne descritto come sostanza cristallina, stabile all'aria indefinitamente, resistente per parecchie ore ad un riscaldamento sino a 100°, solubile nei solventi organici e da questi ricristallizzabile, per quanto con qualche difficoltà per la relativa maggiore decomponibilità delle soluzioni.

La stabilità di $\text{Ni}^0(\text{NCC}_6\text{H}_5)_4$ da un lato e d'altra parte l'osservazione che i sali di nichel danno luogo in soluzione acquosa od alcoolica a complessi carbilamminici estremamente instabili, che quasi immediatamente si decompongono con polimerizzazione totale del costituente organico stesso ⁽⁵⁾, faceva pensare che in definitiva i primi si sarebbero dovuti poter ottenere, in un ambiente opportunamente riducente, direttamente da sali, semplici o complessi, del nichel bivalente. Poichè la suaccennata polimerizzazione della carbilammina per azione dei sali del nichel bivalente in soluzione si manifesta in ambiente neutro o leggermente acido, indagammo l'azione della fenilcarbilammina su soluzione alcaline contenenti nichel bivalente, legato in forma di un complesso, solubile nel mezzo prescelto.

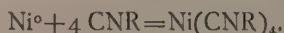
La nostra ricerca si iniziò con la nicheldimetilgliosima poichè questa, giusta l'osservazione di Hieber ⁽⁶⁾, in soluzione alcalina manifesta la tendenza al disproportionamento $2 \text{Ni}^{\text{II}} \rightleftharpoons \text{Ni}^0 + \text{Ni}^{\text{IV}}$ (per esempio in presenza di ossido di carbonio che dà luogo al teracarbonile), ed aggiungemmo idrato di idrazina, per spostare l'equilibrio nel senso desiderato. Potemmo così osservare che la riduzione a nichel zerovalente in effetto si manifesta, ed ottenemmo allo stato di purezza il composto cercato che consideriamo formato nella reazione



Potemmo in seguito constatare non solo che l'idrossilamina, lo stannito alcalino, l'idrosolfito ed analoghi riducenti agiscono nello stesso senso dell'idrazina, ma anche che, a caldo, la reazione si manifesta senza aggiunta di riducente sia pure assai lentamente e con rese poco soddisfacenti (la dimetilgliosima, l'alcoolato di sodio e la carbilammina stessa costituiscono ovviamente riducenti sufficienti alla reazione).

Oltre che con la dimetilgliosima abbiamo sperimentato, con lo stesso esito positivo, usando, come complessanti per il nichel, i dialchiliditiocarbammati, l'etilxantogenato, le aciloinossime. Il complesso tetracarbilamminico può ottenersi, in modo più semplice, anche da sali di nichel bivalente, versando molto lentamente e con vivace agitazione la soluzione alcoolica di acetato di nichel in quella, pure alcoolica, contenente potassa, idrazina e fenilcarbilammina in eccesso.

In definitiva le nostre ricerche dimostrano, che, in mezzo alcalino ed in presenza di carbilammina, i sali ed i complessi del nichel bivalente danno luogo al composto tetracarbilamminico nel quale il nichel presenta la valenza formale zero, cioè che l'equilibrio $\text{Ni}^{\text{II}} + 2 \text{e} \rightleftharpoons \text{Ni}^0$ è completamente spostato verso destra per effetto della successiva reazione:



(5) Nota in corso di pubblicazione.

(6) W. HIEBER e R. BRÜCK, « Naturwissenschaften », 36, 312 (1949).

Nelle condizioni in cui operammo non abbiamo finora notato formazione di derivati del nichel monovalente, che intervengono invece nella riduzione da $K_2Ni(CN)_4$ a $K_4Ni^0(CN)_4$, nè considerazioni sulla struttura elettronica lasciano prevedere per i complessi di nichel monovalente quella particolare stabilità che potrebbe invece attribuirsi ai monoalogenuri pentacarbilamminici del cobalto monovalente per l'isosteria nel metallo tra $Ni^0(CNR)_4$ e $[Co^I(NCR)_5]^+$.

I derivati di altre carbilammine aromatiche (p-tolil, naftil) pure da noi preparati risultarono ancora più stabili del composto con la fenilcarbilammina e poterono essere ottenuti allo stato di alta purezza per cristallizzazione da solventi caldi all'aria.

Infine, in modo analogo, riuscì la preparazione di una nicheltetraalchilcarbilammina $Ni(CNCH_3)_4$, allo stato di purezza. I tentativi di Hieber⁽³⁾ di preparare questa sostanza da nicheltetracarbonile, avevano infatti portato ad isolare il prodotto di sostituzione parziale $NiCO(CNCH_3)_3$, nè altri prodotti di questa classe erano mai stati descritti. Questa sostanza, mentre assomiglia, per l'aspetto cristallino, il colore e la facilità con cui si separa i lunghi cristalli aciculari, agli analoghi aromatici, presenta una straordinaria ossidabilità allo stato umido e in soluzione. Essa può essere perciò isolata allo stato di purezza ed analizzata solo operando con particolari precauzioni, per quanto allo stato di secchezza resista per qualche tempo all'azione dell'aria.

Gli omologhi superiori alifatici sono stati ottenuti in soluzione, ma non isolati; è infatti prevedibile una solubilità molto elevata che ne rende difficile la cristallizzazione: essi si comportano in soluzione, specialmente rispetto all'ossidabilità, in modo del tutto analogo alla nichel(O)tetrametilcarbilammina.

Tutti questi derivati del nichel zerovalente sono, come il tetracarbonile, *diamagnetici*, come è del resto da attendersi per la sicura presenza di legami covalenti e per il fatto che il metallo raggiunge il numero atomico effettivo 36 (corrispondente al cripto).

PARTE SPERIMENTALE.

Nichel-tetrafenilcarbilammina. — La fenilcarbilammina venne preparata da anilina, cloroformio e idrato sodico⁽⁷⁾.

a) A g. 10 di fenilcarbilammina sciolti in 40 cc. di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e quindi g. 5 di nichel-dimetilglossima in cc. 40 di potassa alcoolica al 5%. La reazione venne condotta a termine mediante moderato riscaldamento. Il prodotto separatosi in cristalli gialli aciculari venne filtrato alla pompa e lavato con alcool etilico.

Analisi trov. % Ni = 12,08 ; N = 11,86

per $C_{28}H_{20}N_4Ni$ calc. % Ni = 12,46 ; N' = 11,89.

b) A g. 12 di fenilcarbilammina sciolti in 40 cc. di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e 5 cc. di potassa alcoolica al 10%, poi, a

(7) L. MALATESTA, « Gazz. Chim. », 77, 238 (1917).

goccia a goccia, g. 6 di *n*-propilditiocarbammato di nichel in cc. 40 di alcool etilico. La reazione venne condotta a termine mediante moderato riscaldamento.

c) A g. 12 di fenilcarbilammina sciolti in cc. 30 di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e cc. 6 di potassa alcoolica al 10%. Questa soluzione venne quindi trattata a goccia a goccia, sotto agitazione, con cc. 60 di una soluzione 0,2 M di acetato di nichel in alcool etilico. Il prodotto filtrato e lavato con alcool diede all'analisi:

$$\text{Ni} = 12,20\% ; \text{N} = 11,85\%.$$

I prodotti ottenuti secondo a) b) c) presentano le stesse caratteristiche fisiche di quello da noi ripreparato per confronto da nicheltetracarbonile e fenilcarbilammina seguendo le indicazioni di Klages e Mönkemeyer⁽⁴⁾.

Nichel-tetrap-tolilcarbilammina. - La p-tolilcarbilammina venne preparata in modo analogo alla fenilcarbilammina, da p-toluidina. Questa carbilammina era già stata ottenuta da Nef⁽⁸⁾.

A g. 10 di p-tolilcarbilammina sciolti in cc. 30 di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e 6 cc. di potassa alcoolica al 10%. La soluzione venne poi trattata a goccia a goccia, sotto agitazione, con cc. 50 di soluzione 0,2 M di acetato di nichel in alcool etilico. Il prodotto ottenuto venne sciolto in poco cloroformio e ricristallizzato per aggiunta di etere di petrolio. Aghi gialli, stabili all'aria.

$$\text{Analisi} \quad \text{trov. \%} \quad \text{Ni} = 10,99 ; \text{N} = 10,64$$

$$\text{per } \text{C}_{32}\text{H}_{28}\text{N}_4\text{Ni} \quad \text{calc. \%} \quad \text{Ni} = 11,14 ; \text{N} = 10,62.$$

Nichel-tetra β -naftilcarbilammina. - La β -naftilcarbilammina, del resto già nota⁽⁹⁾, venne preparata in un modo analogo alla fenilcarbilammina, dalla β -naftilammina.

A g. 16 di β -naftilcarbilammina in cc. 40 di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e cc. 8 di potassa alcoolica al 10%. La soluzione venne poi trattata secondo le solite modalità con cc. 50 di soluzione alcoolica di acetato di nichel 0,2 M. Il prodotto greggio ottenuto venne ricristallizzato da solfuro di carbonio e lavato con etere isopropilico caldo. Aghi giallo-rossastri, stabili all'aria.

$$\text{Analisi} \quad \text{trov. \%} \quad \text{Ni} = 8,79 ; \text{N} = 8,24$$

$$\text{per } \text{C}_{44}\text{H}_{28}\text{N}_4\text{Ni} \quad \text{calc. \%} \quad \text{Ni} = 8,75 ; \text{N} = 8,34.$$

Nichel-tetrametilcarbilammina. - La metilcarbilammina venne preparata dal prodotto della reazione a 100° in tubo chiuso, fra cianuro d'argento e ioduro di metile, con KCN 30%, secondo Gautier⁽¹⁰⁾.

(8) NEF, « Ann. », 270, 320 (1892).

(9) LIEBERMANN, « Ber. », 16, 1640 (1883).

(10) GAUTIER, « Ann. Chim. et Phys. », IV, 17, 215 (1869).

A g. 3 di metilcarbamilamina in cc. 20 di alcool etilico vennero aggiunti g. 1 di idrato di idrazina e cc. 8 di potassa alcoolica al 10%. La soluzione, posta in una beuta codata collegata ad una seconda beuta mediante un tubo a setto poroso, venne trattata in corrente d'azoto con cc. 40 di soluzione alcoolica di acetato di nichel 0,2 M. Il precipitato formatosi venne ridisciolti per riscaldamento nelle stesse acque madri, la soluzione venne filtrata a caldo attraverso il setto poroso, nella seconda beuta, e qui lasciata cristallizzare. Il precipitato, in cristalli aciculari giallo-chiari, venne quindi separato per filtrazione attraverso un secondo tubo a setto poroso precedentemente pesato, sempre in ambiente di azoto, e lavato con alcool etilico. L'estremità superiore del tubo venne saldata alla fiamma e il precipitato essiccato sotto vuoto; venne chiusa infine alla fiamma anche la seconda estremità del tubo. Il prodotto così ottenuto, pesato, venne sottoposto direttamente all'analisi e cioè del semimicro-azoto secondo Kjeldahl e successivamente del nichel con dimetilgliossima.

Analisi trov. % Ni = 26,0 ; N = 25,00

per $C_8H_{12}N_4Ni$ calc. % Ni = 26,34 ; N = 25,12.

Fisiologia. — *Calcio ioni e disposizione verso l'epilessia riflessa* (*).

Nota di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

A. Alibrandi ha dimostrato come fattori disponenti verso l'epilessia sperimentale riflessa^(1, 2, 3) siano da considerare sostanze capaci di accrescere in maniera elettiva l'effetto centrale postumo degli eccitamenti afferenti⁽⁴⁾.

Tra i fattori capaci di accrescere tale effetto postumo un ruolo assai importante sembra doversi attribuire a quelle sostanze che il Loeb ha chiamato decalcificanti⁽⁵⁾.

Queste sostanze come è noto agiscono diminuendo fortemente la quota del calcio ionizzato e sarebbe pertanto più razionale chiamarli calcio deionizzanti. Sull'azione epilettogena di queste sostanze richiamò per primo l'attenzione, al principio di questo secolo, il nostro Sabbatani⁽⁶⁾.

Tra di esse un posto di primaria importanza spetta ai fosfati di sodio quali sostanze fisiologicamente presenti nell'organismo.

Il Beccari⁽⁷⁾ controllando un lavoro di Bonnet e Monnier⁽⁸⁾ osservò come la opportuna somministrazione di calcio sia capace di abolire l'aumento dell'ef-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 6 giugno 1951.

(1) G. AMANTEA, « Il Policlinico », sez. med. (1920).

(2) G. AMANTEA, « Pflüger's Arch. f. ges. d. Physiol. », 188, 287 (1921).

(3) G. AMANTEA, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1, 1 (1926).

(4) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 49, 105 (1949).

(5) LOEB, *The Dynamics of Living Matter*; The Columbia University Press, New York, 1906.

(6) L. SABBATANI, « Mem. R. Acc. Scienze Torino », ser. 2^a, tomo 54 (1903-1904).

(7) BECCARI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 24, 141 (1948).

(8) BONNET e MONNIER, « Arch. internat. Physiol. », 55, 27 (1947).

fetto postumo determinato dai fosfati di sodio. È d'altra parte a tutti noto come gli ioni calcio, anche in ordinarie condizioni, esplicino sull'effetto postumo un'azione negativa al contrario cioè di quello che, entro certi limiti, avviene per i K ioni.

Date queste premesse appariva non privo di interesse studiare l'effetto di un artificiale aumento dei calcio ioni nel sangue sul fenomeno della disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa⁽⁹⁾.

Cani sicuramente riconosciuti predisposti verso questo fenomeno venivano trattati, a vari intervalli di tempo dal primo intervento esplorativo, con dosi progressivamente crescenti di cloruro di calcio per via endovenosa.

A dosi variabili da animale ad animale, ed in ogni caso contenute entro i limiti di tossicità indicati dalle classiche ricerche del Sabbatani⁽⁶⁻¹⁰⁾, si poté osservare come il cloruro di calcio sia capace di circoscrivere l'attività convulsiva della corteccia cerebrale al solo centro trattato con la stricnina.

Questo alcaloide applicato col metodo di Baglioni e Magnini⁽¹¹⁾ sulla zona sigmoidea della corteccia cerebrale di cani predisposti, adeguatamente trattati con cloruro di calcio, determina costantemente la insorgenza di un clono nel gruppo muscolare corrispondente al centro sensitivo motore sul quale esso agisce. La contemporanea stimolazione della zona riflessogena cutanea, funzionalmente connessa con questo centro⁽¹²⁾, per quanto energica non riesce a provocare più, come prima del trattamento col calcio, la fusione delle scosse e tanto meno l'insorgenza di accessi epilettiformi. Nessuna differenza può, in tali condizioni, mettersi in evidenza tra il comportamento di cani così trattati ed il comportamento di cani non predisposti. L'azione del calcio non impedisce l'insorgenza dell'attività convulsiva prodotta dalla stricnina in corrispondenza del centro corticale sul quale direttamente essa agisce ma soltanto la propagazione di questa attività alle rimanenti zone corticali.

In queste esperienze si ebbe pure modo di osservare come, allorchè si voglia provocare, col mezzo suaccennato, la scomparsa della predisposizione subito dopo un accesso di epilessia, occorran dosi di cloruro di calcio notevolmente superiori a quelle che occorrono allorchè il cane non ha da parecchie ore presentati accessi epilettiformi. Questo fatto evidentemente dipende dalla liberazione, in seguito all'accesso epilettiforme, di sostanze aventi azione agevolatrice nei riguardi

(9) È qui da ricordare che da ricerche di Zagani risulta come l'ablazione delle paratiroidi non pare capace, in cani non predisposti di instaurare uno stato di disposizione. Ricerche dello stesso Autore dimostrano però nel sangue dei cani non predisposti una concentrazione di calcio maggiore di quella contenuta nel sangue dei cani predisposti. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 2, 44 (1927); « Arc. Sc. Biol. », 11, 301 (1928).

E da notare che il dosaggio del calcio per via chimica eseguito coi metodi correntemente in uso non può illuminarci sull'effettiva quota del calcio ionizzato. Gli ioni calcio possono dosarsi per via biologica come per la prima volta proposero Mc LEAN e HASTINGS, « J. Biol. Chem. », 107, 337 (1934).

(10) È al SABBATANI che tocca il merito di aver per primo riconosciuto come l'organismo animale sopporti molto meglio un eccesso anzichè un difetto di ioni calcio.

(11) BAGLIONI e MAGNINI, « Arch. Fisiol. », 6, 240 (1909).

(12) G. AMANTEA, questi « Rendiconti », 24, 268 (1915).

degli accessi successivi. Un posto di primaria importanza tra queste sostanze è molto verisimile che spetti appunto ai fosfati inorganici la cui concentrazione notevolmente aumenta in seguito all'intensa attività muscolare.

Per le dosi generalmente piuttosto elevate alle quali il cloruro di calcio si è dimostrato, in queste esperienze, efficace nei riguardi dello stato di disposizione ci pare che questi risultati possano assumere importanza soprattutto quale conferma della prima origine dello stato di disposizione: l'accresciuta intensità dell'effetto postumo degli eccitamenti afferenti.

Se una provvisoria conclusione di ordine pratico ci è consentita essa è la seguente: che a questo aumento abnorme dell'intensità dell'effetto postumo non tanto si deve cercare di opporsi mediante un supplementare apporto di calcio, come consigliato già nella cura dell'epilessia umana da molti anni (Nardelli, Bryan)⁽¹³⁾, ma soprattutto ci si deva opporre alle cause di deionizzazione di questo elemento nell'organismo. Una deficienza dei processi di fosforilazione è stata da A. Alibrandi e da me⁽¹⁴⁾ segnalata, in una precedente Nota, appunto quale probabile fattore di deionizzazione del calcio capace di provocare uno stato di reattività epilettogena sia pure latente.

La somministrazione di sostanze disaccoppianti i processi di fosforilazione dai processi ossidativi quali l'atebrin e l'aureomicina è infatti capace di provocare costantemente uno stato di disposizione verso l'epilessia riflessa.

Fisiologia. — *Sul meccanismo di azione della postipofisi nel passaggio di acqua attraverso la cute di Rana esculenta*^(*). Nota^(**) di VITTORIO CAPRARO e GIUSEPPE BERNINI^(***), presentata dal Corrisp. R. MARGARIA.

INTRODUZIONE E TECNICA. — È noto da numerose ricerche⁽¹⁾ che gli estratti postipofisari determinano un forte aumento del passaggio di acqua attraverso la cute di Rana, dall'esterno all'interno, sia in condizioni di ambiente esterno ipotonico che in condizioni di ambiente esterno isotonico, secondo alcuni Autori con un meccanismo diverso da quello con cui tali estratti aumentano il riassorbimento di acqua nella parte distale dei tubuli renali.

Nell'intento di chiarire il meccanismo del trasporto di acqua attraverso a cute di Rana è stata determinata, in ricerche precedenti⁽²⁾, la differenza di poten-

(13) NARDELLI, BRYAN, citati da P. MARFORI, *Trattato di Farmacologia e Terapia*, Napoli, p. 129 (1935).

(14) G. ed A. ALIBRANDI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 26, 1472 (1950).

(*) Ci è gradito ringraziare qui il Prof. G. Bolla e l'Ing. M. Silvestri del C. I. S. E. per la fornitura del D₂O e per l'assistenza scientifica prestata.

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1951.

(***) Con la cooperazione del perito chimico Francesco Poy.

(1) W. H. SAWYER, « The Am. J. of Physiol. », 164, 44 (1951); V. CAPRARO e M. TIENGO, « Arch. Sc. Biol. » in stampa.

(2) V. CAPRARO e M. TIENGO, loc. cit.

ziale della cute a contatto con Ringer normale e a contatto con Ringer iso-pH contenente ormoni postipofisari. Nella supposizione che il passaggio di acqua fosse in parte di natura elettroosmotica, parallelamente all'aumento di tale passaggio sotto l'azione degli ormoni postipofisari ci si poteva aspettare un aumento della polarizzazione normale della cute di Rana; al medesimo modo come parallela-

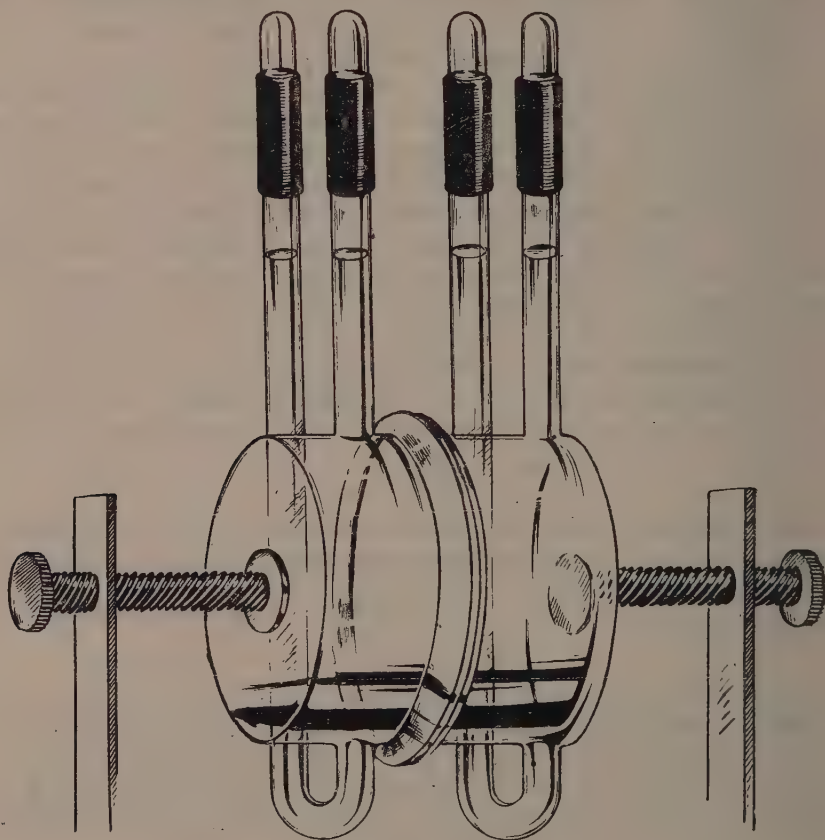


Fig. 1.

mente alla diminuzione del passaggio di acqua sotto l'azione della adrenalina si osserva una diminuzione della polarizzazione normale della cute⁽³⁾.

Gli esperimenti fatti hanno dato a vedere solo in alcuni casi un aumento della differenza di potenziale cutanea e nella maggior parte dei casi nessuna variazione apprezzabile, per cui nel complesso tale aumento non sembra nè molto evidente nè costante.

Tale risultato, naturalmente, non esclude il meccanismo elettroosmotico, dipendendo questo non solo dalla differenza di potenziale della cute (potenziale E,

(3) V. CAPRARO e M. TIENGO, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. X, fasc. 5 (1951).

cfr. Hoeber⁽⁴⁾), ma anche da numerosi altri fattori su cui può interferire la postipofisi (potenziale elettrocinetico o potenziale ζ cfr. Hoeber⁽⁴⁾, diametro dei pori, ecc.).

Per spiegare allora l'aumento del trasporto di acqua sotto l'azione degli estratti postipofisari, si è supposto che questi ormoni determinassero una diminuzione della resistenza al movimento dell'acqua, ad esempio per una rarefazione dei filtri proteici cellulari ed extracellulari.

In conseguenza di questo effetto, sia che il passaggio netto di acqua si basi su un fenomeno puramente osmotico, come potrebbe essere quando l'ambiente esterno è ipotonico, sia che il passaggio netto di acqua si basi unicamente su un fenomeno attivo (elettroosmotico), come è quando l'ambiente esterno è isotonico, si dovrebbe osservare un aumento del passaggio assoluto di acqua sia in un senso che nell'altro.

Per controllare tale conseguenza dell'ipotesi fatta si è calcolato il passaggio assoluto di acqua ponendo la cute del dorso di *Rana esculenta* separata dall'animale, con una superficie permeante di 10 cm², tra una soluzione nota di D₂O, da sola o resa isotonica con NaCl (ambiente esterno) e una soluzione di Ringer a pH noto (ambiente interno), e determinando la percentuale di D₂O nel Ringer dopo un certo tempo.

L'apparecchio di cui si è fatto uso è rappresentato nella fig. 1.

La temperatura era mantenuta costante a $28 \pm 1^\circ$ C.

In esperimenti paralleli sono state eseguite identiche determinazioni con Ringer circa iso pH e contenente 0,5 U/ml di postipofisi Erba.

Il metodo usato per la determinazione del D₂O è quello di Sapirstein⁽⁵⁾; la soluzione in esame veniva distillata tre volte di seguito sotto vuoto, in apparecchio di vetro « Ignis » con chiusure a mercurio e titolata mediante determinazione della temperatura di galleggiamento di un galleggiante tarato.

L'apparecchio è rappresentato nella fig. 2.

L'errore massimo nella determinazione di temperatura era di $\pm 0,01^\circ$ C cui corrisponde un errore di $\pm 0,003\%$ nella percentuale in moli di D₂O.

La formula utilizzata per il calcolo delle percentuali in moli di D₂O (x) è la seguente:

$$x\% = \frac{1 - \frac{d_0}{cd'_1(1 + 3\beta(t-t_0))}}{\frac{((M_2/M_1)(d_1/d_2) - 1)d_0}{cd'_1(1 + 3\beta(t-t_0))} - \left(\frac{M_2}{M_1} - 1\right)} \cdot 100$$

dove t_0 è la temperatura a cui il galleggiante si stacca in acqua naturale, t è la temperatura a cui il galleggiante si stacca nella miscela ignota, d_0 è la densità dell'acqua naturale alla temperatura t_0 , d'_1 è la densità dell'acqua alla temperatura t , d_2/d_1 è il rapporto tra la densità dell'acqua deuterata e dell'acqua naturale alla temperatura t , M_2/M_1 è il rapporto tra i due pesi

(4) R. HOEBER, « Phys. Chem. of Cells and Tissues », Londra (1947).

(5) L. SAPIRSTEIN, « J. Lab. Clin. Med. », 35, 793 (1950).

molecolari, 3β è il coefficiente di dilatazione volumica del Pyrex ($=10^{-5}$) e $c = 0,999984$.

Dai dati sperimentali si risaliva al passaggio assoluto di acqua esterno \rightarrow interno nel seguente modo.

Sia V_1 il volume dell'ambiente interno, V_2 il volume dell'ambiente esterno, sia C_1 la concentrazione molare di D_2O nell'ambiente interno e C_2 la concentrazione di D_2O nell'ambiente esterno al tempo t , e C_1^0 e C_2^0 le stesse concentrazioni

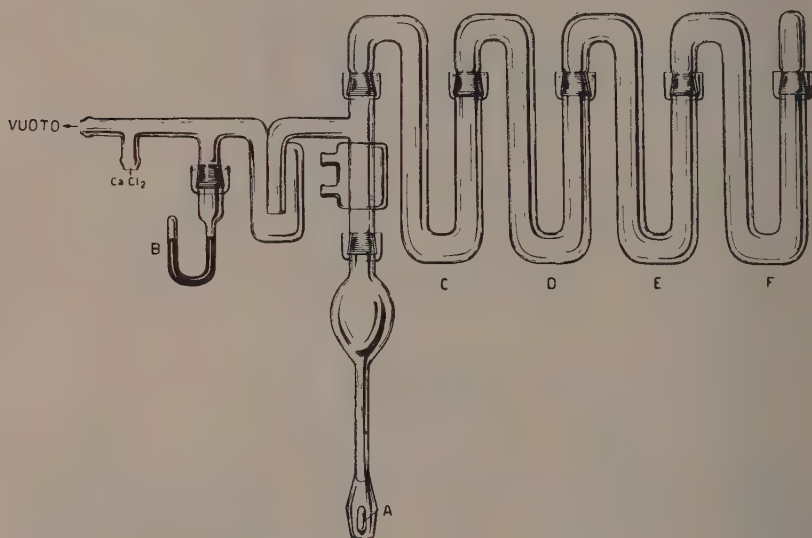


Fig. 2. - Apparecchio per la distillazione e la determinazione dell'acqua pesante.

In F si pone il materiale da distillare che viene prima congelato in miscela di acetone + neve carbonica e privato dell'aria sotto vuoto. La distillazione si fa sotto vuoto riscaldando a $40-50^\circ C$. e raccogliendo in E raffreddato in miscela di acetone + neve carbonica. Da E si distilla in D e poi da D in C e infine da C in A, dove si misura la temperatura di galleggiamento. B è un manometro a mercurio. Le giunture sono tutte a chiusura sotto mercurio.

al tempo 0, sia « a_{21} » e « a_{12} » il valore del passaggio assoluto di acqua per ora nel senso esterno \rightarrow interno, rispettivamente interno \rightarrow esterno.

Supponendo i passaggi di acqua costanti e supponendo che le concentrazioni molari siano eguali alle concentrazioni volumetriche, si possono porre le seguenti equazioni:

$$(1) \quad -V_2 dC_2 = a_{21} C_2 dt - a_{12} C_1 dt$$

$$(2) \quad C_1 = (V_2/V_1)(C_2^0 - C_2)$$

da cui risulta:

$$-V_2 dC_2 = a_{21} C_2 dt - a_{12} (V_2/V_1)(C_2^0 - C_2) dt$$

e:

$$\frac{dC_2}{dt} = -\left(a_{21}/V_2 + a_{12}/V_1\right) C_2 + (a_{12}/V_1) C_2^0.$$

Integrando si ottiene:

$$(3) \quad C_2 = \frac{C_2^0}{1 + (a_{21}/a_1) (V_1^0/V_2^0)} + \left(C_2^0 - \frac{C_2^0}{1 + (a_{21}/a_{12}) (V_1^0/V_2^0)} \right) e^{-\frac{V_1^0 + V_2^0}{V_1^0 \cdot V_2^0} a_{21} t}.$$

Siccome, poi, i valori di passaggio assoluto sono molto maggiori del passaggio netto e la loro differenza è piccola, si può, ai nostri fini, porre l'eguaglianza:

$$a_{21} = a_{12}$$

Allora l'equazione (3) si semplifica in:

$$(4) \quad C_2 = \frac{C_2^0}{1 + (V_1^0/V_2^0)} + \left(C_2^0 - \frac{C_2^0}{1 + (V_1^0/V_2^0)} \right) e^{-\frac{V_1^0 + V_2^0}{V_1^0 \cdot V_2^0} a_{21} t}.$$

Dalla (4) con l'aiuto dei valori di C_2^0 e di C_2 al tempo t si può calcolare il valore assoluto a_{21} .

Le concentrazioni di D_2O ottenute non sono effettive, ma calcolate supponendo che tutto il D si trovi sotto forma di D_2O mentre si ha un equilibrio tra D_2O e DHO.

Nel calcolo di a_{21} , però, ciò porta ad un errore trascurabile, sempre ai fini ai quali è indirizzata questa ricerca.

RISULTATI E DISCUSSIONE. — Riportiamo qui sotto i dati sperimentali e i valori calcolati di a_{21} .

TABELLA I.

Esperimenti senza postipofisi.

N° esp.	Ambiente esterno	t ore	V_2^0 ml	V_1^0 ml	V_1^0/V_2^0	C_2^0 (‰)	C_2 (‰)	pH Ringer interno	a_{21}/cm^2 ml
1	$H_2O + D_2O$	3,83	19,45	18,70	0,960	19,90	14,20	7,82	0,215
2	»	1	20,0	18,0	0,90	6,40	5,67	8,21	0,262
3	»	1	20,0	18,0	0,90	5,36	4,65	7,50	0,310
4	{ NaCl 6,5 ‰ in $H_2O + D_2O$ }	1	16,3	18,0	1,105	3,60	3,19	6,90	0,209
5	»	1	18,0	18,0	1,0	4,79	4,19	7,30	0,260
6	»	1	18,0	18,0	1,0	4,79	4,10	7,25	0,305

TABELLA II.

Esperimenti con postipofisi.

N° esp.	Ambiente esterno	t ore	V ₂ ^o ml	V ₁ ^o ml	V ₁ ^o /V ₂ ^o	C ₂ ^o (‰)	C ₂ (‰)	pH Ringer interno + postipofisi	a ₂₁ /cm ² ml
1	H ₂ O+D ₂ O	3,83	20,0	16,0	0,80	6,40	4,40	7,00	0,262
2	»	1	20,0	18,05	0,903	6,40	5,58	8,15	0,299
3	»	1	20,0	18,0	0,90	5,36	4,65	7,15	0,310
4	{ NaCl 6,5 ‰ } in H ₂ O+D ₂ O	1	16,3	18,0	1,105	3,60	3,12	7,15	0,250
5	»	1	18,0	18,0	1,00	4,79	4,19	7,15	0,260
6	»	1	18,0	18,0	1,00	4,79	4,22	7,15	0,249

Dai dati riportati si può anzitutto rilevare che il passaggio assoluto di acqua esterno → interno e quindi anche il passaggio interno → esterno non variano di molto con la concentrazione dell'ambiente esterno e sono molto maggiori dei valori di passaggio netto esterno → interno ⁽⁶⁾ e precisamente, riferendoci ai valori senza postipofisi, in media 38 volte maggiori quando l'ambiente esterno è isotnico.

I valori ottenuti sono un po' inferiori ma dello stesso ordine di grandezza di quelli trovati da Hevesy, Hofer e Krogh (0,35 g/ora-cm² a 20° C in Ringer) ⁽⁷⁾; la diversità forse è dovuta al fatto che gli Autori citati hanno usato la cute del ventre più permeabile di quella dorsale usata da noi.

Il valore del passaggio assoluto ottenuto nell'esperimento durato 4 ore è un po' minore di quelli ottenuti negli esperimenti durati 1 ora; perciò, forse tale passaggio non è costante nel tempo, per lunghi tempi, e precisamente è maggiore nella prima ora che nelle ore successive.

Se poi si confrontano i dati ottenuti nei controlli con quelli ottenuti sotto l'azione della postipofisi, si osserva una variazione percentuale media del + 10 % rispetto ai primi, quando l'ambiente esterno è ipotonico, e una variazione percentuale media del - 2 % quando l'ambiente esterno è isotnico, mentre gli aumenti percentuali nei trasporti netti sono rispettivamente del 48 % nel caso che l'ambiente esterno è l'acqua e del 104 % nel caso che l'ambiente esterno è isotnico (2).

(6) Nell'ultima serie di esperimenti fatti (2) è stato calcolato un valore di passaggio netto per la cute del dorso, isolata, a 28° C, di $6,87 \pm 0,99$ mg/ora-cm², con ambiente esterno ipotonico, e di $3,03 \pm 1,21$ mg/ora-cm², con ambiente esterno isotnico.

(7) G. V. HEVESY, E. HOFER e A. KROGH, «Skand. Arch. f. Physiol.», 72, 199 (1935).

Se le forze che determinano il passaggio netto esterno \rightarrow interno, in ambiente esterno ipotonico, sono solamente osmotiche, l'aumento percentuale nel passaggio assoluto sotto l'azione della postipofisi non deve essere minore rispetto all'aumento nel passaggio netto; siccome ciò non si verifica, ciò significa che si ha l'esaltazione del passaggio principalmente in un determinato senso e se ne deduce che l'aumento nel passaggio netto sotto l'influenza degli ormoni postipofisari avviene utilizzando un meccanismo, almeno parzialmente diverso, da quello osmotico.

Tale meccanismo è, quindi, almeno parzialmente, un meccanismo attivo, come si era già dedotto per il passaggio normale da altre serie di esperimenti ⁽⁸⁾.

Che si tratti di un meccanismo attivo nel caso di trasporto di acqua fra due ambienti isotonici, non occorre dimostrare; questi esperimenti però sembrano escludere che la postipofisi agisca solo determinando un aumento della permeabilità dell'acqua come si era supposto all'inizio. In altre parole anche qui non pare che si tratti di un effetto solo dell'aumento della permeabilità nei due sensi, ma piuttosto sembra si tratti dell'esaltamento del passaggio principalmente in un determinato senso.

CONCLUSIONI.

1° È stato determinato il passaggio assoluto di H_2O attraverso la cute di Rana con l'aiuto del deuterio come indicatore in condizioni di ambiente esterno ipotonico e isotonico; sono risultati valori non molto diversi nelle due condizioni di ambiente esterno, e dello stesso ordine di grandezza di quelli trovati da Hevesy, Hofer e Krogh.

2° Il passaggio netto esterno \rightarrow interno, essendo molto inferiore al passaggio assoluto, risulta perciò da una piccola differenza tra i due passaggi assoluti in senso opposto.

3° Gli estratti postipofisari che determinano un forte aumento del passaggio netto esterno \rightarrow interno, sia in condizioni di ambiente esterno ipotonico che isotonico, non modificano invece sensibilmente i passaggi assoluti.

4° Da quanto detto in ⁽³⁾ se ne deduce che presumibilmente tali sostanze non agiscono diminuendo la resistenza al passaggio dell'acqua nei due sensi ma favorendo il passaggio principalmente in un determinato senso; tale azione può basarsi perciò solo su un trasporto attivo e non su un fenomeno passivo.

(8) V. CAPRARO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. IX, fasc. 3-4 (1950); V. CAPRARO, P. PENNELLA e M. TIENGO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. X, fasc. 3 (1951).

Fisiologia. — *Gli effetti dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici sulla funzione spermiogenetica ed endocrina del testicolo del gallo* (*). Nota (**) di GAETANO LIVREA e FILIPPO DESTRO (***), presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

In precedenti ricerche (1-3) abbiamo posto in rilievo col metodo fisiologico che, in conseguenza dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici, è possibile osservare ritardo dello sviluppo dell'apparato genitale dei ratti e delle cavie e alterazioni del comportamento sessuale di questi animali, dei colombi e dei rospi.

Nell'intento di delucidare l'intimo meccanismo di questi fenomeni, per i quali in base alle nostre odierne conoscenze si potrebbe accampare soltanto una spiegazione insoddisfacente, abbiamo intrapreso più ampie ricerche fisiologiche, istopatologiche e biochimiche, intese ad indagare in modo particolare, negli animali sottoposti ad un appropriato trattamento convulsivante, sia la funzione spermiogenetica ed ovogenetica, che l'attività e l'interdipendenza delle ghiandole a secrezione interna connesse con la riproduzione e l'attività e l'interdipendenza dei meccanismi neuro-ipofisari, neuro-testicolari e neuro-ovarici. La raccolta dei fatti in questo vasto campo è tuttora in corso e noi speriamo di poter venire ad una loro correlazione e ad un chiarimento definitivo del problema, a suo tempo posto, dei rapporti tra reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici, sviluppo dell'apparato genitale ed attività sessuale.

Con questa Nota, ai dati già comunicati, aggiungiamo quelli relativi agli effetti degli anzidetti eccitamenti sulla funzione spermiogenetica ed endocrina del testicolo del gallo, animale al quale si riconosce da tutti una particolare attività sessuale.

Il portamento caratteristico, la cresta molto sviluppata, tesa, intensamente rossa, i bargigli parimenti sviluppati e rossi, il colorito acceso delle guance, la grandezza delle caruncole, il piumaggio caratteristico, l'ardore battagliero, il canto e l'istinto sessuale costituiscono in questo animale un insieme di caratteri sessuali molto evidente, in rapporto con la funzione endocrina del testicolo.

Se poi si aggiunge che, grazie alla tecnica di raccolta dello sperma stabilita per il gallo da G. Amantea (4), è possibile studiare anche la secrezione spermatica, balza chiaro che questo animale rappresenta l'animale di scelta per studiare gli

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Roma e, per la parte istopatologica, nell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Messina.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1951.

(***) Il dr. F. Destro ha collaborato soltanto per la parte istopatologica (G. Amantea).

(1) G. LIVREA, «Riv. di Biologia», 42, 59 (1950).

(2) G. LIVREA, «Riv. di Biologia», 42, 67 (1950).

(3) G. LIVREA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. 9, 268 (1950).

(4) G. AMANTEA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. V, vol. 31, 207 (1922).

effetti dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici su'la funzione spermio-genetica ed endocrina del testicolo.

Noi abbiamo sperimentato su animali adulti della razza Rode Island, allevati in Istituto, in ottime condizioni di nutrizione e con marcata attività delle ghiandole sessuali. Abbiamo stabilita tale caratteristica con un'osservazione preventiva di adeguata durata, nel corso della quale abbiamo accuratamente studiato e notato tutto ciò che si riferiva ai caratteri sessuali degli animali, particolarmente il disegno del contorno e la misurazione della cresta e dei bargigli, l'aspetto e il colorito di questi e di quella, il colorito delle guance, la grandezza e l'aspetto delle caruncole, lo stato del piumaggio e degli speroni, il comportamento del canto, dell'ardore battagliero e dell'istinto sessuale. Infine in un animale appositamente allenato, abbiamo eseguito la raccolta dell'eiaculato e di questo abbiamo controllato l'aspetto, la quantità e la presenza di spermatozoi.

Durante tutto questo periodo di osservazione preventiva, come pure durante il periodo del trattamento convulsivante e dopo, tutti gli animali, ognuno dei quali era costretto in una sua gabbia, sono stati alimentati con granotto e verdure varie a volontà ed abbiamo tenuto conto della quantità di alimento assunto e del comportamento del peso corporeo. Ovviamente durante il periodo del trattamento e durante tutto il periodo consecutivo abbiamo riesaminato con le modalità abituali i caratteri della funzione sessuale degli animali.

Il trattamento è consistito in una serie di crisi convulsive da elettroshock (ES) variante, a seconda degli animali, da 35 a 40 nello spazio di circa 50 giorni, in modo da scatenare, dapprima, per circa un mese una crisi *pro die* e, poi, le altre a giorni alterni o, anche, ogni tre giorni. Gli elettrodi, rappresentati da due appropriate pinze metalliche a molla, a valve molto larghe, erano applicati, previa immersione in soluzione salina, alla parte supero-posteriore della cresta e ai bargigli, all'altezza del loro punto d'inserzione al becco. Cresta e bargigli venivano preparati, poco prima dell'applicazione degli elettrodi, mediante accurato strofinio con soluzione salina. Il voltaggio erogato ha variato, col progredire del numero delle crisi, da 60 a 100 V. Il tempo di erogazione invece è stato sempre di 0,2 secondi.

Senza stare a descrivere il quadro della crisi convulsiva da ES riassumiamo i fatti più salienti emersi dalle nostre osservazioni.

Già intorno alla prima settimana di trattamento si cominciano a notare in quasi tutti gli animali modificazioni dei caratteri sessuali. Si osserva dapprima un diradarsi del canto e un affievolirsi dell'istinto sessuale e dell'istinto battagliero. I galli, nelle ore in cui, in condizioni normali, sogliono dispiegare il loro canto a distesa, si fanno sentire a mano a mano di meno, spesso in modo roco e per ultimo, continuando nel trattamento, alcuni tacciono, quasi sempre in modo definitivo, e qualche altro, a distanza di giorni, può elevare ancora un canto breve e rauco.

In pari tempo si osserva che di fronte ad altri maschi, gli animali dapprima recedono con facilità dagli abituali loro propositi battaglieri, poi non offendono del tutto, infine si limitano soltanto a difendersi sempre con maggior fiacchezza e per ultimo si ritraggono. Di fronte alle galline, dopo i primi ES ancora si eccitano e possono anche compiere qualche copula e, nell'animale esplorato allo

scopo, permettere di raccogliere quantità sempre più scarse di liquido seminale contenente spermatozoi; poi restano indifferenti.

Le modificazioni della cresta e dei bargigli sono più tardive. In genere, intorno al 12°-15° giorno di trattamento, quando già gli animali in genere non cantano o cantano molto meno e non si accoppiano, la cresta e i bargigli assumono un aspetto cianotico più o meno intenso, specialmente nell'estremità della cresta, e poco dopo si può cominciare a notare una lenta, progressiva riduzione, la quale, in ultimo, in qualche caso, finisce con l'essere abbastanza rilevante; contemporaneamente la cresta può diventare pallida, tendere ad accartocciarsi ed assumere un aspetto farinoso, che ricorda quello descritto da Pézard per gli animali privati dei testicoli.

Anche le guance impallidiscono e le caruncole impiccoliscono e perdono il loro colorito normale. Invece non si nota alcunchè di notevole a carico degli speroni e del piumaggio. Nella realtà gli animali perdono molte penne, ma la causa di ciò sta, secondo noi, nello sbattimento connesso con le crisi convulsive e nell'agitazione postaccessuale.

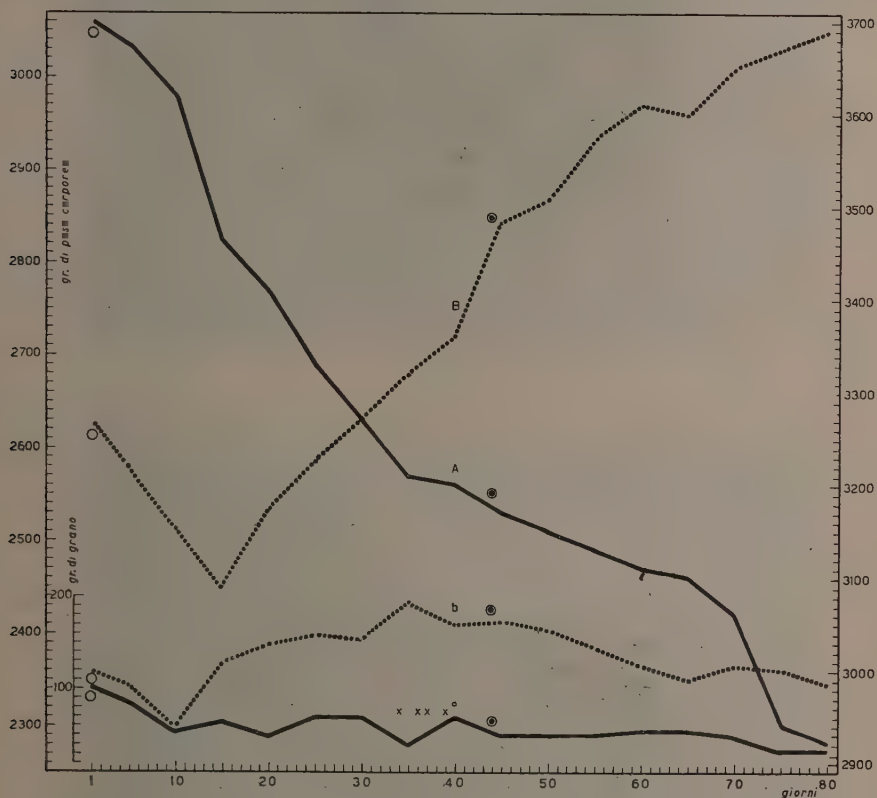
Notevoli sono pure le modificazioni dei processi nutritivi; tali da meritare un'analisi a sè ed un'appropriata illustrazione a parte. Qui ci limitiamo a dire che, in un primo momento, tutti gli animali presentano una diminuzione del senso della fame e, quindi, una diminuita assunzione di alimento ed una diminuita capacità elaborativa dello stesso. In un secondo periodo, invece, mentre in alcuni animali tali fenomeni si accentuano e permangono per tutta la durata e, per un certo tempo, anche dopo la cessazione del trattamento, in altri, all'opposto, si osserva un marcato e sino ad un certo punto progressivo aumento del senso della fame, e, quindi, della quantità di alimento assunto spontaneamente. Nel primo caso, il più frequente, si stabilisce una condizione di iponutrizione, per cui si perviene ad una perdita di peso, che può raggiungere il 16 % alla fine del trattamento e superare il 20 % nel periodo consecutivo (vedi curve A) e a) del grafico); nel secondo caso, all'opposto, si perviene ad un considerevole aumento del peso corporeo (vedi curve B) e b) del grafico).

Stando alle nostre esperienze, la condizione d'ipoalimentazione, allorquando si stabilisce, svolge soltanto un'azione concausale nella regressione dei caratteri sessuali testè descritta. Difatti, a parte il fatto che negli animali elettroshockati, che guadagnano peso, la regressione si osserva ugualmente (vedi figg. 1 e 2), negli animali elettroshockati, che perdono peso, la regressione dei caratteri sessuali ha un comportamento diverso da quello chiaramente stabilito da G. Martino⁽⁵⁾ per i galli ipoalimentati: in questi animali, contrariamente ai nostri, il canto, l'istinto battagliero e il bisogno sessuale scompaiono dopo un mese e più dall'inizio dell'ipoalimentazione ed ancora più tardive sono le modificazioni della cresta e dei bargigli. Infine, cessato il trattamento convulsivante, dopo un periodo di tempo variabile, che in qualche caso può raggiungere e superare i due mesi, si ha, sì, la reintegrazione apparentemente completa dell'alterazione funzionale del testicolo, ma si può osservare ancora, a seconda dei due casi, o la perdita di peso, sempre

(5) G. MARTINO, « Arch. Sc. Biologiche », 9, 339 (1927).

superiore al 20 %, o l'aumento. Comunque, la prima a riprendersi è la funzione endocrina. Difatti, intorno al 20° giorno, il canto riprende, la cresta e i bargigli riacquistano a poco a poco l'aspetto, il colorito e le dimensioni normali, le guance ridiventano rosse, ricompare l'istinto battagliero e, per ultimo, l'istinto sessuale.

A questa epoca però l'attività germinativa del testicolo non si è ancora completamente ristabilita. Difatti in un animale sacrificato a 22 giorni di distanza



Esempi del diverso comportamento del peso corporeo (curve A e B) e dell'assunzione dell'alimento (curve a e b) da parte dei galli sottoposti a ripetute crisi convulsive da E. S. La curva B va riferita all'ordinata di destra.

⊙ = inizio e ⊙ = fine del trattamento; X = alimento imbeccato.

dalla cessazione dell'esperimento, quando già aveva ripreso a cantare e ad eccitarsi di fronte alla gallina, i testicoli sono apparsi ancora notevolmente ridotti di volume e all'esame istologico si è notato riduzione modesta, e non in tutti i tubuli, degli elementi della linea seminale, ed assenza di spermatozoi (vedi figg. 5 e 6).

Solo intorno alla quinta settimana dopo la cessazione del trattamento, abbiamo potuto incominciare a raccogliere dall'animale allenato quantità relativamente scarse di eiaculato, il quale ci si è mostrato dapprima limpido, di poi lattescente



Fig. 1.



Fig. 2.

Figg. 1 e 2. - Esempio di regressione dei caratteri sessuali abbinata ad aumento del peso corporeo in conseguenza del trattamento convulsivante (gallo G: esp. I).

La foto 1 è stata eseguita a 30 giorni dalla fine del trattamento, epoca in cui era constatabile ancora un aumento del 14,33% del peso corporeo.

La foto 2, a 100 giorni dalla fine del trattamento, dimostra l'avanzato ripristino dei caratteri sessuali.

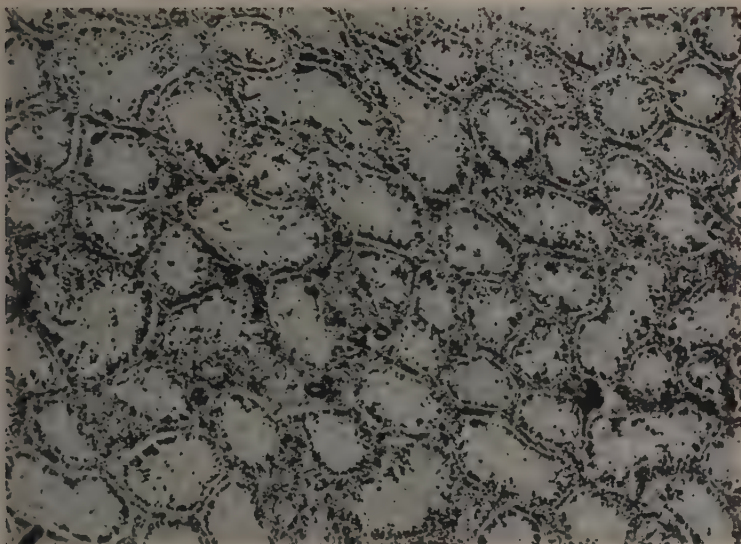


Fig. 3.

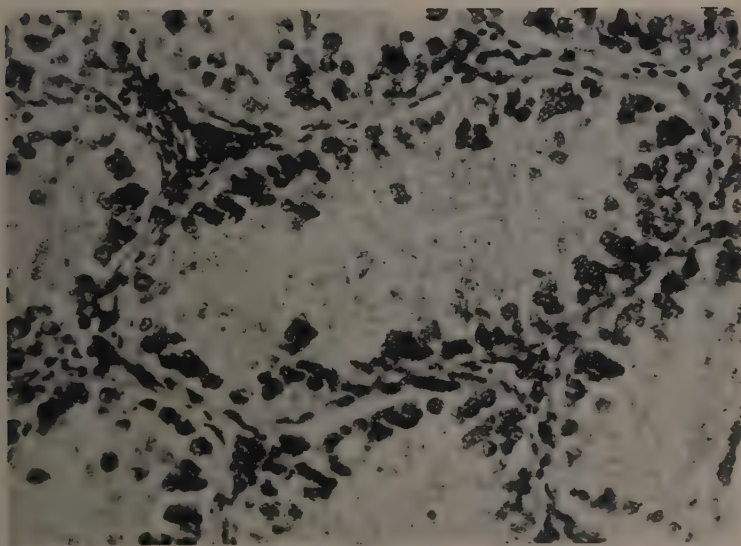


Fig. 4.

Figg. 3 e 4. — *Lo stato del testicolo alla fine del trattamento convulsivante (gallo P: esp. II).*

Si notano segni di notevole regressione degli elementi della linea seminale: i tubuli seminiferi sono ridotti di ampiezza e contengono cellule del Sertoli, spermiogoni e qualche spermio-cita; nel lume sostanza amorfa ed assenza di spermatozoi.

Fig. 3: ocul. 10 X, obj. 8,8 X; scala 100:1; Fig. 4: ocul. 10 X, obj. 42 X, scala 480:1.

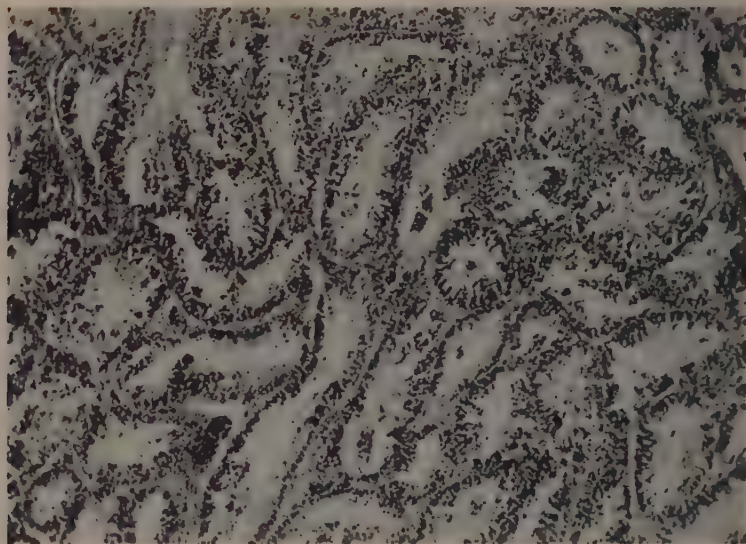


Fig. 5.

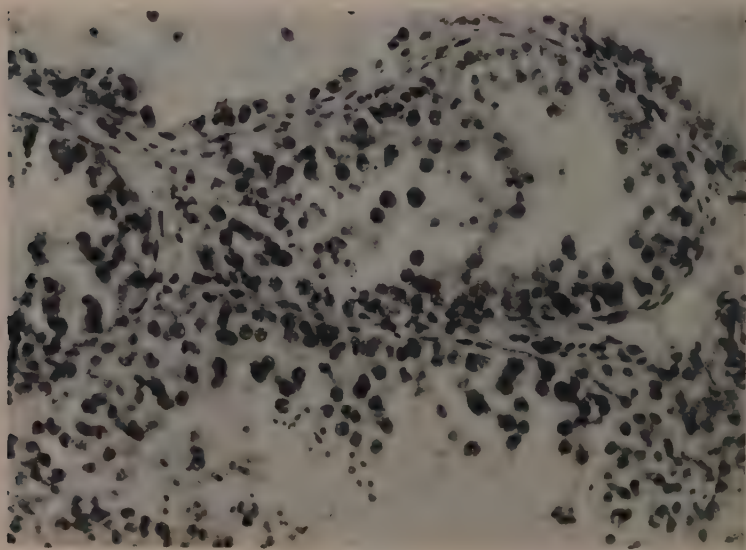


Fig. 6.

Figg. 5 e 6. - Lo stato del testicolo a 22 giorni dalla cessazione del trattamento convulsivante (gallo Gi esp. II).

Il reperto è meno grave che in figg. 3 e 4. Si nota riduzione modesta e non in tutti i tubuli degli elementi della linea seminale; persiste l'assenza di spermatozoi.

Fig. 5: ocul. 10 X, obj. 8,8 X, scala 100:1; Fig. 6: ocul. 10 X, obj. 42 X, scala 480:1.

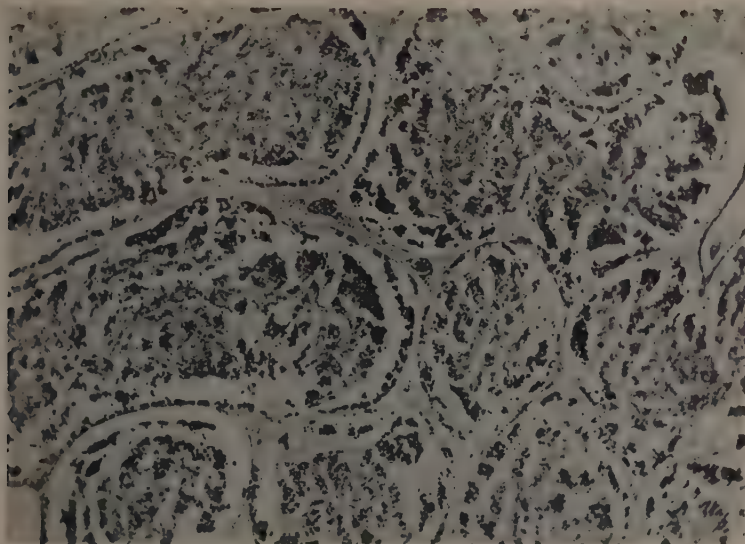


Fig. 7.

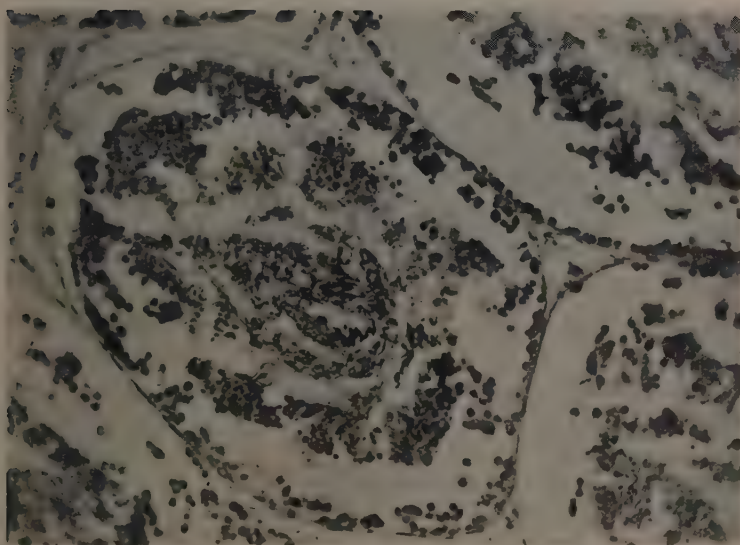


Fig. 8.

Figg. 7 e 8. — *Lo stato del testicolo a 34 giorni dalla cessazione del trattamento convulsivante (gallo A: esp. I).*

Il testicolo ha aspetto normale con abbondanti spermatozoi nel lume di tutti i tubuli, e quindi ripristino anatomico completo con ottima spermiogenesi.

Fig. 7: ocul. 10 X, obj. 8,8 X, scala 100:1; Fig. 8: ocul. 5,6 X, obj. 42 X, scala 268:1.

e infine con l'aspetto latteo suo proprio. In questo caso, al microscopio, abbiamo riscontrato abbondantissimi spermatozoi. Sacrificato l'animale a questo punto, i testicoli ci sono apparsi di grandezza e, istologicamente, di aspetto normale, con abbondanti spermatozoi nel lume di tutti i tubuli (vedi figg. 7 e 8).

Concludendo, possiamo dire che i reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici mediante ES determinano nel gallo evidenti alterazioni funzionali del testicolo, le quali consistono nella sospensione del bisogno e dell'attività sessuale, nel regresso più o meno spiccato dei caratteri sessuali secondari e, istologicamente, nella inibizione della spermiogenesi e in fatti regressivi a carico degli elementi più maturi della linea seminale. Le alterazioni incominciano ad essere apprezzabili sin dalle prime settimane di trattamento, si asseriscono viepiù col progredire dello stesso e in qualche caso possono decorrere nello stesso senso, se non nella stessa misura, della castrazione. Se si evita la morte, il loro ripristino è apparentemente completo in tutti i casi ed esso viene conseguito prima che gli animali abbiano riacquisito il peso normale.

Zoologia. — *Il « Bullinus contortus » ospite intermedio dello « Schistosoma bovis » in Sardegna.* Nota di P. L. LE ROUX e ETTORE BIOCCA, presentata (*) dal Corresp. V. PUNTONI.

Da tempo era stata segnalata l'esistenza dello *Schistosoma bovis* (Sonsino, 1876), in Sardegna ^(1, 2, 3, 4). Recentemente CARTA ^(5, 6) aveva ritrovato il parassita in bovini e ovini e aveva studiato accuratamente il quadro anatomopatologico. Il Giovannola ⁽⁷⁾ aveva dimostrato la presenza di *Bullinus contortus* in Sardegna e, in base alle brillanti ricerche di Brumpt ⁽⁸⁾ in Corsica, era possibile supporre che proprio il *Bullinus contortus* fosse l'ospite intermedio dello *Schistosoma bovis* in Sardegna.

(*) Nella seduta del 10 novembre 1951.

(1) F. SANFELICE und L. LOI, *Ueber das Vorkommen von « Bilharzia crassa » Sonsino in der Leber von Rindern in Sardinia*, « Centrbl. f. Bakt. Abt. I », 20, 305 (1896).

(2) F. SANFELICE e L. LOI, *Di alcune infezioni del bestiame studiate in Sardegna nel quadriennio 1892-1896*. « Istituto Igiene R. Univ. di Cagliari », 1897, cit. BRUMPT.

(3) G. BERTOLINI, *Osservazioni sulla Bilharzia crassa « Schistosomum bovis » e sulle alterazioni da essa prodotte*. « La clinica veterinaria », 31, 1 (1908).

(4) G. ALCEO, *La « Bilharzia crassa » negli ovini sardi*. « La clinica veterinaria », 49, 78 (1926).

(5) A. CARTA, *Contributo alla identificazione della bilharzia dei bovini e degli ovini in Sardegna*. « Riv. di Parassitol. », 8, 37 (1947).

(6) A. CARTA, *Le alterazioni dell'intestino e dei linfonodi regionali nella bilharziosi dei bovini*. « Riv. di Parassitol. », 12, 169 (1951).

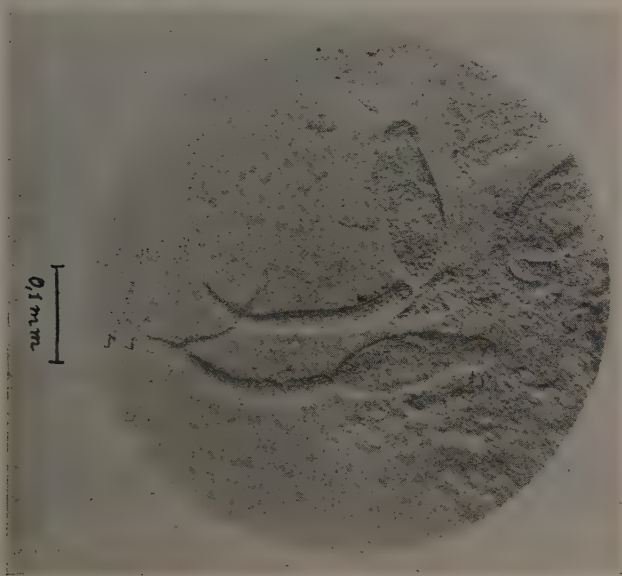
(7) A. GIOVANNOLA, *Osservazioni sui gasteropodi della Sardegna d'importanza medica e veterinaria*. « Riv. di Parassitol. », 2, III (1938).

(8) E. BRUMPT, *Cycle évolutif complet de « Schistosoma bovis ». Infection naturelle en Corse et infection expérimentale de « Bullinus contortus »*. « Ann. de Parasitol. », 8, 17 (1930).

Per l'interesse sia teorico che pratico dell'argomento, ci siamo proposti di controllare in Sardegna il ciclo di vita del parassita studiando i molluschi delle zone infestate ⁽⁹⁾.

Dietro segnalazione della Stazione Zooprofilattica di Sassari ci siamo recati nel litorale orientale dell'Isola, in Provincia di Nuoro (S. Teodoro) dove durante l'anno 1950 erano stati osservati greggi di ovini e bovini con schistosomiasi.

La zona, circondata da monti con rocce granitiche è destinata principalmente ad allevamenti di bestiame. Alcuni torrenti scendono dai monti e durante i mesi caldi si prosciugano quasi ovunque, lasciando larghe pozze di acqua che

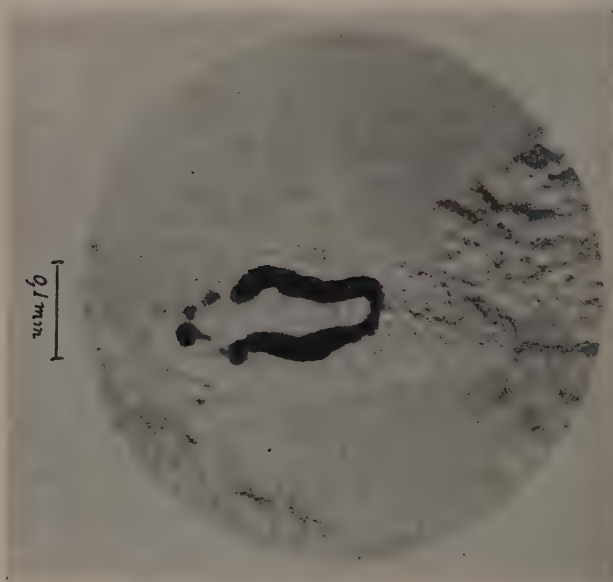


Furcocercarie di *Schistosoma bovis* da *Bullinus contortus*.
(Località S. Teodoro, Prov. Nuoro).

si coprono di vegetazione palustre. Da alcune di queste pozze, che si trovano a poche centinaia di metri dal mare, abbiamo raccolto, in due successive spedizioni effettuate nei giorni 5 e 8 del mese di ottobre 1951, alcune centinaia di *Bullinus contortus*, tutti di piccole dimensioni. Pascolavano nei prati circostanti numerosi bovini in grave stato di denutrizione. Abbiamo anche raccolto feci di alcuni di questi animali. Oltre ai *Bullinus*, che erano i molluschi più numerosi, abbiamo catturato anche alcuni esemplari dei generi *Limnaea* e *Physa*.

(9) Queste ricerche sono state possibili per la attiva collaborazione del prof. E. Mura della Stazione Zooprofilattica di Sassari che ci ha accompagnato nei luoghi infestati e dal dott. A. Parricciatu, veterinario di S. Teodoro (Nuoro) che ci ha coadiuvato nelle ricerche. Siamo altresì grati al prof. Carta, direttore dell'Istituto di Anatomia Patologia Veterinaria della Università di Sassari, per averci messo a disposizione il Laboratorio del suo Istituto.

La ricerca dei molluschi infestati è stata eseguita in Laboratorio nei giorni successivi, seguendo la comune tecnica per ottenere la fuoriuscita delle cercarie e che consiste nell'immergere i molluschi in acqua a circa 30°C. Abbiamo così potuto osservare che in meno di mezza ora comparivano nell'acqua in cui si trovavano i *Bullinus* numerose furcocercarie di schistosoma. Dividendo i molluschi in piccoli lotti abbiamo controllato che solo una percentuale molto modesta di essi, l'1% circa, ne era infestata⁽¹⁰⁾.



Schistosoma bovis. Giovane esemplare di 15 giorni da topino infestato sperimentalmente. Preparato a fresco per schiacciamento di tessuto epatico.

L'esame delle feci dei bovini che pascolavano nella zona ha messo in evidenza alcune uova di *Schistosoma bovis*, confermando l'esistenza della schistosomiasi negli animali.

Dimostrata così la presenza di *Bullinus contortus* infestati, abbiamo cercato di isolare il ceppo di schistosoma su numerosi topini, immergendoli per circa mezza ora in acqua contenente furcocercarie. Già dopo 15 giorni è stato possibile ritrovare lo *Schistosoma bovis* in via di sviluppo nel fegato degli animali.

Concludendo, in base alle nostre osservazioni, possiamo affermare che in Sardegna, nelle zone da noi esaminate (S. Teodoro, Provincia di Nuoro) e in cui esiste schistosomiasi animale da *Schistosoma bovis*, il ciclo di sviluppo di questo parassita si compie nei *Bullinus contortus*, da noi trovati abbondantissimi nelle raccolte di acqua, e da cui abbiamo isolato lo schistosoma su topini.

(10) I *Bullinus* hanno eliminato anche cercarie di paranfistomi, echinostomi, ecc. Le *Limnaea* e *Physa* invece non hanno emesso nessuna cercaria.

Biologia. — *Ricerche sul potere di penetrazione di un ceppo di «Trypanosoma brucei» attraverso le mucose del topino* (*). Nota di MANLIO BORDI, presentata (**) dal Corrisp. V. PUNTONI.

Molte osservazioni e molte ricerche sono state fatte per stabilire se i tripanosomi dei mammiferi possano o meno attraversare le mucose integre dei vari animali, ma i risultati sono stati però diversi e qualche volta persino contrastanti. Solo per il *Trypanosoma equiperdum* pare ammessa da tutti questa capacità. Infatti se si escludono Jwanoff e Mesnil (1927), tutti gli altri, da Laveran e Mesnil (1904) e Muyzert, a Nattan-Larier (1912) ecc. sono d'accordo nell'ammettere che questo tripanosoma abbia la possibilità di attraversare le varie mucose intatte.

La penetrazione per la mucosa della bocca e delle pripe vie digestive è stata oggetto delle ricerche più numerose. Come ci è riferito da Bruce (1895), gli stessi Zulù avevano la convinzione che il «nagana» originariamente fosse una malattia degli animali selvaggi carnivori. Lo stesso Bruce (1897) poté dimostrare che un animale può infettarsi mangiando la carne ed il sangue di animali affetti da tripanosomiasi. Laveran e Mesnil (1904) trovarono che carnivori alimentati con carogne di animali morti per infezione da nagana, si erano infettati a loro volta, ed attribuirono questa trasmissione dell'infezione alla presenza di soluzioni di continuo sulle mucose orali. Chantemesse e Lacomme (1905) descrissero l'insorgere di infezioni da *Trypanosoma brucei* in gatti alimentati con topi, ratti, cavia infetti con la medesima tripanosomiasi.

Queste osservazioni ed altre eseguite da Rouget (1896) e da Francis (1903) con risultati analoghi, spinsero Yakimof e Schiller (1907) ad eseguire una serie completa ed organica di ricerche su vari animali (cani, cavia, topi grigi e bianchi, topolini bianchi e conigli) somministrando per bocca *Trypanosoma brucei*, *evansi*, *equiperdum*, *berberum*, *equinum*. I risultati ottenuti mostrarono che i ratti grigi e bianchi erano più recettivi dei topini bianchi e che il *Trypanosoma lewisi* dava i risultati più positivi mentre l'agente del Mal de Caderas li dava sempre negativi. Borghi (1931) non riuscì ad infettare i ratti attraverso le mucose orali dando loro da mangiare sangue infetto da *Trypanosoma lewisi* mescolato a brodo citratato ed acqua di condensazione di terreni all'agar-sangue, mentre riuscì ad infettarli mettendo loro in bocca qualche goccia di una sospensione di pulci infette.

In seguito Duke-Mettan-Wallace (1934) asserirono che gatti sani dopo aver ingerito topi infetti con *Trypanosoma brucei* s'infettavano a loro volta. Subito però Corson (1934) confutando questa asserzione, dichiarò di non essere mai riuscito ad infettare topi bianchi dando loro da mangiare carni di topo infette con ceppi di *Trypanosoma rhodesiense* sicuramente virulenti; lo stesso risultato ebbero Bernardini e Balboni (1941) con il *Trypanosoma evansi* nei topini bianchi. Biocca (1942) segnalò l'insorgenza di una epizoozia da *Trypanosoma brucei* in cavia in seguito all'ingestione di carni infette.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1951.

Angelotti (1950) riscontrò un caso di «surra» in un cane che era stato alimentato con organi di cammelli affetti da *Trypanosoma evansi* e riuscì a trasmettere sperimentalmente l'infezione al cane per via orale con sangue di cammello colpito da «surra». Congiù (1950) osservò un caso di tripanosi spontanea in un gatto alimentatosi con organi e visceri di cammelli abbattuti per tripanosi da *Trypanosoma evansi*.

Il Lanfranchi (1915-16-18) fu il primo a pensare ad una possibile trasmissione della tripanosomiasi mediante l'allattamento e, con esperienze prima sui cani e poi sui topi, mise in evidenza il possibile passaggio dei *Trypanosoma brucei*, *rhodesiense*, *gambiense* e *lanfranchi*, nel latte ed in più poté dimostrare che madri infette da questi tripanosomi infettavano i loro poppanti solo ed unicamente con l'allattamento, dato che era riuscito ad eliminare la possibilità che mammelle sanguinanti avessero potuto trasmettere la malattia col sangue. Sempre negative gli riuscirono invece le prove con il *Trypanosoma evansi*. Questa tesi fu confermata dalle ricerche di Velu-Eyraud (1916) i quali descrissero un'infezione trasmessa da una cagna inoculata con il tripanosoma dei cavalli del Marocco al proprio cucciolo poppannte.

La mucosa nasale e respiratoria non è impenetrabile per i tripanosomi ed infatti di fronte ai risultati negativi di Jwanoff e Mesnil (1927), abbiamo i risultati positivi di Etinger-Tulczynska (1932) con il *Trypanosoma brucei* nei topi e nei ratti, e quelli di Cristiani (1938) con un maggior numero di ceppi (*Trypanosoma gambiense*, *equiperdum*, *brucei*, *evansi*) nei topini bianchi e nelle cavie.

Anche la mucosa auricolare non offre un severo ostacolo alla penetrazione dei tripanosomi nell'organismo. Cristiani (1938) ottenne l'infezione di cavie con *Trypanosoma gambiense*, *equiperdum*, *brucei* ed *evansi*, inoculando per via auricolare.

La mucosa congiuntivale è pur essa abbastanza facilmente superata da alcuni tripanosomi; infatti Brumpt (1912) riuscì ad infettare un *Cercopithecus ruber* mettendogli negli occhi escrementi di *Conorhinus megistus* infetti con *Trypanosoma cruzi* e l'anno dopo (1913) confermò questo risultato infettando un topo mettendogli negli occhi escrementi infetti con forme metacicliche di *Trypanosoma lewisi*. Nello stesso anno Neiva (1913) riuscì ad infettare cavie sane istillando loro nel sacco congiuntivale sangue infetto di *Trypanosoma equinum* ed *evansi*.

Brumpt (1913) riuscì ad infettare dei topi mettendo loro nell'ano escrementi contenenti forme metacicliche di *Trypanosoma cruzi*.

Congiù (1950) ottenne facilmente l'infezione dei gatti con *Trypanosoma evansi* praticando clisteri di sangue di cammello infetto di «surra».

OSSERVAZIONI PERSONALI. - Abbiamo studiato il comportamento dei topini bianchi adulti di fronte a un ceppo di *Trypanosoma brucei* deposto nelle varie mucose (orale, nasale, auricolare, anrettale e genitale). Il controllo del sangue agli animali veniva praticato ogni dodici ore per i primi quattro giorni dall'inizio dell'esperienza, ed ogni 24 ore nei giorni successivi sino al 30° giorno.

Il ceppo era particolarmente virulento e uccideva costantemente gli animali (topini, cavie e conigli) se inoculato per via sottocutanea, in circa una settimana. Sebbene abbiamo cercato di inoculare sempre una dose corrispondente di tripa-

nosomi, tuttavia data la virulenza del ceppo, le inevitabili differenze di carica parassitaria adoperate nelle successive esperienze non hanno dimostrato nei controlli di modificare sensibilmente la durata della malattia. In ogni esperienza sono stati inoculati almeno due topini per via sottocutanea con una dose corrispondente dello stesso sangue infetto.

Via orale. — Due lotti di 8 topini ciascuno furono mantenuti a digiuno per 36 ore. Al primo lotto si dettero in pasto altri topini appena uccisi e sicuramente infetti dopo averli aperti ampiamente. I topini divorarono subito le carni lasciando però le ossa scarnificate ma perfettamente intatte.

Al secondo lotto si somministrò un egual pasto avendo cura di praticare, immediatamente prima, delle piccole scarificazioni con un ago sterile in corrispondenza del palato, delle gengive e della faccia interna della guancia.

Dopo 30 giorni nessun topino del primo lotto era ammalato o presentava tripanosomi in circolo, mentre quelli del secondo lotto dopo 48 ore avevano nel sangue circolante i tripanosomi e morivano, come i due controlli (inoculati sottocute con 0,20 cm³ dello stesso sangue degli animali dati in pasto) in 5^a-7^a giornata.

Via nasale. — A 6 topini, in seguito ad anestesia eterea, vengono fatte inalare 3-4 gocce di sangue ricco di tripanosomi. Dopo 48 ore, in tre topini appaiono tripanosomi in circolo, in altri due questi compaiono dopo 60 ore e negli altri dopo 72 ore. Tutti però vengono a morte tra il 6° e l'8° giorno quasi contemporaneamente ai topini controllo trattati con la medesima quantità di sangue per via sottocutanea.

Via oculare. — Vengono instillate nel sacco congiuntivale di 5 topini due gocce di sangue infetto lasciandole cadere da una pipetta Pasteur in modo da non produrre alcuna lesione. Malgrado l'attento esame del sangue nessun topino, dopo un mese, presentava tripanosomi in circolo mentre i controlli morivano in 5^a-7^a giornata.

Via auricolare. — Nel condotto uditivo esterno di 6 topini si lasciano gocciolare 2-3 gocce di sangue sicuramente infetto da una piccola siringa di Pravatz, dopo aver controllato che non vi siano lesioni auricolari macroscopicamente acceratabili. I topini sono tenuti per 10 minuti in posizione orizzontale e distesi su un fianco in maniera che il condotto uditivo resti verticale. Dopo 4 giorni in due topini apparivano tripanosomi in circolo, in un terzo comparivano in 5^a giornata ed in un quarto in 6^a giornata, mentre gli altri due restavano sani. I topini ammalati morivano tra l'8^a e la 9^a giornata.

Via ano-rettale. — Con una piccola siringa con il beccuccio spalmato di vaselina e introdotto nell'ano, si inoculavano 2-3 gocce di sangue ricco di tripanosomi nel retto di 5 topini, mentre ad altri 5 si facevano cadere un egual numero di gocce dello stesso sangue proprio sull'orificio anale senza introdurre la siringa. Nel sangue di un topino del primo lotto si mettevano in evidenza dopo 48 ore, dei tripanosomi in circolo e dopo altri 5 giorni il topino moriva, mentre gli altri topini sia del primo che del secondo lotto, vivevano in perfetta salute ancora dopo un mese.

Via genitale. — Due gocce di sangue infetto lasciate cadere mediante una pipetta Pasteur nella vulva di 5 topine non provocavano infezione in nessun

animale. Ugual risultato si aveva in 5 topini cui s'era deposto sul glande una goccia dello stesso sangue che pure, inoculato sotto cute, portava a morte controlli in 5^a-7^a giornata.

Concludendo, il ceppo di *Trypanosoma brucei* da noi utilizzato e particolarmente virulento, ha la capacità di attraversare con grande facilità le mucose delle vie respiratorie di topini adulti normali. Le mucose delle vie uditive sono anch'esse attraversate con relativa facilità, mentre quelle oculare, delle vie digerenti, della vulva e del glande offrono una barriera valida all'infezione qualora non abbiano soluzioni di continuo.

Ci sembra interessante segnalare la molto maggior permeabilità delle mucose respiratorie ed auricolari del topino in confronto delle altre mucose per le eventuali applicazioni di patologia sperimentale.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) ANGELOTTI S. (1950). *Surra spontanea nel cane per ingestione di organi di cammello infetti*. « La Clinica veterinaria ». Cit. CONGIÙ.
- (2) BERNARDINI O., BALBONI E. (1941). *Osservazioni sul comportamento di alcuni roditori da laboratorio di fronte all'inoculazione per os di un tripanosoma patogeno « Trypanosoma evansi »*. « Riv. Mil. Med. Vet. », 2, 59-72.
- (3) BIOCCA E. (1942). *Sulla trasmissione della tripanosomiasi mediante l'ingestione di carni infette*. « Riv. di Paras. », 6, 174-175.
- (4) BORGHI B. (1931). *Ricerche sopra alcune proprietà biologiche del « Trypanosoma lewisi »*. « Boll. Ist. Sier. Mil. », 12, 798-805.
- (5) BRUCE D. (1895). *Preliminary report on the Tse-tse fly disease or nagana in Zululand*: citato da YAKIMOFF e SCHILLER.
- (6) BRUCE D. (1897). *Further report on the Tse-tse fly disease or nagana in Zululand*: citato da DUKE-METTAN-WALLACE.
- (7) BRUMPT E. (1912). *Pénétration du « Schizotrypanum cruzi » à travers la muqueuse oculaire saine*. « Bull. Soc. Path. Exot. », 5, 723-724.
- (8) BRUMPT E. (1913). *Evolution de « T. lewisi, duttoni, nabiasi, blanchardi » chez les Paces et les Punaises. Transmission par les déjections*. « Bull. Soc. Path. Exot. », 6, 167-171.
- (9) CHANTEMESSE-LACOMME. Citato da LAVERAN e MESNIL.
- (10) CONGIÙ S. (1950). *Il « Trypanosoma evansi » trasmesso al gatto per via orale e rettale*. « Boll. Soc. Ital. Med. e Ig. Trop. », 10, 171-175.
- (11) CORSON J. F. (1934). *Resistance of white rats to infection with Tryp. rhodesianse through eating infected tissues of rats*. « Ann. Trop. Med. and Par. », 28, 589.
- (12) CRISTIANI M. (1938). *Sulla permeabilità della mucosa nasale per alcuni protozoi*. « Arch. It. Soc. Med. Col. e Paras. », 19, 416-429.
- (13) CRISTIANI M. (1938). *Infezione da tripanosomi e spirochete per via auricolare*. Ibidem, 19, 406-416.
- (14) DIESING D. (1913). *Die Uebertragung der Schlafkrankheit durch den Geschlechtsakt*. « Arch. f. Schiff. u. Trop. Hyg. », 22, 786-788.
- (15) DUKE H. L., METTAN R. W. M. and WALLACE J. M. (1934). *Observations on the direct passage from vertebrate of recently isolated strains of Tryp. brucei and Tryp. rhodesianse*. « Trans. Roy. Soc. Trop. Med. and Hyg. », 28, 77-84.
- (16) ETINGER, TULCZYNSKA (1932). *Nasale Infection von Mäusen und Ratten mit Trypanosomes und Spirochaetes*. « Ztschr. f. Hyg. u. Infk. », 113, 590-596.
- (17) FRANCIS E. (1903). *An experimental investigation on Trypanosoma lewisi*. « Hyg. Lab. U. S. Pub. Health and Mar. Hosp. Ser. », 11. Citato da LAVERAN e MESNIL.

- (18) JWANOFF E. et MESNIL F. (1927). *Le Trypanosome de la Dourine traverse-t-il la peau ou les muqueuses saines.* « Ann. Inst. Pasteur », 5, 507-512.
- (19) LANFRANCHI A. (1915). *Sur le passage des Trypanosomes dans le lait.* « Bull. Soc. Path. Exot. », 8, 438-442.
- (20) LANFRANCHI A. (1916). *Sul possibile passaggio dei Tripanosomi nel latte.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », 5, 369-374.
- (21) LANFRANCHI A. (1918). *Sul possibile passaggio dei Tripanosomi nel latte.* Ibidem, 7, 62-67.
- (22) LAVERAN A. et MESNIL F. (1904) *Trypanosomes et Trypanosomiasis* Paris. Ed. Masson.
- (23) MUYZERT. Citato da YAKIMOFF e SCHILLER.
- (24) NATTAN-LARIÈRE L. (1912). *Non transmission des Trypanosomiasis de la mère au fœtus.* « Boll. Soc. Path. Exot. », 5, 550.
- (25) NEIVA A. (1913). a) *Infeção de cobayas pela passagem do Tryp. equinum através a conjuntiva* (nota previa). « Brazil Med. », 32, 333;
b) *Penetração do Tryp. evansi através a conjuntiva da cobaya* (nota previa). « Brazil Med. », 34, 356.
- (26) ROUGET J. (1896). *Contribution à l'étude du Trypanosome des mammifères.* « Ann. Inst. Pasteur. », 10, 716-728.
- (27) VELU H. et EYRAUD R. (1916). *Trypanosomiasis de Chevaux au Maroc. Infestation d'un jeune chien par l'allaitement.* « Bull. Soc. Path. Exot. », 9, 567.
- (28) YAKIMOFF W. L. und SCHILLER N. (1907). *Zur Trypanosomeninfektion durch die Schleimhaut des Verdauungstraktes.* « Zbl. f. Bakt. », 43, 694-702.

Scienza dell'Alimentazione. — *Fattori lipotropi ed assorbimento enterico di emulsioni oleose*^(*). Nota di ARRIGO LODOVICO e TULLIO MONTINI, presentata^(**) dal Socio U. LOMBRoso.

Il meccanismo di azione dei fattori lipotropi è tuttora studiato, soprattutto in condizioni di accumulo dei grassi nell'organismo e di alterato metabolismo lipidico. Per i più noti di essi, è stata così dimostrata la possibilità di attivare il ricambio dei lipidi, nel corso di steatosi variamente provocate, del fegato e degli organi splancnici.

Va però sottolineata l'opportunità di considerare tutte le tappe di tale ricambio, rammentando come la capacità di assorbimento sia spesso in diretto rapporto colla possibilità per l'organismo di utilizzare tale grasso.

È noto infatti come, quando, ad esempio, in un cane, manca il pancreas, ad una difficoltà ossidazione del grasso corrisponda la pressochè completa incapacità di assorbire materiale lipoideo dall'intestino e dal peritoneo⁽¹⁾. Ed anzi, in questo caso, si assiste spesso ad un altro fenomeno singolare: l'animale spancinato perde una quantità di lipidi, attraverso le feci, che può superare quella alimentare⁽²⁾, poichè l'intestino viene a rappresentare un cospicuo emuntorio per un materiale difficilmente utilizzato.

(*) Lavoro eseguito sotto gli auspici del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

(1) L. ARRIGO e T. MONTINI, SIPS, riunione di Lucca, ottobre 1950.

(2) U. LOMBRoso, « Arch. per le scienze mediche », XXVIII, 141 (1904).

Tre sono dunque i momenti principali del metabolismo lipidico: le modalità di assorbimento del grasso; le sue vicende endogene di distribuzione ed utilizzazione; la dimostrata possibilità che esso sia escreto dall'organismo.

Su ognuna di queste tappe, va dunque studiato l'effetto dei fattori lipotropi, per un giudizio complessivo delle loro proprietà, dato che ancora non è ben noto il meccanismo di azione di ognuno di essi.

È stato sicuramente dimostrato che il cane spancreato non assorbe emulsioni di olio (ad esempio, di cocco, di oliva, di lino), introdotte in una ansa intestinale, estrinsecata alla Thiry-Vella: inoltre, poichè come abbiamo ricordato, in questa condizione, il grasso è ossidato con difficoltà e molto ne è drenato dall'intestino, la spancreatizzazione risulta il dispositivo migliore, per seguire l'effetto globale dei fattori lipotropi. Se infatti qualcuno di essi ripristinasse l'assorbimento, senza che essi siano direttamente presenti in un tratto di intestino, e, per gli olii molto saturi, la possibilità di essere deidrogenati, che viene anch'essa a mancare totalmente in tale caso ⁽¹⁾ ed inoltre riducesse l'entità della stearea, potremo affermare che esso effettivamente attivi e normalizzi tutte le tappe del ricambio dei grassi.

Abbiamo voluto studiare il primo di questi quesiti, in via preliminare, nel modo più diretto, seguendo cioè la possibilità di ripristino dell'assorbimento nell'animale spancreato, in un segmento di intestino tenue. Solo successivamente estenderemo la ricerca al quesito dell'assorbimento enterico dei lipidi nel suo complesso.

Ci siamo così orientati ad una ricerca sistematica, per completare sul « test » dell'assorbimento enterico, in ansa estrinsecata alla Thiry-Vella ed in condizioni di pancreatectomia, lo studio delle proprietà di alcuni dei più noti fattori lipotropi.

Il dispositivo e la tecnica sperimentale sono stati quelli descritti nel nostro lavoro, già citato ⁽²⁾: Una volta accertata cioè la situazione di partenza di impossibilità di assorbimento e desaturazione d'emulsioni, in particolare di olio di cocco, nel cane spancreato e trattato con adeguate dosi di insulina, tenuto ad una dieta sufficiente in calorie e piuttosto iperproteica, abbiamo proceduto alla somministrazione di alcuni fattori lipotropi. Abbiamo studiato: la colina, la metionina, l'« A. F. L. », estratto secondo Chaikoff-Entenman, la poltiglia di pancreas ⁽³⁾. Inoltre abbiamo saggiata l'azione della tripsina, somministrata sia per iniezioni che per via orale (in quantità di mgr. 50-100-500 *pro die*), in considerazione della sua dimostrata attività lipotropa. Essa infatti, che è abitualmente priva di potere lipasico e desaturasico, promuoverebbe, secondo Montgomery, Chaikoff, Entenman, Feinberg ⁽⁴⁾, un così decisivo incremento dell'assorbimento di aminoacidi lipotropi, da spiegarne, in tale modo, le proprietà antisteatogene.

Abbiamo inoltre impiegato la teofillina (mgr. 150, *pro die* per os), come la più efficace base xantinica, dotata di attività lipotropa ed alcune vitamine del gruppo B. Tra di esse, abbiamo studiato la vitamina B₂ e l'acido pantotenico (rispettivamente somministrati in dosi di mgr. 20 e 10, al giorno, per via intra-

(3) U. LOMBROSO, L. ARRIGO, T. MONTINI, « B. S. I. B. S. », 27, 620 (1951).

(4) M. L. MONTGOMERY, C. ENTENMAN, I. L. CHAIKOFF, H. FEINBERG, « Journ. biol. Chem. », 185, 307, (1950).

muscolare) ed inoltre la vitamina B₁₂ (10 gamma, a giorni alterni) e l'acido folico (mgr. 15 ogni due giorni, per iniezione); tutte, a seconda di recenti contributi^(5,6,7,8), sarebbero principi lipotropi.

Riassumiamo nel seguente prospetto, i valori medi, ottenuti in 10 esperienze per ogni gruppo, delle percentuali di assorbimento di emulsioni al 10% di olio di cocco e del comportamento del numero di iodio dei residui di emulsione, ricuperati, dopo 30' di permanenza in ansa alla Vella e dopo 48 h di permanenza in autolisi asettica (vedi tabelle).

TABELLA I.

Valori percentuali di assorbimento di emulsioni oleose in ansa alla Vella.

	E. olio oliva al 10 %	E. olio cocco al 10 %
Cani normali	29 %	46 %
Cani normali spancreati	00	00 %
Id. e trattati con colina	00	3 %
Id. » » vitamina B ₂	00	00
Id. » » vitamina B ₁₂	00	00
Id. » » acido pantotenico	00	00
Id. » » acido folico	00	00
Id. » » complesso B	4 %	6 %
Id. » » tripsina	2 %	6 %
Id. » » metionina	10 %	18 %
Id. » » teofillina	12 %	20 %
Id. » » A. F. L.	19 %	25 %
Id. » » poltiglia di pancreas (per os) .	21 %	28 %

Sono da considerare significativi solo i valori, che superano il 10 %.

Trattandosi di valori medi di numerose esperienze, sono riportate solo le cifre intere di percentuale, che sole hanno significato reale.

Della serie studiata, solo la poltiglia di pancreas, l'« A. F. L. », la teofillina e la metionina hanno evidenziato un netto intervento sulla possibilità di assorbimento dei grassi emulsionati, da parte di un tratto di intestino tenue isolato.

(5) L. ARRIGO, T. MONTINI, « Arch. sci. biol. », XXXV, 429 (1951).

(6) L. ARRIGO, T. MONTINI, « B. S. I. B. S. », 26, 1339 (1950).

(7) C. R. ELVEHJEM, « Journ. amer. diet. Ass. », 22, 959 (1945).

(8) L. BENDA, E. RISSEL, « Zeit. Vit., Hormon, Fermenteforschung », 3, 19 (1950).

Tale assorbimento si accompagna costantemente al ripristino della capacità desaturante della mucosa enterica e ciò avviene in modo così costante, da fare supporre un intervento diretto del pancreas, della teofilina e della metionina sui sistemi desaturasici, già altrimenti postulato per il primo, tra gli altri da Polli, Ratti, Cova⁽⁹⁾, e da Hindemith⁽¹⁰⁾ per le basi xantiche.

Si accentua così, almeno per i grassi molto saturi, l'importanza di un certo grado di desaturazione, anche per il loro assorbimento. Questo dato viene a confermare le ricerche di Lombroso e Martini⁽¹¹⁾ sull'importanza delle variazioni del numero di iodio, che accompagnano l'assorbimento enterico di emulsioni di olii e propongono ancora una volta l'intervento della desaturazione, come tappa primitiva per la loro successiva utilizzazione^(12, 13).

TABELLA II.

Valori del numero di iodio di emulsioni di olio di cocco, dopo permanenza in ansa alla Vella.

	Dopo 30'	Dopo 48 h di autolisi asettica
Cani normali	18	36
Cani normali spancreati	9	10
Id. e trattati con colina	9	9
Id. » » vitamina B ₂	9	9
Id. » » vitamina B ₁₂	9	9
Id. » » acido pantotenico	9	9
Id. » » acido folico	9	9
Id. » » complesso B	9	9
Id. » » tripsina	10	12
Id. » » metionina	15	24
Id. » » teofilina	14	20
Id. » » A. F. L.	18	30
Id. » » poltiglia di pancreas	19	32

(9) G. POLLI, N. RATTI COVA, « Arch. Fisiopat. del Ricambio », XIII, 33 (1949).

(10) H. HINDEMITH, « Arch. fur EXP. Path. », 193, 587 (1939) e 99, 167 (1942).

(11) U. LOMBRoso, V. MARTINI, « B. S. I. B. S. », 13, 581 (1937).

(12) V. R. BHALERAO, D. VENKATAPPIAH, C. P. ANANTAKRISHNAN, « Indian Journ. Vet. Sci. », 17, 221 (1947).

(13) K. BERNHARD, « Helv. phys. u. pharm. Acta », 6, 826 (1948); L. GESCHAEGLER-G. VOLIER, « Helv. phys. u. pharm. Acta », 6, 267 (1948).

In questo senso, si potrebbe pensare, da un punto di vista unitario, che pancreas, metionina e teofillina possono interferire, con ruolo vario, da studiare ulteriormente, su alcuni sistemi enzimatici della mucosa enterica.

Interessante risulta il rilievo della completa inefficacia di altri fattori lipotropi studiati ⁽¹⁴⁾. In particolare, negativo è risultato l'impiego della colina, la quale del resto non è costantemente attiva in tutti i tipi di steatosi epatica (Best-Ridout ⁽¹⁵⁾), nè modifica l'entità della stearea nell'animale spancreato (nostri dati). Vari Autori hanno del resto già affermato che essa non esercita alcuna influenza sull'assorbimento enterico degli olii ^(16, 17).

La tripsina, che si è rivelata un potente lipotropo, proprio nella steatosi del cane spancreato e pare sia in grado di diminuire l'entità della stearea (nostre ricerche in corso), non risulta tuttavia in grado di modificare l'assorbimento dell'olio nell'ansa alla Vella. Tale fatto è probabilmente da mettere in rapporto all'ipotesi che il complesso pancreatico, attivo nel ricambio dei lipidi, comprenda vari principi, ad azione specifica, estraibili in varia percentuale e purezza, coi diversi procedimenti, impiegati per ottenere il «lipocaic», l'«A. F. L.», il complesso triptico, ecc.

Già Lombroso e Dachà ⁽¹⁸⁾ avevano affermato che le vitamine del Gruppo B non modificavano la stearea del cane spancreato: le più significative di esse non hanno del pari dimostrato alcun effetto lipotropo sulla capacità assorbente dell'ansa intestinale estrinsecata, pur essendo state impiegate a tale scopo, in ricerche, eseguite sull'assorbimento dei grassi, in individui spruetici.

Possiamo perciò affermare, come conclusione, che i fattori lipotropi più genericamente indicati per l'assorbimento dei grassi sono, in ordine decrescente di attività, per quanto riguarda il ripristino dell'assorbimento enterico, quelli contenuti nel pancreas ed estraibili, ad esempio, colla tecnica di Chaikoff e Entenman, la metionina e la teofillina.

Per i fattori lipotropi, contenuti nella poltiglia di pancreas, è stata infine dimostrata da Lombroso ⁽¹⁹⁾ una azione regolatrice della tipica stearea dell'animale spancreato, epperò essi possono attualmente ritenersi gli elementi che meglio rispondono, per ottenere la completa normalizzazione del ricambio lipidico, nei suoi tre aspetti principali:

- assorbimento del grasso (direttamente dimostrabile nell'ansa alla Vella);
- sua utilizzazione endogena-tissurale;
- normale percentuale di eliminazione, attraverso l'emuntorio intestinale.

(14) Anche la somministrazione di inositolo, sia per os che per via parenterale (gr. 0,5—2. al giorno), non ha ripristinato l'assorbimento.

(15) C. H. BEST—J. H. RIDOUT, «Annual Review of Bioch.», *Choline*, p. 349 (1939).

(16) R. R. TASKER—W. S. HARTROFT, «Nature», 155, 764 (1949).

(17) M. SOSHKE—R. P. GEYER—F. J. STARE, «Proc. of Soc. exp. Biol. & Med.», 75, 680 (1950).

(18) U. LOMBRoso, U. DACHÀ, «B. S. I. B. S.», 25, 760 (1949).

(19) U. LOMBRoso, «Arch. per le Scienze mediche», LI, 1927 (volume speciale).

L'INTERVENTO U.S.A. E LA SUA POSSIBILE INFLUENZA SU LA SCIENZA E LA CULTURA ITALIANA

Comunicazione (*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI

Signor Presidente, Colleghi, Signori,

Non vi dispiaccia ch'io vi intrattenga brevemente su la situazione che alla scienza ed alla cultura italiana sta per venire creata dall'intervento in atto degli Stati Uniti d'America. I quali, a seguito di un succedersi di eventi che sono a voi ben noti, e in vista di possibili eventi futuri sui quali sarebbe qui fuor di luogo formulare apprezzamenti o giudizi, si propongono di imprimere un vigoroso impulso alle attività produttive della vecchia Europa.

L'intervento si è svolto in tre tempi ben distinti.

Nel primo, di fronte all'evidente intralcio che allo sviluppo delle industrie europee viene frapposto dal frazionamento del continente in numerose piccole unità nazionali e dalla conseguente limitazione dei mercati, i responsabili della politica americana furono logicamente condotti ad orientare la loro azione verso una decisa liberalizzazione degli scambi ed una progressiva abolizione delle barriere doganali. Voi sapete meglio di me contro quali ostacoli si è praticamente infranto questo grandioso disegno.

Le Autorità statunitensi hanno allora pensato che ad un incremento della produttività in Europa si potesse comunque arrivare attraverso l'attuazione di un piano di aiuti intesi a finanziare il rapido rinnovamento degli impianti e delle attrezzature, la razionalizzazione dei processi di lavorazione, e a determinare in conseguenza l'aumento della produzione e la riduzione dei costi. Ma anche questo secondo tempo non sembra abbia dato apprezzabili risultati.

D'altra parte eventi nuovi e nuovi orientamenti della politica americana conferivano al problema della produttività un carattere di sempre maggiore importanza e di sempre più immediata urgenza; mentre diveniva evidente che ad un risultato concreto non si sarebbe tempestivamente arrivati se non attraverso un intervento diretto.

In che cosa possa precisamente consistere questo intervento diretto è presto detto: si tratta di trasportare e di applicare in Europa quei metodi che hanno permesso all'industria americana di raggiungere il suo attuale livello produttivo.

Che il tentativo possa incontrare serie difficoltà in ragione delle diverse condizioni di fatto dei due continenti, che quei metodi che dànno così buoni

(*) Tenuta nella seduta a Classi riunite dell'8 dicembre 1951.

risultati in America possano rivelarsi in Europa solo in parte applicabili, e comunque non egualmente fecondi di felici risultati, è facile prevedere. Ma non v'è dubbio che l'esperimento, se attuato con decisione e su vasta scala, non mancherà di esercitare una profonda influenza e di determinare situazioni del tutto nuove non solo nel ristretto e specifico campo della tecnica, ma anche nel ben più vasto e più delicato settore della organizzazione industriale e di quelle attività di carattere culturale o sociale che alla tecnica sono intimamente connesse.

Perchè gli esperti americani che sono deputati alla organizzazione di questo esperimento sanno bene che non dovranno affrontare soltanto un problema tecnico, di rimodernamento di macchinarii, di attrezzature, di impianti, ma anche e prima di tutto un problema umano, di rinnovamento di mentalità e di creazione di nuovi rapporti tra i diversi fattori della produzione.

Essi sanno che nessun perfezionamento tecnico raggiungerà in Europa i risultati realizzati in America se non si riuscirà prima di tutto ad abbattere certe barriere psicologiche che sono, in Europa, il residuo di tempi e di situazioni decisamente superate; se non si riuscirà ad imprimere nella mente del lavoratore l'idea che il superiore livello di vita a cui egli giustamente aspira per sé e per la sua famiglia dipende in prima linea dal livello di produttività che la Nazione raggiunge.

Questa idea si imporrebbe da sé naturalmente in qualunque comunità ristretta di pochi individui, nell'ambito della quale ciascun individuo sarebbe subito condotto a constatare che la possibilità per lui di soddisfare ai suoi bisogni cresce col crescere della somma dei beni che la collettività produce e mette a disposizione dei suoi membri.

Questo rapporto di rigorosa interdipendenza è meno palese, ma non meno vero, nelle grandi collettività; dove però il denaro, pur essendo solo uno strumento di scambio, può agli occhi degli ignari assumer la fallace apparenza di un bene reale, e determinare, nell'uno come nell'altro dei due fattori della produzione, l'egoistica concezione secondo la quale nel grande gioco bisogna prendere il più possibile e dare il meno possibile.

Diffondere la coscienza della produttività come elemento essenziale nei rapporti fra capitale e lavoro è problema di formazione mentale, è problema di cultura.

Scuole professionali, corsi di addestramento e di tirocinio, borse di studio, incoraggiamenti di ogni genere ad ogni forma di attività che sia intesa alla educazione, alla istruzione, alla elevazione spirituale delle masse, ecco le sole iniziative che potranno veramente trasformare la situazione attuale e determinare lo spirito di collaborazione che ogni aumento di produttività presuppone.

A condizione beninteso che sia ben chiaro che, quando si adottano metodi nuovi capaci di determinare un aumento del rendimento della mano d'opera, non venga più in mente a nessuno che, per riflesso, le paghe possano esser ridotte.

Le masse sanno, per lunga e dolorosa esperienza, che, in troppi casi, il risultato dei progressi tecnici è andato tutto a vantaggio dei soli datori di lavoro.

Cancellare siffatti ricordi, eliminare per l'avvenire ogni sospetto del genere, dare ai lavoratori la certezza che di ogni possibile incremento della produttività essi pure trarranno un equo vantaggio, far sì che essi si sentano interessati a collaborare al raggiungimento di un bene comune e lo facciano con senso di piena, di assoluta fiducia, ecco certamente una assai ardua impresa. Se l'intervento americano ci dovesse aiutare a realizzarla, ciò basterebbe perché noi dovessimo accoglierlo e favorirlo con lieto animo e con sincera compiacenza.

Senonché vi sono altri aspetti del fenomeno le cui conseguenze possono per noi esser men liete. E sono quelli che si riferiscono alla organizzazione delle ricerche scientifiche che devono fiancheggiare l'attività produttiva propriamente detta e mettere al suo servizio i più moderni ritrovati della scienza.

Anche su questo terreno molte novità ci attendono.

In materia di ricerca scientifica vi è infatti, tra l'organizzazione americana e la nostra, un distacco che non è soltanto, come a prima vista si potrebbe credere, di mezzi finanziari e strumentali, ma di mentalità e di metodo.

Noi possediamo in Europa - e in Italia in modo particolare - un patrimonio ricco di tradizioni e di prestigio, a cui non sapremmo accostarci senza subir l'influenza dei grandi che ci hanno preceduto e che ci furon maestri, per altezza di ingegno, per nobiltà e disinteresse di intenti.

Di questo prestigioso passato, oltreché del carattere individualistico della nostra mentalità, è permeata tutta la nostra organizzazione di ricerca con tutti i vantaggi e con tutti gli inconvenienti che ne derivano.

Gli americani sanno e riconoscono di buon grado che tutte le idee nuove sono nate in Europa, e che all'Europa essi debbono quelle grandi scoperte di cui essi hanno poi saputo trarre profitto attraverso quella loro organizzazione della ricerca applicata che si spinge sul terreno pratico fino alla messa a punto dei processi produttivi.

Nella nostra inesauribile originalità di pensiero, nella nostra facoltà di immaginazione sempre vigile ed irrequieta, sempre tesa verso ciò che sembra stare al di là dei limiti stessi del possibile, gli americani riconoscono la fonte prima dei grandi progressi della scienza moderna. E i migliori tra essi si rendono anche conto del pericolo che minaccierebbe l'America stessa se questa fonte si inaridisse; e in buona fede cercano di venire in aiuto della nostra gioventù studiosa di cui conoscono ed apprezzano il valore, le aspirazioni, i bisogni. Ma si illudono di farlo inquadrando questa nostra gioventù in Istituti di tipo americano.

In realtà, sotto l'assillo di preoccupazioni contingenti, essi si accingono a creare in Europa - forse in Italia - degli Istituti di ricerca applicata del

tipo di quelli che funzionano a casa loro, perché le nostre industrie siano fiancheggiate e scientificamente assistite come le loro.

Ora da siffatte iniziative le industrie potranno certamente trarre vantaggio; ma non v'è dubbio che istituzioni di questo genere, dotate, come esse saranno certamente, di una larghezza di mezzi a cui i nostri istituti scientifici non sono avvezzi, attrarranno a sé i migliori tra gli studiosi e opereranno una selezione a rovescio nei nostri centri di alta cultura.

E dico «selezione a rovescio» non solo nel senso che i migliori, soprattutto fra i giovani, attratti dalla possibilità che verrà loro offerta di sottrarsi alle attuali troppo misere condizioni di vita, e più ancora dalla possibilità di disporre di ben più larghi mezzi di lavoro e di studio, lasceranno le nostre Università, o, quel che è anche peggio, continueranno ad appartenervi di nome salvo a trascurarle di fatto, ma nel senso che, inquadrati nei ranghi di organizzazioni che devono rispondere a fini e ad esigenze pratiche ben determinate, essi perderanno ben presto quello spirito della ricerca disinteressata che è tra le nostre tradizioni più care e a cui si debbono le vere, le grandi conquiste del pensiero.

L'intervento americano potrebbe così determinare, insieme con un insperato e salutare sviluppo dell'istruzione tecnica e professionale, una irreparabile decadenza dell'alta cultura.

A meno che... noi si sappia correre tempestivamente ai ripari!

La cosa, a mio avviso, non è impossibile; perché non si tratta già di opporsi al processo storico che sta ineluttabilmente trasformando il mondo, e tanto meno di impedire che i più si adeguino a questo processo; si tratta soltanto di salvare un'élite, mettendo un piccolo numero di studiosi, giudiziosamente scelti, al riparo dalle tentazioni.

Mentre la maggior parte delle nostre Università subirà consenziente la fatale influenza della civiltà nuova, e si plasmerà sull'esempio, del resto tutt'altro che disprezzabile, delle consorelle d'oltre Atlantico, si tratta di far sì che qualche Istituto sia messo in grado di mantenersi fedele alla tradizione e continui serenamente ad accogliere nel suo seno ed a riscaldare alla sua fiamma quelli che, malgrado tutto, continueranno ad avere una mente assetata di verità ed un cuore libero da cupidigie.

Chissà se ciò non basterebbe ad evitare che l'Europa faccia di fronte all'America la stessa fine ingloriosa che, or son ben due millenni, fece Grecia antica di fronte alla esuberante e dominatrice potenza di Roma?

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Giovanni Giorgi

Letta (*) dal Socio ANTONIO SIGNORINI

Accingendomi a parlare di GIOVANNI GIORGI non so non ripensare a quando, ventidue anni fa, mi capitò di dovere redigere la relazione per la Sua promozione a ordinario nell'Università di Cagliari.

Formulare un qualunque giudizio riguardo a un Uomo che tanto sentivo superiore a me, mi sembrava atto di vera presunzione: né ora i miei sentimenti sono molto diversi.

A quell'epoca Giorgi già aveva al Suo attivo trentacinque anni di multiforme produzione scientifica e innovatrice attività tecnica, a quell'epoca già aveva fama indiscussa di pensatore acuto, profondo, geniale, dotato di tale cultura da potere rivolgere le Sue indagini ai più svariati campi delle discipline fisico-matematiche, a sottili questioni critiche come a fattive applicazioni industriali.

Era nato a Lucca il 27 novembre 1871, da famiglia in cui era tradizionale il dedicarsi e l'eccellere in professioni legali e amministrative. Suo padre, Giorgio, fu Presidente del Consiglio di Stato e lasciò pregevoli opere di materie giuridiche.

Nonostante una tale tradizione familiare, Giorgi volle divenire ingegnere, anzi, come amava raccontare, estremamente precoce fu la Sua ferma risoluzione di divenire ingegnere, e la famiglia non poté molto insistere nel cercare di dissuaderlo. Già durante i tre anni di liceo, fatti qui a Roma all'«Umberto I», validamente si era affermata la Sua tendenza a riflettere per conto proprio, accanto a una vera passione per le scienze fisiche, comprese quelle che, come l'ottica fotografica e l'elettrotecnica, si trovavano ancora ai primordi, e accanto a una pari passione per le scienze matematiche. In certe Sue «Confidenze» pubblicate dalla Rivista «Scienza e Tecnica» nel 1943, Egli dice «Molto mi impressionò» (durante il liceo) «l'apprendere che dai matematici era stata dimostrata l'impossibilità di risolvere in qualsiasi avvenire il problema della quadratura del cerchio con mezzi elementari. Una scienza che a questa guisa riesce a prevedere il proprio avvenire deve essere ben superiore alle altre discipline umane... Aggiungo» (Egli continua) «che la cultura classica, latina e soprattutto greca, mi fu proficua per la formazione mentale, per spingermi a cercare nelle scienze positive l'ideale alto del ragionamento e della bellezza». E in realtà questo Egli fece per tutta la vita.

Decisamente formativi furono per Lui gli anni che trascorse all'Università e alla Scuola d'Ingegneria di Roma, sia per il diretto contatto con Maestri d'eccezione, quali il Beltrami e il Cremona, sia per la lettura e meditazione del trattato di Eletticità di Maxwell e della *Filosofia naturale* di Thomson e Tait.

(*) Nella seduta dell'8 dicembre 1951.

Come ci disse nel comunicarne la morte all'Accademia, il nostro Presidente già in quell'epoca ebbe occasione di apprezzare in ripetute conversazioni le acute riflessioni del Giorgi, ancora studente, sui principî della Geometria e i fondamenti della Dinamica.

In quella stessa seduta Pierantoni ricordò a nome della Sezione di Zoologia che il Giorgi era anche un valoroso studioso di tale scienza e un appassionato collezionista di conchiglie, delle quali ormai possedeva una raccolta veramente preziosa.

Vien fatto di pensare ad Ampère, che lasciò scritti di Zoologia nelle *Annales de Sciences naturelles* e compì la Sua più grande prova nella Fisica mentre era professore alla Facoltà di Lettere dell'Università di Parigi; anche per Giorgi, volendo almeno dare un cenno dell'eccezionale vastità della Sua cultura, non possono passarsi sotto silenzio le approfondite conoscenze linguistiche, letterarie, artistiche. Ad esempio nell'*Enciclopedia italiana*, insieme a tanti altri preziosi contributi, sono di Giorgi le pagine che riguardano l'uso dei colori nell'arte medievale e moderna.

Conseguì il diploma di ingegnere nel 1893, con una tesi sulla elettrificazione di una ferrovia. Gli erano stati di guida, fra gli altri, scritti di autori americani nel campo della trazione elettrica, ramo d'ingegneria allora nascente, e il trattato sul macchinario elettrico di Silvanus Thompson.

Con la laurea s'iniziano l'attività tecnica e la produzione scientifica. Ben a ragione Egli solea dire « Ho sempre sentito e inteso scienza pura e ingegneria come unite insieme ». Comincerò col parlare dell'attività tecnica.

Naturalmente a questo riguardo non saprò che riassumere quanto disse un eminente elettrotecnico, il prof. Focaccia, nella commemorazione da lui tenuta il 26 aprile, il giorno delle onoranze a Giorgi in Campidoglio promosse dalla Associazione Elettrotecnica Italiana, insieme al Comune di Roma e al Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Giorgi svolse a Roma la maggiore Sua attività tecnica, come Direttore dell'Ufficio tecnologico del Municipio, dal 1906 al 1923. In questi diciassette anni apportò innovazioni e miglioramenti nei servizi tranviari, progettò e organizzò l'Azienda elettrica, impiantò il laboratorio tecnologico di misure, controlli e ricerche chimiche, impiantò e costruì i frigoriferi comunali, organizzò la sezione per gli impianti idrici ed effettuò i progetti per l'Aniene e il bacino del Velino.

Segno immediatamente tangibile di vera efficacia della Sua direzione fu che l'insieme dei numerosi servizi da Lui dipendenti nel suo bilancio complessivo passò, per allora, dal passivo a un notevole attivo.

Nella rete tranviaria di Roma e prima ancora nella costruzione della ferrovia elettrica Castelraimondo-Camerino, concretò pratiche innovazioni riguardo al profilo delle rotaie, al disegno e costruzione delle motrici, all'impiego dei freni, all'organizzazione generale dei servizi: tanto che anche in America, a Detroit, vollero avvalersi di questi perfezionamenti, consultandolo ripetutamente in proposito.

Nel sistema di trazione a elettrovapore Giorgi-Gollo-Ferrero venne risolto il problema di usare i generatori elettrici a bordo dei treni, impiegare speciali condensatori, ridurre fortemente il consumo di combustibile.

Tale sistema di trazione, coperto da brevetto, avrebbe dovuto essere gradualmente applicato in Russia, sui grandi tronchi Pietroburgo-Mosca-Odessa, ma i lavori, iniziati con l'intervento di Giorgi, furono poi interrotti a causa della prima guerra mondiale.

Di Giorgi è pure il brevetto di un apparato atto a limitare automaticamente la corrente in un circuito senza doverla interrompere: l'automatico di precisione Sigma.

Per la distribuzione dell'energia elettrica Giorgi ideò il sistema a rete di maglie chiuse, con conduttori di sezione uniforme, alimentati da centri opportunamente ubicati in dipendenza del consumo, e fu il primo ad adottare, nell'impianto comunale di Roma, la rete secondaria trifase con neutro, innovazione che subito dopo fu imitata a New York.

Per quanto riguarda la produzione idroelettrica il sistema dei tracciati in tunnel, l'utilizzazione integrale dei fiumi, l'opportuno coordinamento dei vari tipi d'impianti sono tutti concetti applicati da Giorgi, fin dal 1918, in progetti per lo sfruttamento delle forze idriche dell'Isonzo superiore, progetti eseguiti con la collaborazione dell'ing. Brigiuti.

Collaborò anche a perizie per la validità dei brevetti sulle lampadine a filamento metallico, a diversi arbitrati, a inchieste sull'azienda Gas di Palermo, sui telefoni dello Stato, su altre aziende pubbliche.

Ma un'attività pratica tanto varia ed efficace non riuscì a distrarlo dalla ricerca scientifica e neppure impedì che si affermasse in Lui un acuto spirito critico.

Le pubblicazioni di Giorgi sono numerosissime, più di trecentocinquanta, anche perchè era Sua caratteristica il continuo approfondire molti ordini di idee sempre insieme presenti al Suo spirito.

Si iniziarono, le Sue pubblicazioni, con una serie di articoli nel periodo *L'Elettricista* di Roma. Una lettera del 1895 all'Editore dell'omonimo periodico di Londra mostra che fin da allora Egli pensava a decise innovazioni nella sistemazione della scienza elettrica.

Però definì la proposta di una metrologia a quattro unità fondamentali solo nel 1901, in una comunicazione al Congresso dell'Associazione Elettrotecnica a Roma, comunicazione che, sempre col titolo « Unità razionali di elettromagnetismo », fu ripetuta l'anno successivo al Congresso della Società di Fisica a Brescia.

Si trattava, con parole dello stesso Giorgi, di un problema triplice:

1° « razionalizzare » le unità elettriche nel senso di Heaviside, cioè adattarle in modo che venissero liberate dal 4π fuori di luogo;

2° sostituire un sistema di misura unico, adatto tanto per gli scopi scientifici, quanto per quelli pratici, ai molteplici sistemi fino allora in uso, compresi i due sistemi C. G. S.;

3° mettere in evidenza che le due costanti, elettrica e magnetica, dello spazio vuoto, sono entrambe costanti fisiche, a cui deve attribuirsi un valore molto inferiore all'unità, per tener conto che lo spazio libero da materia ponderabile ha una recettività estremamente piccola, tanto per le azioni elettriche, quanto per le azioni magnetiche.

Già Maxwell aveva osservato che non era possibile ottenere una teoria corretta dell'elettricità senza portare a quattro le unità fondamentali, ma Giorgi ebbe la ventura di riconoscere che si poteva costituire un sistema di misura irreprensibile sotto ogni punto di vista semplicemente aggiungendo al metro, al kg-massa e al secondo una qualunque delle unità elettrotecniche già in uso pratico:

ad esempio il coulomb, definibile per via elettrolitica, o l'ohm, definito per mezzo di un campione metallico da conservarsi negli archivi.

Queste proposte, specie all'estero, molto lentamente guadagnarono favore, benché anche prima del 1904, cioè anche prima del Congresso internazionale di Elettricità a St. Louis, avessero tutto l'appoggio di Silvanus Thompson, ormai decano degli elettrotecnici inglesi, e di Fritz Emde in Germania.

La denominazione di « sistema definitivo » fu usata la prima volta da C. A. Campbell, nel Congresso internazionale di Matematica a Toronto del 1924. Il « sistema Giorgi » fu adottato dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale solo nel 1935, ma con l'unanimità dei voti dei delegati delle singole nazioni.

Una serena esposizione delle vicende che precedettero e hanno fatto seguito a tale riconoscimento ufficiale, è contenuta, insieme a una completa bibliografia, nel libro pubblicato meno di tre anni fa dal Giorgi col titolo « *Verso l'Elettrotecnica moderna* ».

In questo libro pure altre Sue ricerche sono coordinate a un insieme di monografie di « messa a punto » su capitoli fondamentali dell'Elettrotecnica e della scienza dei fenomeni elettrici, con l'aggiunta di molte notizie e precisazioni sull'invenzione del telefono, sulle origini delle macchine dinamo elettriche, della tecnica delle correnti trifasi e della radiotecnica.

E qui è il caso di ricordare che il volume dedicato a Marconi dall'Accademia d'Italia contiene ben cinquanta pagine di Giorgi sulla vita e le opere del Grande inventore, nonchè di far presente la commemorazione di O. M. Corbino nelle celebrazioni siciliane del settembre 1939.

Giorgi aveva vera passione per la Storia delle scienze, anzi è molto da rimpiangere che dei Suoi scritti di Storia delle matematiche non sia arrivato a pubblicare altro che un compendio, nel 1948.

Giorgi aveva anche l'arte di volgarizzare senza abbassare, l'arte di non far pesare il rigore scientifico, di arrivare a conciliarlo con la semplicità e vivezza dell'esposizione.

« Che cosa è l'elettricità », « L'etere e la luce », « I colori e la cromatica moderna », « La frantumazione dell'atomo » sono monografie di divulgazione che può leggere con profitto ogni persona colta. Gli stessi pregi ebbe il discorso « Verso le grandi conquiste della fisica teorica », tenuto a Cagliari come inizio dell'anno accademico 1926-27.

Giorgi era conferenziere veramente desiderato, qualunque fosse l'argomento che voleva trattare. Io non assistetti alle Sue conferenze sui fondamenti della Geometria, qui a Roma nel 1914, ma ritengo che ebbero lo stesso successo della conferenza sulle teorie di Relatività al Congresso Internazionale di Filosofia del 1924 a Napoli, e di tante altre sui più svariati argomenti, quali « La trazione elettrica », « La visione dei colori e la teoria matematica della pittura », « Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale ».

Giorgi iniziò fin dai primi del secolo la revisione e sistemazione dei metodi operazionali ideati da Heaviside per ridurre l'integrazione di talune equazioni

differenziali a questioni di natura algebrica, in rapporto allo studio della propagazione telegrafica lungo le linee e i cavi.

Nel fatto si trattava di regole empiriche fissate con mirabile intuito e a chi obiettava che esse avessero a condurre anche a conclusioni erronee, come infatti avvenne, solo Heaviside poteva rispondere « quando le applico io, no ».

Il primo a istituirne una teoria fu Giorgi, che anzi volle prendere di mira ogni tipo di fenomeni transitori, cioè, tanto i fenomeni che si hanno all'avviamento e alla cessazione delle correnti elettriche, come quelli che in Meccanica corrispondono a una qualunque azione impulsiva e gli analoghi nelle altre parti della Fisica.

Nella trattazione di Giorgi è essenziale la condizione di « linearità » per la dipendenza dell'effetto dalla causa, nonché la condizione che Egli chiama di « normalità »: spostando una causa perturbatrice nel tempo l'effetto semplicemente sottostia a uguale ritardo o anticipazione, senza altre modifiche.

La condizione di normalità è quella che spiega le strette relazioni dei risultati di Giorgi con quanto poi è stato ottenuto dal metodo delle trasformate di Laplace.

Normalità e linearità dal lato applicativo sono ben piccole restrizioni, eppure esse bastano per arrivare alla « formula teorica di Giorgi », che sistematicamente permette di valutare l'effetto di un operatore come se dentro di esso il segno di derivata rispetto al tempo fosse un simbolo numerico soddisfacente alle leggi dell'algebra ordinaria: e questo per ogni operando che sia funzione fisica del tempo, funzione « fisica » nel senso precisato da Giorgi stesso.

Un simbolo operatorio può essere a risultato univoco o multivoco. Di qui pericolose incertezze che Giorgi riuscì a eliminare mediante altre due condizioni di carattere squisitamente fisico: l'effetto non può mai precedere la causa (condizione di « successione »); le conseguenze di un qualsiasi « stato iniziale » si estinguono asintoticamente col tempo (condizione di « estinzione »).

Con l'intervento di queste due condizioni combinate, l'effetto di una causa fisica è univocamente determinato quando i valori di essa causa sono conosciuti per tutti gli istanti anteriori all'epoca attuale, donde la cosiddetta « valutazione fondamentale di Giorgi », poi denotata come « retrospettiva » dal Wiener.

Tutti i risultati che ora ho accennato già figurano in una Memoria di Giorgi del 1905, ma in quegli anni l'iniziale attenzione verso i metodi di Heaviside pareva ormai quasi sopita; ed è da pensare che neppure allora la produzione scientifica italiana fosse molto seguita all'estero.

Così accadde che i fondamenti teorici del calcolo operatorio funzionale furono investigati ex-novo dal Carson nel 1922 e poi dal Wiener nel 1926, non più al seguito di quesiti elettrotecnici, bensì per collaborare col Born allo sviluppo della Meccanica quantistica.

Così accadde che il nome di Giorgi non figura nemmeno nell'edizione italiana, comparsa in questi giorni, del trattato di von Kármán e Biot sui metodi matematici nell'ingegneria, benchè un intero capitolo di sessanta pagine sia dedicato ai fenomeni transitori e al calcolo operativo.

A Giorgi sono pure dovute ricerche sulle equazioni integrali e in altri campi della matematica pura: tutte le volte che Egli voleva, appariva chiara la Sua completa padronanza dei metodi matematici.

In certi appunti da Lui trasmessimi nel 1946, circa i Suoi contributi alle scienze fisico-matematiche negli anni dell'ultima guerra mondiale, alquanto si sofferma sul Suo metodo sintetico per lo studio delle funzioni di variabile complessa e sulla Sua analisi dei fondamenti della teoria degli insiemi.

Conseguì la libera docenza nel 1903, in Elettrotecnica, e subito dopo svolse corsi di costruzioni elettromeccaniche a Roma e di tecnologie a Fermo. Invece dal 1910 al 1913 tenne corsi di Analisi superiore e di perfezionamento alla Facoltà di Scienze di Roma.

Volendo almeno enumerare gli svariati insegnamenti da Lui poi impartiti, comincio col ricordare che, ancora a Roma, dal 1912 al 1914 fu ordinario di Meccanica superiore in una scuola di costruzioni aeronautiche dipendente dal Ministero della Guerra e dal 1924 al 1927 incaricato di Economia e Organizzazione industriale alla Scuola d'Ingegneria.

Fu professore all'Università di Cagliari dal 1926 al 1929, come titolare di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale.

Alla fine del 1929 passò all'Università di Palermo, con gli stessi insegnamenti.

Dal novembre 1934 tornò a Roma, chiamato alla cattedra di Trasmissioni e misure telegrafiche e telefoniche della Scuola d'Ingegneria, cattedra il cui titolo fu poco dopo convertito in quello di Comunicazioni elettriche.

Continuò a insegnare anche dopo avere raggiunto i limiti di età come professore universitario, sia nei corsi di perfezionamento per ingegneri specializzati in telecomunicazioni, sia con cicli di conferenze all'Istituto di Alta matematica e forse ancora più in conversazioni private con tanti Suoi fedeli e affezionati allievi.

Quasi tutti i Suoi corsi dettero luogo a pregevoli volumi di litografie e quelli di Meccanica anche al trattato che fu finito di stampare nel 1946.

In questi giorni è comparsa una Sua *Elettrotecnica generale per gli Istituti industriali*, in collaborazione con la dott.ssa Madia, Sua diletta parente.

Altre opere Egli ha lasciato incomplete. La più avanzata è un trattato di Fisica matematica, propriamente di Elettromagnetismo, ma già a buon punto erano un testo universitario di Elettrotecnica generale, un volume di complementi al trattato di Meccanica, un trattato di Relatività e alcuni studi sui fondamenti della Geometria.

Nel trattato di Meccanica evidentemente Egli ha cercato, anche attraverso a una ricca bibliografia, di prospettare i diversi punti di vista e i diversi metodi di esposizione della scienza meccanica, pur mettendo nella dovuta luce le Sue indagini sui postulati della Statica e sulle leggi fondamentali della Dinamica.

In questi giorni ho molto ripensato alla Memoria del 1912 sul problema del moto assoluto, anche per le amichevoli discussioni tante volte avute in proposito con Giorgi.

Nell'esposizione della Meccanica razionale la questione del sistema Alfa, cioè la questione della necessità o meno di un riferimento privilegiato, indifferentemente si pone a chi, come Giorgi, voglia dare assoluta precedenza alla Statica in confronto alla

Dinamica e a chi voglia invece assumere come schema fondamentale di ogni singolo corpo naturale uno schema microscopico, costituito da un numero immenso di punti materiali liberi in moto incessante; schema dove la forza deve essere definita alla maniera di Kirchhoff e Mach, indipendentemente da un irraggiungibile stato di quiete.

Ponendosi dal primo punto di vista la questione del sistema Alfa è risolta dalla Memoria di Giorgi, ma si deve pure presumere che qualche cosa di analogo possa farsi anche quando si voglia partire da uno schema microscopico.

Quali sono le modalità da seguire in tale ulteriore sistemazione delle leggi fondamentali della Dinamica? Questa è la domanda che io ponevo a Giorgi.

Ebbene, io non mi ero ancora accorto di tutta la portata di un'osservazione di carattere puramente cinematico che, senza troppo parere, fa una parte essenziale nella Memoria di Giorgi. Si tratta in sostanza dell'osservazione seguente: se a un certo istante due punti si trovano ad avere una stessa posizione e una stessa velocità rispetto a un *dato* riferimento, la simultanea differenza geometrica delle loro accelerazioni ha un significato intrinseco, voglio dire, ha il medesimo valore riguardo a *ogni* riferimento; anzi la direzione e il verso di tale differenza geometrica neppure dipendono dalla scelta della scala dei tempi.

Servendosi di questa acuta osservazione di Giorgi e della definizione di tempo assoluto data da Enriques si può giungere a eliminare ogni riferimento privilegiato anche da un'esposizione della Meccanica che prenda le mosse da uno schema microscopico: se ho visto giusto, avrò prossimamente l'onore di presentare all'Accademia una Nota su tale argomento.

Giorgi aveva una indiscussa autorità fra i cultori delle teorie relativistiche. Pure questo era un ordine d'idee sempre presente al Suo spirito e continuamente da Lui approfondito in conferenze e ricerche singole.

Era entrato in corrispondenza con Einstein fin dall'epoca delle prime pubblicazioni sulla Relatività ristretta. Assurse alla previsione di un incurvamento dei raggi luminosi nei campi gravitazionali fin dal 1912, cioè prima di Einstein o almeno prima che Einstein nulla avesse ancora comunicato in proposito.

È quanto Giorgi dichiara a p. 95 de *L'etere e la luce* e conferma a p. 59 de *La frantumazione dell'atomo*, dove ha lasciato scritto: « Non fu precisamente Einstein a fare un'asserzione su questo argomento; ma bensì lo scrivente G. Giorgi in una lettera scritta nel 1912 ad Einstein e comunicata a Levi-Civita e ad altri scienziati, segnalò che per ragioni di coerenza di tutta la teoria, si era condotti ad ammettere che i raggi luminosi, e quindi in generale le emissioni energetiche, subissero l'influenza dei campi gravitazionali al pari della materia ordinaria. Di qui seguiva che l'energia deve possedere un coefficiente d'inerzia; in altre parole una massa meccanica, come quella della materia. Questo concetto fu ripreso, precisato e sviluppato da Einstein nella sua teoria di relatività seconda forma del 1914 ».

Tali sono le precise parole con cui Giorgi rivendica la Sua priorità in una delle concezioni più belle della Fisica moderna.

Conseguì nel 1934 uno dei due premi Rignano nel concorso internazionale per uno studio sulla evoluzione della nozione di tempo. Aveva avuto nel 1903 il Premio dell'Associazione Elettrotecnica italiana e nel 1904 il premio Kramer dell'Istituto Lombardo, che poi Gli fu di nuovo conferito nel 1937.

Nel 1935 ebbe il Premio della Fondazione politecnica italiana e nello stesso anno la Medaglia Jona per l'Elettrotecnica. Apparteneva a questa Accademia dal 1927 e all'Accademia Pontificia dal 1936. Era stato Accademico d'Italia e Socio ordinario dell'Accademia dei Nuovi Lincei.

Naturalmente era pure membro di Accademie e istituzioni scientifiche straniere: più di mezzo secolo di mirabile attività scientifica e tecnica, nonchè la Sua fattiva partecipazione a molti congressi internazionali, lo avevano reso noto in tutto il mondo scientifico.

Morì a Castiglioncello, presso Livorno, il 19 agosto dell'anno scorso, quando ancora sembrava che gli anni non riuscissero a intaccare l'eccezionale Sua fibra di scienziato e ricercatore. Qualche ora prima della morte nessuno avrebbe potuto immaginare che l'Italia stesse per subire una tale perdita.

I molti mesi trascorsi da allora non hanno affievolito il ricordo del Maestro, del Collega, dell'amico. Grande è pure oggi la mia commozione, profonda la tristezza per una separazione tanto impreveduta; ma altrettanto profonda è la convinzione che il tempo non riuscirà facilmente a far cadere nell'oblio il nome e le opere di GIOVANNI GIORGI.

PUBBLICAZIONI DI GIOVANNI GIORGI

Per le pubblicazioni anteriori al 1949, ved. l'elenco, redatto da Giorgi stesso, a pp. 343-55 del volume *Verso l'Elettrotecnica moderna* [Libreria Editrice Politecnica, Milano, 1949].

Tale elenco va completato col seguente, gentilmente trasmessomi dalla dott.ssa G. Madia:

358. - *A proposito delle controversie recenti sulla Relatività einsteiniana*. «Scientia», maggio-giugno 1949, pp. 77-81.
359. - *Metrologia e sistemi di unità*. «Archimede», 1949, n. 2, pp. 53-59.
360. - *Sull'insegnamento delle lingue*. «Rassegna dell'Istruzione media», marzo 1949, pp. 1-4.
361. - *L'energia elettrica nelle ferrovie metropolitane*. «L'Energia Elettrica», 1949, pp. 257-60.
362. - *Uno sguardo d'insieme alla situazione dell'energia elettrica in Italia*. «Rivista Idea», giugno 1949, pp. 35.
363. - *Sorgenti di energia nella materia*. «Ricerca Scientifica», 1949, pp. 957-60.
364. - *I fondamenti dell'elettrotecnica generale secondo l'indirizzo intermedio*. «L'Energia Elettrica», 1949, pp. 730-33.
365. - *Motoriale dei sistemi*. «La Ricerca», n. 1, marzo 1950, pp. 1-3.
366. - *Un enunciato generale sulla Dinamica dei sistemi*. «Rend. Lincei», 1° sem., 1950, pp. 175-78.
367. - *Insegnamento della fisica: le difficoltà per le definizioni del campo magnetico*. «Ricerca Scientifica», 1950, pp. 925-26.
368. - *Elettrotecnica generale per gli Istituti industriali* (in collaborazione con G. Madia). Vol. di XIV + 396 pp., Società editrice internazionale, Torino, dicembre 1951.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Armellini, nell'assumere la presidenza, comunica che il Presidente Castelnuovo è in questi giorni indisposto e, rendendosi interprete degli unanimi sentimenti dei Colleghi, formula il fervido voto augurale che egli possa presto riprendere la sua consueta attività.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Signorini che pronuncia l'orazione commemorativa del compianto Collega Giovanni Giorgi, esaltando la grande figura di uomo e di scienziato dell'insigne studioso scomparso.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e si associa di cuore al tributo d'omaggio che oggi l'Accademia rende alla memoria di Giovanni Giorgi al quale egli stesso fu legato da vincoli di profonda amicizia fin da quando Egli ricopriva la carica di Direttore dell'Ufficio Tecnologico del Comune di Roma e ricorda di avere ammirato in Lui, oltre alla grande bontà d'animo, la vastissima cultura e la vivida intelligenza, unite ad un potere intuitivo veramente mirabile.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è uscito il fascicolo dei « Rendiconti » n. 5 (novembre 1951).

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato inviato all'Accademia dal dott. Antonio M. Stella, unitamente ad una lettera in data 21 novembre con la quale il predetto dottore ha richiesto l'apertura del plico per la seduta della Classe del mese di dicembre. Dopo aver constatato l'integrità dei sigilli, si procede a detta apertura e si prende atto che il plico di cui trattasi contiene un opuscolo di 9 pagine a ciclostile dal titolo: « Trattamento medico complementare della chirurgia e fisioterapia del cancro » e un fascicolo di 4 pagine dattiloscritte relativo a copia della corrispondenza inviata dall'autore e ricevuta dallo stesso da parte di medici italiani e stranieri in merito al suo lavoro etiopatogenetico e clinico terapeutico sul cancro.

Il Presidente propone di nominare una Commissione per l'esame del contenuto del detto plico e la Classe delibera che a far parte di detta Commissione siano chiamati i Soci De Blasi, Rondoni e Vernoni.

Il Socio Signorini riferisce sul plico suggellato del sig. Tupone, aperto, su richiesta dell'autore, nella seduta della Classe del 12 maggio 1951 e contenente due fogli dattiloscritti, concernenti l'indicazione di due meccanismi relativi a « moto traslatorio con forze centrifughe composte e creazione di energia ».

La relazione del prof. Signorini conclude che il citato scritto dal signor Tupone è perfettamente conforme a scritti precedenti da lui inviati all'Accademia, sempre relativi alla creazione di energia dal nulla e che pertanto l'Accademia può rispondere all'interessato, attenendosi al giudizio già dato, in merito ai lavori del Tupone, dalla Commissione per il Premio Nazionale Generale della Classe di Scienze Fisiche del 1951, al quale il Tupone stesso ha a suo tempo concorso.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Abetti offre in omaggio e presenta il suo volumetto dal titolo: « Keplero » nel quale sono illustrati la vita del grande scienziato, i suoi contatti con il mondo scientifico del tempo, i suoi lavori e l'eminente posto che egli occupa nella storia dell'astronomia.

Il Socio Segre offre in omaggio ed illustra brevemente il primo volume di un suo trattato, intitolato « Forme differenziali e loro integrali », il quale contiene le lezioni ch'egli è venuto svolgendo presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica a partire dall'anno accademico 1950-1951. Il volume rielabora in modo unitario il calcolo di Grassmann ed il calcolo differenziale esterno, la teoria delle equazioni pffiane e quella degli invarianti integrali, la geometria dello spazio di n variabili complesse, assieme a teoremi integrali ed estensioni alle algebre ipercomplesse, la teoria dei funzionali isogeni e dei funzionali coniugati. In esso trovansi contributi nuovi ed applicazioni molteplici di analisi, di geometria e di fisica matematica. Il volume comprende anche ampie notizie storiche e bibliografiche, mostranti, fra l'altro, come alcuni risultati usualmente attribuiti ad autori posteriori risalgano sostanzialmente al Volterra. Esso si limita a studiare i problemi entro regioni opportunamente ristrette, lasciando le questioni in grande ad un volume successivo.

Il Socio Perucca, riferendosi alla presentazione avvenuta da parte del Segretario accademico, nella seduta del 10 novembre corrente anno, del primo dei cinque volumi dell'opera da lui diretta dal titolo: « Dizionario d'Ingegneria », offerto in omaggio all'Accademia, desidera ricordare che detto lavoro, pure essendo stato preceduto dal « Dizionario tecnico industriale », in due volumi, diretto da G. Albenga e dallo stesso prof. Perucca e apparso nel 1936-37, costituisce un'opera completamente nuova rispetto alla precedente.

Dopo aver messo in evidenza il carattere della nuova pubblicazione e i fini che la stessa si propone, il Socio Perucca rinnova un vivo ringraziamento a tutti i collaboratori e alla Casa Editrice U.T.E.T. e si augura che il « Dizionario », che ritiene l'unico del genere in Italia e all'estero, sia accolto con soddisfazione dal pubblico.

Il Socio Bianchi offre in omaggio e presenta il volume XVI delle « Memorie dell'Istituto Geologico della Università di Padova », pubblicato dal

Collega G. B. Dal Piaz, mettendo in evidenza che il volume stesso è dedicato al Socio Giorgio Dal Piaz, quale attestazione di gratitudine dell'Università di Padova e, in particolare, della Facoltà di Scienze, per le feconde iniziative e realizzazioni scientifiche da lui promosse e per la sua mirabile opera di Scienziato e di Maestro e insieme fervido auspicio per i nuovi sviluppi delle Scienze geologiche e petrografiche in Italia.

Il volume raccoglie quindici monografie che toccano i più vari argomenti delle Scienze geologiche e che sono opera di Colleghi e allievi, a Giorgio Dal Piaz particolarmente cari e vicini, alcuni dei quali sono Soci dell'Accademia. Vi è anche un lavoro postumo del prof. Bruno Castiglioni che nei giorni della liberazione (aprile 1945) offrì la sua vita per la salvezza della città di Pavia.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno offerto e presentato i sopra citati volumi.

L'Accademico Segretario presenta quindi le opere inviate in omaggio all'Accademia mettendo in particolare evidenza i due volumi della II edizione dell'opera « Principii di fisiologia umana » del Socio Margaria e del prof. De Caro, e il I e il IV volume dell'opera « La vita degli animali », diretta dai proff. A. Ghigi, F. Raffaele e P. Pasquini.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci De Blasi (anche a nome dei Colleghi Marotta e Chain), Cotronei, Segre, Cambi, Lombroso, U. Amaldi, Spadolini, Nobile, Krall, Beccari e Bonino.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SPADOLINI I. - Sulla validità della regola del *Tutto o Niente* nel cuore. Di una nuova concezione sulla natura della contrazione cardiaca in rapporto alla costituzione del miocardio.

BIOCCA E. - Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843). *Ancylostoma braziliense* (de Faria, 1910) e *Ancylostoma ceylanicum* (Loos, 1911) Nota I (pres. dal Socio D. DE BLASI).

BIOCCA E. - Ricerche sistematiche su alcune specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843), *Ancylostoma duodenale* (Dubini, 1843) e *Ancylostoma paraduodenale* (Biocca, 1951). Nota II (pres. dal Socio D. DE BLASI).

BOVET D., BOVET-NITTI F., CHAIN E. B. e BELOFF-CHAIN A. - Contributi allo studio farmacologico e biochimico del metabolismo intermedio. - Azione degli acidi grassi, degli alcool e degli aldeidi sull'intestino isolato ed esaurito di coniglio con particolare riguardo alla risposta acetilcolica. Nota II (pres. dal Socio E. B. CHAIN).

CALIGO D. - Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I (pres. dal Socio G. KRALL).

CALIGO D. — Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II (pres. dal Socio G. KRALL).

CHIORBOLI P. — Considerazioni critiche su talune caratteristiche degli spettri Raman di derivati carbonilici del furano, tiofene e pirrolo (pres. dal Socio G. B. BONINO).

GALLI M. — Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. Nota I (pres. dal Corrisp. L. TIERI).

CHIGI E. e MIRONE P. — Ricerche preliminari sullo spettro ultrarosso della marrubina e di alcuni prodotti da essa ottenibili (pres. dal Socio G. B. BONINO).

MANUNTA G. — Azione del benzoato di estradiolo sulla sopravvivenza dei ratti maschi tiroparatiroidectomizzati (pres. dal Socio G. LEVI).

MARRÈ E. e PROFUMO P. — Blocco di cianuro dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi dell'amido in stomi isolati (pres. dal Corrisp. E. REMOTTI).

MARRÈ E. e PROFUMO P. — Sensibilità alla luce dell'effetto stimolatore auxinico sulla sintesi d'amido in stomi isolati (pres. dal Corrisp. E. REMOTTI).

MAZZI V. — Nuove osservazioni intorno alle cellule basofile nell'ipofisi del Tritone cretato (pres. dal Socio N. BECCARI).

MONTINI T. e PONTREMOLI S. — Azione della bile sull'assorbimento di emulsioni di olio di cocco in ansa alla thiry vella di cane normale e spancato (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

PENSO G., CASTELNUOVO G., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELIA L., ZAMPIERI A. — Un nuovo *Mycobacterium* patogeno: *Mycobacterium minetti* n. sp. — Nota preliminare (pres. dal Socio D. MAROTTA).

PENSO G., ORTALI V., GAUDIANO A., PRINCIVALLE M., VELLA L. e ZAMPIERI A. — Il *Mycobacterium phlei* (Lehmann e Neumann 1899, pro parte). Nota preliminare (pres. dal Socio D. MAROTTA).

ROTH L. — Sulle V_3 algebriche generate da congruenze di curve (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

STEFANELLI A. e BAFFONI G. M. — Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei (Brachydanio rerio) (pres. dal Socio G. COTRONEI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 dicembre 1951

- ABETTI Giorgio. — *Keplero*. Brescia, «La Scuola», 1951. Pp. 177, in-16°, con tavv. (Scienziati e Tecnici).
- DE CARO L. — Vedi: MARGARIA Rodolfo e DE CARO L.
- GHIGI Alessandro, RAFFAELE Federico e PASQUINI Pasquale. — *La vita degli animali*. Voll. I e IV. Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1951. Voll. 2, in-8°, con figg. e tavv.
- MARGARIA Rodolfo e DE CARO L. — *Principi di fisiologia umana*. 2ª ed. Milano, F. Vallardi, 1950. Voll. 2, in-8°, con figg.
- MARGUGLIO Cristoforo. — *La spiegazione fisica dell'avanzamento del perielio di Mercurio e la derivazione della massa del pianeta*. Traduzione dell'originale scritto in lingua inglese eseguita dall'autore. Castelbuono (Palermo), Tip. «Le Madonie», 1951. Pp. 15, in-8°, con figg. e tavv.
- MARGUGLIO Cristoforo. — *La spiegazione fisica della curvatura di un raggio di luce nella vicinanza del Sole*. Traduzione dell'originale scritto in lingua inglese eseguita dall'autore. Castelbuono (Palermo), Tip. «Le Madonie», 1951. Pp. 23, in-8°, con figg. e tavv.
- PASQUINI Pasquale. — Vedi: GHIGI Alessandro, RAFFAELE Federico, PASQUINI Pasquale.
- RAFFAELE Federico. — Vedi: GHIGI Alessandro, RAFFAELE Federico e PASQUINI Pasquale.
- SEGRE Beniamino. — *Forme differenziali e loro integrali*. Vol. I: *Calcolo algebrico esterno e proprietà differenziali locali*. Roma, «Docet», 1951. Pp. 520. Dispense litografate.

D. DE BLASI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- AGENO M. e QUERZOLI R. — Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nelle soluzioni, 265.
- — Sulla fluorescenza destata da particelle α nelle soluzioni. Nota II, 348.
- AGOSTINELLI C. — Sulle funzioni epicicloidi e alcune nuove relazioni fra le funzioni di Bessel, 339.
- ALIBRANDI G. — Sul fattore nutritivo specifico per lo sviluppo sessuale del pollo, 116.
- Sull'azione epilettogena della tiamina, 219.
- Segnali condizionati sonori quali fattori scatenanti di crisi epilettiformi sperimentali, 279.
- Calcio ioni e disposizione verso l'epilessia riflessa, 383.
- ANNIS M., vedi ROSSI B.
- ARRIGO L. e MONTINI T. — Presenza e comportamento dei lipidi nel succo enterico, 297.
- — Fattori lipotropi ed assorbimento enterico di emulsioni oleose, 407.

B

- BACCHETTI T., vedi CANONICA L.
- BAJADA E. — Teorema d'unicità per una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy, 158.
- BARBUTI U. — Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive che non dipende dalla condizione di Lipschitz, 150.
- BERETTA E. e BIANCHI A. — Liberazione di elettroni secondari da parte di ioni poliatomici e fenomeni di invecchiamento nei contatori di G. e M. a spegnimento spontaneo, 352.

- BERNINI G., vedi CAPRARO V.
- BIANCHETTI G., vedi TRAVE R.
- BIANCHI A., vedi BERETTA E.
- BIOCCA E., vedi LE ROUX P. L.
- BIRINDELLI C. — Sul calcolo numerico degli integrali multipli, 40.
- BOAGA G. e TRIBALTO G. — Determinazione della densità media della Terra per mezzo di misure gravimetriche, 237.
- BONINO GIOV. B. e CHIORBOLI P. — Spettro Raman della 2-pirrolaldeide allo stato cristallino, 247.
- BORDI M. — Ricerche sul potere di penetrazione di un ceppo di «Trypanosoma brucei» attraverso le mucose del topino, 403.
- BRIDGE H., vedi ROSSI B.
- BUFFA P. — Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nella febbre, 122.

C

- CANONICA L. e BACCHETTI T. — Chetoni dai diazochetoni. — II. Sintesi α - ω -diacetilparaffine e di diacetilbenzoli, 275.
- CAPRARO V. e BERNINI G. — Sul meccanismo di azione della postipofisi nel passaggio di acqua attraverso la cute di Rana esculenta, 385.
- CEDRANGOLO F., QUAGLIARIELLO E., FIDANZA A., GIOIA A. e CRESTA M. — Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi, 292.
- CHAIN E. B., vedi STANLEY J. P.
- CHIORBOLI P. — Sullo spettro Raman dell' α -acetilfurano, 375.
- vedi BONINO GIOV. B.
- CINQUINI S. — Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione $\phi = f(x, y, z, q)$, 255.
- COLOMBO G. — Osservazioni sulle variazioni volumetriche nucleari nella mitosi e nella meiosi, 118.

COLONNA M. - Risonanza e impedimento sterico di risonanza nelle 2-arilchinoline e derivati, 268.

COLONNETTI G. - L'organizzazione della ricerca scientifica problema fondamentale di vita nazionale, 133.

— L'intervento U. S. A. e la sua possibile influenza su la scienza e la cultura italiana, 412.

CONTI R. - Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari, 164.

CRESTA M., vedi CEDRANGOLO F.

CROCCO G. A. - La barriera della temperatura nei missili geodetici. - II. Dinamica del missile a getto attivo, 3.

D

DAVIS C. F., KIP A. F. e MALVANO R. - Risonanza paramagnetica a bassissima temperatura nel cloruro idrato di praseodimio, 77.

DESTRO F., vedi LIVREA G.

E

ERDÉLYI A. - Nota ad un lavoro di L. Toscano, 44.

F

FERRO R., vedi IANDELLI A.

FERRONI E. e ROVAI G. - Sulla misura delle tensioni superficiali cinematiche, 202.

FICHERA G. - Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni, 34.

FIDANZA A., vedi CEDRANGOLO F.

G

GALGANO M. e LANZA B. - Contributi intorno all'azione della temperatura e dell'ormone follicolostimolante sulla stasi spermatogenetica in « Rana temporaria » L., 105.

GALLARATI D. - Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati, 344.

GIALANELLA L. - Sulla possibile natura e origine elettromagnetica delle pulsazioni osservate nel diametro del Sole, 60.

GIANNUZZI M. A. - Ricerca sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma, 193.

GIOIA A., vedi CEDRANGOLO F.
GIUFFRÈ L., vedi MALATESTA L.

H

HACK M. - Area ed intensità della perturbazione solare del maggio 1951, 63.

I

IANDELLI A. e FERRO R. - Le amalgame del lantanio, 85.

K

KIP A. F., vedi DAVIS C. F.

L

LANZA B., vedi GALGANO M.

LATTANZI F. - Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota II, 45.

— Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di una asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota III, 178.

LE ROUX P. L. e BIOCCA E. - Il « Bullinus contortus » ospite intermedio dello « Schistosoma bovis » in Sardegna, 400.

LIVREA G. - Contributo alla conoscenza della termoregolazione nel ratto. (Importanza dell'emissione di saliva e di urina nella termoregolazione del ratto sovrariscaldato), 285.

— e DESTRO F. - Gli effetti dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici sulla funzione spermiogenetica ed endocrina del testicolo del gallo, 392.

LODOVICO A. e MONTINI T. - Fattori lipotropi ed assorbimento enterico di emulsioni oleose, 407.

LOZANO CABO F. - Nota preliminare sull'identificazione di « Spicara smaris (L.) » e « Spicara alcedo (C. V.) », come sessi differenti di una medesima specie, con processo d'inversione sessuale, 127.

M

MAJORANA Q. - Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli, 10.

— Considerazioni conclusive sulla relatività speciale, 144.

- MAJORANA Q. — Sulla « Trasformazione di Einstein », detta di « Lorentz », 241.
- MALATESTA L. e GIUFFRÈ L. — Complessi dei metalli con le carbilammine. Nota II, 206.
- e SACCO A. — Composti Ni^0 -tetracarbilamminici da sali del nichel bivalente, 379.
- MALVANO R., vedi DAVIS C. F.
- MANGINI A. e PASSERINI R. — Ricerche sui composti solforati organici. Spettri u. v. e su alcune proprietà dei difenil-solfuri-solfossidi e -solfoni in acido solforico concentrato, 370.
- MANUNTA G. — Influenza dell'ormone paratiroideo sullo spessore del guscio dell'uovo di gallina, 220.
- MARCHIONNA E. — Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli, 170.
- MARRÉ E. e PROFUMO P. — Azione dell'eteroauxina sulla sintesi d'amido dal glucosio-1-fosfato in stomi isolati di Iris, 230.
- MARUSSI A. — Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss, 198.
- MATTIOLI E. — Le relazioni tra le funzioni di correlazione della velocità nella turbolenza omogenea e isotropica, 260.
- MAZZA L. — Su una apparecchiatura a funzionamento continuo ed automatico per la separazione e per la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare in miscela, mediante resine scambiatrici di ioni, 80.
- MAZZI V. — Valore sistematico di alcuni nuclei del talamo degli Attinotterigi, 302.
- MAZZOLENI F. — Le formule delle fasi di Hume-Rothery in leghe con più di due componenti, 357.
- MERLINO F. S. — Introduzione di nuovi vincoli dopo applicazione dei carichi esterni. Fenomeni viscosi, 58.
- MIRONE P. — Sullo spettro ultrarosso del pirolo tra 2,8 e 4μ . Sdoppiamento della banda ultrarossa riferita al gruppo NH, 365.
- MONTINI T., vedi ARRIGO L.
- vedi LODOVICO A.
- vedi PONTREMOLI S.
- MUGGIA A. — Sul calcolo dell'interferenza elica-ala, 53.
- N
- NOBILE V. — Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. — Rilievi e precisazioni. Nota III, 311.
- NORZI L. — Discussione intorno al principio variazionale per la instabilità elastica, 187.
- P
- PACELLA G. B. — Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes, 69.
- PASSERINI R., vedi MANGINI A.
- PERRI T. — Morfologia comparata e causale delle connessioni tra cinto pelvico e colonna vertebrale e tra cinto anteriore e sterno negli Anfibi, 223.
- PINI B. — Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico, 325.
- PIRT S. J. e CHAIN E. B. — Un micrometodo per la determinazione in serie degli alogeni nei composti organici, 20.
- PONTREMOLI S. e MONTINI T. — Azione della florizina sulla deidrogenasi degli acidi grassi superiori a livello della mucosa intestinale e della sierosa peritoneale, 112.
- PRODI G. — Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$. Nota II, 30.
- PROFUMO P., vedi MARRÉ E.
- PUCCI C. — Alcune limitazioni per gl'integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico, 334.
- Q
- QUAGLIARIELLO E., vedi CEDRANGOLO F.
- QUERZOLI R., vedi AGENO M.
- R
- ROSSI B., BRIDGE H. e ANNIS M. — Alcune osservazioni sulle nuove particelle instabili pesanti, 73.
- ROVAI G., vedi FERRONI E.
- ROVERETO G. — Sull'origine e i viaggi delle ofioliti alpine, 17.
- RUSSO A. — Allevamenti razziali di topi con cancro spontaneo e immuni secondo L. Strong. « Mutazioni somatiche » e potere germinale del soma, 253.
- S
- SACCO A. — Alofosfine per alchilazione degli alogenuri di fosforo, 101.

SACCO A., vedi MALATESTA L.

SIGNORINI A. - Commemorazione del Socio Giovanni Giorgi, 416.

SPADOLINI I. - Fenomeni elettrici di facilitazione nel tetano cardiaco (Considerazioni sul meccanismo delle reazioni graduate nel muscolo striato), 23.

T

TRAVE R. e BIANCHETTI G. - Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota I, 94.

— — Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota II, 211.

TRIBALTO G., vedi BOAGA G.

TRICOMI F. G. - Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile, 141.

U

URBANI E. - Studi comparativi sulla « massa di Giardina ». Sua presenza nella oogenesi di « Hygrobia tarda » Herbts. Nota II, 281.

V

VARDABASSO S. - Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna, 320.

INDICE PER MATERIE

A

Aerodinamica. — Le relazioni tra le funzioni di correlazione della velocità nella turbolenza omogenea e isotropica. MATTIOLI E., 260.

Analisi. — Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari. CONTI R., 164.

Analisi matematica. — Sulle funzioni epicicloidali e alcune nuove relazioni fra le funzioni di Bessel. AGOSTINELLI C., 339.

— Sul calcolo numerico degli integrali multipli. BIRINDELLI C., 40.

— Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione $\phi = f(x, y, z, q)$. CINQUINI S., 255.

— Nota ad un lavoro di L. Toscano. ERDÉLYI A., 44.

— Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni. FICHERA G., 34.

— Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico. PINI B., 325.

— Alcune limitazioni per gl'integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico. PUCCI C., 334.

— Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile. TRICOMI F. G., 141.

Astronomia. — Sulla possibile natura e origine elettromagnetica delle pulsazioni osservate nel diametro del Sole. GIALANELLA L., 60.

— Ricerca sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. GIANNUZZI M. A., 193.

— Area ed intensità della perturbazione solare del maggio 1951. HACK M., 63.

— Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo.

— Rilievi e precisazioni: Nota III. NOBILE V., 311.

B

Biochimica. — Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi. CEDRANGOLO F., QUAGLIARIELLO R., FIDANZA A., GIOIA A. e CRESTA M., 292.

Biologia. — Ricerche sul potere di penetrazione di un ceppo di « Trypanosoma brucei » attraverso le mucose del topino. BORDI M., 403.

— Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nella febbre. BUFFA P., 122.

— Morfologia comparata e causale delle connessioni tra cinto pelvico e colonna vertebrale e tra cinto anteriore e sterno negli Anfibi. PERRI T., 223.

— Allevamenti razziali di topi con cancro spontaneo e immuni secondo L. Strong. « Mutazioni somatiche » e potere germinale del soma. RUSSO A., 253.

— Studi comparativi sulla « massa di Giardina ». Sua presenza nella oogenesi di « Hygrobia tarda » Herbst. Nota II. URBANI E., 281.

C

Chimica. — Risonanza e impedimento sterico di risonanza nelle 2-arilchinoline e derivati. COLONNA M., 268.

— Ricerche sui composti solforati organici. Spettri u. v. e su alcune proprietà dei difenil-solfuri-solfossidi e-solfoni in acido solforico concentrato. MANGINI A. e PASSERINI R., 370.

— Su una apparecchiatura a funzionamento continuo ed automatico per la separazione e per la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare in miscela, mediante resine scambiatrici di ioni. MAZZA L., 80.

Chimica analitica. — Un micrometodo per la determinazione in serie degli alogeni nei composti organici. PIRT J. S. e CHAIN E. B., 20.

Chimica fisica. — Sulla misura delle tensioni superficiali cinematiche. FERRONI E. e ROVAI G., 202.

Chimica generale. — Sullo spettro Raman dell' α -acetilfurano. CHIORBOLI P., 375.

Chimica inorganica. — Le amalgame del lantanio. IANDELLI A. e FERRO R., 85.

— Complessi dei metalli con le carbilammine. Nota II. MALATESTA L. e GIUFFRÈ, L., 206.

— Composti Ni⁰-tetracarbilamminici da sali del nichel bivalente. MALATESTA L. e SACCO A., 379.

Chimica metallorganica. — Alofosfine per alchilazione degli alogenuri di fosforo. SACCO A., 101.

Chimica organica. — Spettro Raman della 2-pirrolaldeide allo stato cristallino. BONINO GIOV. B. e CHIORBOLI P., 247.

— Chetoni dai diazochetoni. — II. Sintesi α - ω -diacetilparaffine e di diacetilbenzoli. CANONICA L. e BACCHETTI T., 275.

— Sullo spettro ultrarosso del pirrolo tra 2,8 e 4 μ . Sdoppiamento della banda ultrarossa riferita al gruppo NH. MIRONE P., 365.

— Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota I. TRAVE R. e BIANCHETTI G., 94.

— Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota II. TRAVE R. e BIANCHETTI G., 211.

Citologia. — Osservazioni sulle variazioni volumetriche nucleari nella mitosi e nella meiosi. COLOMBO G., 118.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Giovanni Giorgi. SIGNORINI A., 416.

Comunicazioni varie, 305, 424.

Conferenze. — L'organizzazione della ricerca scientifica problema fondamentale di vita nazionale. COLONNETTI G., 183.

— L'intervento U. S. A. e la sua possibile influenza su la scienza e la cultura italiana. COLONNETTI G., 412.

D

Dinamica dei fluidi. — Sul calcolo dell'interferenza elica-ala. MUGGIA A., 53.

E

Endocrinologia. — Contributi intorno all'azione della temperatura e dell'ormone follicolostimolante sulla stasi spermatogenetica in «Rana temporaria». GALGANO M. e LANZA B., 105.

Equazioni alle derivate parziali. — Teorema d'unicità per una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy. BAJADA E., 158.

Equazioni differenziali. — Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive che non dipende dalla condizione di Lipschitz. BARBUTI U., 150.

— Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$. Nota II. PRODI G., 30.

F

Fisica. — Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nelle soluzioni. AGENO M. e QUERZOLI R., 265.

— Sulla fluorescenza destata da particelle α nelle soluzioni. Nota II. AGENO M. e QUERZOLI R., 348.

— Liberazione di elettroni secondari da parte di ioni poliatomici, e fenomeni di invecchiamento nei contatori di G. e M. a spegnimento spontaneo. BERETTA E. e BIANCHI A., 352.

— Risonanza paramagnetica a bassissima temperatura nel cloruro idrato di praseodimio. DAVIS C. F., KIP A. F. e MALVANO R., 77.

— Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli. MAJORANA Q., 10.

— Considerazioni conclusive sulla relatività speciale. MAJORANA Q., 144.

— Sulla «Trasformazione di Einstein», detta di «Lorentz». MAJORANA Q., 241.

— Alcune osservazioni sulle nuove particelle instabili pesanti. ROSSI B., BRIDGE H. e ANNIS M., 73.

Fisiologia. — Sul fattore nutritivo specifico per lo sviluppo sessuale del pollo. ALIBRANDI G., 116.

— Sull'azione epilettogena della tiamina. ALIBRANDI G., 219.

— Segnali condizionati sonori quali fattori scatenanti di crisi epilettiformi sperimentali. ALIBRANDI G., 279.

Fisiologia. — Calcio ioni e disposizione verso l'epilessia riflessa. ALIBRANDI G., 383.

— Sul meccanismo di azione della postifosi nel passaggio di acqua attraverso la cute di Rana esculenta. CAPRARO V. e BERNINI G., 385.

— Contributo alla conoscenza della termoregolazione nel ratto. (Importanza dell'emissione di saliva e di urina nella termoregolazione del ratto sovrariscaldato). LIVREA G., 285.

— Gli effetti dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici sulla funzione spermiogenetica ed endocrina del testicolo del gallo. LIVREA G. e DESTRO F., 392.

— Influenza dell'ormone paratiroideo sullo spessore del guscio dell'uovo di gallina. MANUNTA G., 220.

— Azione della florizina sulla deidrogenasi degli acidi grassi superiori a livello della mucosa intestinale e della sierosa peritoneale. PONTREMOLI S. e MONTINI T., 112.

— Fenomeni elettrici di facilitazione nel tetano cardiaco. (Considerazioni sul meccanismo delle reazioni graduate nel muscolo striato). SPADOLINI I., 23.

Fisiologia vegetale. — Azione dell'eteroauxina sulla sintesi d'amido dal glucosio-1-fosfato in stomi isolati di Iris. MARRÉ E. e PROFUMO P., 230.

G

Geodesia. — Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss. MARUSSI A., 198.

— Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes. PACELLA G. B., 69.

Geofisica. — Determinazione della densità media della Terra per mezzo di misure gravimetriche. BOAGA G. e TRIBALTO G., 237.

Geologia. — Sull'origine e i viaggi delle ofioliti alpine. ROVERETO G., 17.

— Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna. VARDABASSO S., 320.

Geometria. — Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di

punti singolari isolati. GALLARATI D., 344.

— Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli. MARCHIONNA E., 170.

M

Meccanica. — La barriera della temperatura nei missili geodetici. — II. Dinamica del missile a getto attivo. CROCCO G. A., 3.

— Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota II. LATTANZI F., 45.

— Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota III. LATTANZI F., 178.

— Introduzione di nuovi vincoli dopo applicazione dei carichi esterni. Fenomeni viscosi. MERLINO F. S., 58.

Metallurgia. — Le formule delle fasi di Hume-Rothery in leghe con più di due componenti. MAZZOLENI F., 357.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 308, 428.

P

Personale accademico, 305, 424.

Plichi suggellati, 306, 424.

Presentazione di libri, 306, 425.

Presentazione di Note e Memorie, 306, 426.

R

Relazioni di Commissioni, 307.

S

Scienza dell'alimentazione. — Presenza e comportamento dei lipidi nel succo enterico. ARRIGO L. e MONTINI T., 297.

— Fattori lipotropi ed assorbimento enterico di emulsioni oleose. LODOVICO A. e MONTINI T., 407.

Scienza delle costruzioni. — Discussione intorno al principio variazionale per la instabilità elastica. NORZI L., 187.

Z

Zoologia. — Il « *Bullinus contortus* » ospite intermedio dello « *Schistosoma bovis* » in

Sardegna. LE ROUX P. L. e BIOCCA E., 400.

— Nota preliminare sull'identificazione di « *Spicara smaris* (L.) » e « *Spicara alcedo* (C. V.) », come sessi differenti di una medesima specie, con processo d'inversione sessuale. LOZANO CABO F., 127.

— Valore sistematico di alcuni nuclei del talamo degli Attinotterigi. MAZZI V., 302.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1951.

NOTE DI SOCI

CROCCO G. A., La barriera della temperatura nei missili geodetici. - II. Dinamica del missile a getto attivo	Pag. 3
MAJORANA Q., Ricerche sulla velocità della luce riflessa dai metalli	10
ROVERETO G., Sull'origine e i viaggi delle ofioliti alpine	17
PIRT S. J. e CHAIN E. B., Un micrometodo per la determinazione in serie degli alogeni nei composti organici (pres. dal Socio <i>E. B. Chain</i>)	20
SPADOLINI L., Fenomeni elettrici di facilitazione nel tetano cardiaco (Considerazioni sul meccanismo delle reazioni graduate nel muscolo striato)	23

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PRODI G., Nuovi criteri di stabilità per l'equazione $y'' + A(x)y = 0$. Nota II (pres. dal Corrisp <i>G. Ascoli</i>)	Pag. 30
FICHERA G., Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	34
BIRINDELLI C., Sul calcolo numerico degli integrali multipli (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	40
ERDÉLYI A., Nota ad un lavoro di L. Toscano (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	44
LATTANZI F., Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	45
MUGGIA A., Sul calcolo dell'interferenza elica-ala (pres. dal Corrisp. <i>C. Ferrari</i>)	53
MERLINO F. S., Introduzione di nuovi vincoli dopo applicazione dei carichi esterni. Fenomeni viscosi (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i>)	58
GIALANELLA L., Sulla possibile natura e origine elettromagnetica delle pulsazioni osservate nel diametro del Sole (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	60
HACK M., Area ed intensità della perturbazione solare del maggio 1951 (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)	63
PACELLA G. B., Considerazioni sul contributo del Pizzetti e del Somigliana al problema di Stokes (pres. dal Socio <i>C. Somigliana</i>)	69
ROSSI B., BRIDGE H. e ANNIS M., Alcune osservazioni sulle nuove particelle instabili pesanti (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i>)	73
DAVIS C. F., KIP A. F. e MALVANO R., Risonanza paramagnetica a bassissima temperatura nel cloruro idrato di praseodimio (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i>)	77
MAZZA L., Su una apparecchiatura a funzionamento continuo ed automatico per la separazione e per la determinazione quantitativa degli elementi delle terre rare in miscela, mediante resine scambiatrici di ioni (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	80
IANDELLI A. e FERRÒ R., Le amalgame del lantanio (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	85

TRAVE R. e BIANCHETTI G., Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	Pag. 94
SACCO A., Alofosfine per alchilazione degli algenuri di fosforo (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	101
GALGANO M. e LANZA B., Contributi intorno all'azione della temperatura e dell'ormone follicolostimolante sulla stasi spermatogenetica in « <i>Rana temporaria</i> » L. (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i>)	105
PONTREMOLI S. e MONTINI T., Azione della florizina sulla deidrogenasi degli acidi grassi superiori a livello della mucosa intestinale e della sierosa peritoneale (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	112
ALIBRANDI G., Sul fattore nutritivo specifico per lo sviluppo sessuale del pollo (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	116
COLOMBO G., Osservazioni sulle variazioni volumetriche nucleari nella mitosi e nella meiosi (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	118
BUFFA P., Relazioni tra pressione osmotica del sangue e sudorazione nella febbre (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	122
LOZANO CABO F., Nota preliminare sull'identificazione di « <i>Spicara smaris</i> (L.) » e « <i>Spicara alcedo</i> (C. V.) », come sessi differenti di una medesima specie, con processo d'inversione sessuale (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	127
COLONNETTI G., L'organizzazione della ricerca scientifica problema fondamentale di vita nazionale.	133

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1951.

NOTE DI SOCI

TRICOMI F. G., Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile	Pag. 141
MAJORANA Q., Considerazioni conclusive sulla relatività speciale	144

NOTE PRESENTATE DA SOCI

BARBUTI U., Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive che non dipende dalla condizione di Lipschitz (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	Pag. 150
BAJADA E., Teorema d'unicità per una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	158
CONTI R., Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	164
MARCHIONNA E., Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli (pres. dal Corrisp. <i>O. Chisini</i>)	170
LATTANZI F., Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. Nota III (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	178
NORZI L., Discussione intorno al principio variazionale per la instabilità elastica (pres. dal Corrisp. <i>G. Albenga</i>)	187
GIANNUZZI M. A., Ricerca sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	193

MARUSSI A., Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss (pres. dal Corrisp. <i>G. Boaga</i>)	Pag. 198
FERRONI E. e ROVAI G., Sulla misura delle tensioni superficiali cinematiche (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	202
MALATESTA L. e GIUFFRÈ L., Complessi dei metalli con le carbilammine. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	206
TRAVE R. e BIANCHETTI G., Ammine arilalifatiche della serie del bifenile. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	211
ALIBRANDI G., Sull'azione epilettogena della tiamina (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>) . . .	219
MANUNTA G., Influenza dell'ormone paratiroideo sullo spessore del guscio dell'uovo di gallina (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	220
PERRI T., Morfologia comparata e causale delle connessioni tra cinto pelvico e colonna vertebrale e tra cinto anteriore e sterno negli Anfibi (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>) . . .	223
MARRÉ E. e PROFUMO P., Azione dell'eteroauxina sulla sintesi d'amido dal glucosio-1-fosfato in stomi isolati di Iris (pres. dal Corrisp. <i>E. Remotti</i>)	230

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1951.

NOTE DI SOCI

BOAGA G. e TRIBALTO G., Determinazione della densità media della Terra per mezzo di misure gravimetriche (pres. dal Corrisp. <i>G. Boaga</i>)	Pag. 237
MAJORANA Q., Sulla « Trasformazione di Einstein », detta di « Lorentz »	241
BONINO GIOV. B. e CHIORBOLI P., Spettro Raman della 2-pirrolaldeide allo stato cristallino (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	247
RUSSO A., Allevamenti razziali di topi con cancro spontaneo e immuni secondo L. Strong. « Mutazioni somatiche » e potere germinale del soma	253

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CINQUINI S., Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$ (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	Pag. 255
MATTIOLI E., Le relazioni tra le funzioni di correlazione della velocità nella turbolenza omogenea e isotropica (pres. dal Socio <i>E. Pistolesi</i>)	260
AGENO M. e QUERZOLI R., Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nelle soluzioni (pres. dal Socio <i>G. C. Trabacchi</i>)	265
COLONNA M., Risonanza e impedimento sterico di risonanza nelle 2-arilchinoline e derivati (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	268
CANONICA L. e BACCHETTI T., Chetoni dai diazochetoni. - II. Sintesi α - ω -diacetilparaffine e di diacetilbenzoli (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	275
ALIBRANDI G., Segnali condizionati sonori quali fattori scatenanti di crisi epilettiformi sperimentali (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	279
URBANI E., Studi comparativi sulla « massa di Giardina ». Sua presenza nella oogenesi di « <i>Hygrobia tarda</i> » Herbst. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	281
LIVREA G., Contributo alla conoscenza della termoregolazione nel ratto. (Importanza dell'emissione di saliva e di urina nella termoregolazione del ratto sovrariscaldato) (pres. dal Socio <i>G. Amantea</i>)	285

CEDRANGOLO F., QUAGLIARIELLO E., FIDANZA A., GIOIA A. e CRESTA M., Azione della penicillina sulla succinodeidrogenasi (pres. dal Socio <i>G. Quagliariello</i>)	Pag. 292
ARRIGO L. e MONTINI T., Presenza e comportamento dei lipidi nel succo enterico (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	297
MAZZI V., Valore sistematico di alcuni nuclei del talamo degli Attinotterigi (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i>)	302
Comunicazioni varie	305
Personale accademico	305
Plichi suggellati	306
Presentazione di libri	306
Presentazione di Note e Memorie	306
Relazioni di Commissioni	307
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 novembre 1951	308

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1951.

NOTE DI SOCI

NOBILE V., Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. - Rilievi e precisazioni. Nota III	Pag. 311
VARDABASSO S., Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna.	320

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PINI B., Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 325
PUCCI C., Alcune limitazioni per gl'integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	334
AGOSTINELLI C., Sulle funzioni epicicloidali e alcune nuove relazioni fra le funzioni di Bessel (pres. dal Socio <i>U. Amaldi</i>)	339
GALLARATI D., Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	344
AGENO M. e QUERZOLI R., Sulla fluorescenza destata da particelle α nelle soluzioni. Nota II (pres. dal Socio <i>G. C. Trabacchi</i>)	348
BERETTA E. e BIANCHI A., Liberazione di elettroni secondari da parte di ioni poliatomici, e fenomeni di invecchiamento nei contatori di G. e M. a spegnimento spontaneo (pres. dal Corrisp. <i>A. Rostagni</i>)	352
MAZZOLENI F., Le formule delle fasi di Hume-Rothery in leghe con più di due componenti (pres. dal Socio <i>F. Giordani</i>)	357
MIRONE P., Sullo spettro ultrarosso del pirrolo tra 2,8 e 4 μ . Sdoppiamento della banda ultrarossa riferita al gruppo NH (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	365
MANGINI A. e PASSERINI R., Ricerche sui composti solforati organici. Spettri u. v. e su alcune proprietà dei difenil-solfuri -solfossidi e -solfoni in acido solforico concentrato (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	370
CHIORBOLI P., Sullo spettro Raman dell α -acetilfurano (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	375
MALATESTA L. e SACCO A., Composti Ni^{10} -tetracarbilamminici da sali del nichel bivalente (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	379

ALIBRANDI G., Calcio ioni e disposizione verso l'epilessia riflessa (pres. dal Socio C. Ciaccio)	Pag. 383
CAPRARO V. e BERNINI G., Sul meccanismo di azione della postipofisi nel passaggio di acqua attraverso la cute di Rana esculenta (press. dal Corrisp. R. Margaria)	385
LIVREA G. e DESTRO F., Gli effetti dei reiterati eccitamenti massivi dei centri encefalici sulla funzione spermiogenetica ed endocrina del testicolo del gallo (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	392
LE ROUX P. L. e BIOCCA E., Il « Bullinus contortus » ospite intermedio dello « Schistosoma bovis » in Sardegna (pres. dal Corrisp. V. Puntoni)	400
BORDI M., Ricerche sul potere di penetrazione di un ceppo di « Trypanosoma brucei » attraverso le mucose del topino (pres. dal Corrisp. V. Puntoni)	403
LODOVICO A. e MONTINI T., Fattori lipotropi ed assorbimento enterico di emulsioni oleose (pres. dal Socio U. Lombroso)	407
COLONNETTI G., L'intervento U.S.A. e la sua possibile influenza su la scienza e la cultura italiana.	412

COMMEMORAZIONI

SIGNORINI A., Commemorazione del Socio Giovanni Giorgi	Pag. 416
Personale Accademico	424
Comunicazioni varie	424
Plichi suggellati	424
Presentazione di libri	425
Presentazione di Note e Memorie	426
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 dicembre 1951	428
Indice per Autori	431
Indice per materie	435
Indici dei fascicoli	439

